2010年度

輻射科学研究会資料集

RS10-01～RS10-16

(May 2010～March 2011)

開催会場(月・日)

第１回：大阪大学, 吹田キャンパス(5月20日)
RS10-01～RS10-04

第２回：龍谷大学, 瀬田キャンパス(7月1日)
RS10-05～RS10-08

第３回：関西国際空港株式会社(11月12日)
RS10-09

第４回：近畿大学, 本部キャンパス(2月20日)
RS10-10～RS10-12

第５回：大阪大学, 豊中キャンパス(3月28日)
RS10-13～RS10-16

2011年6月1日発行

２０１０年度　輻射科学研究会資料集目次

◇日時　平成 22 年 5 月 20 日（木）13 時 30 分～16 時 40 分
◇会場　大阪大学 吹田キャンパス 理工学図書館 西館３階 図書館ホール
大阪府吹田市山田丘 2-1

◇日時　平成 22 年 7 月 1 日（木）13 時 30 分～16 時 40 分
◇会場　龍谷大学 瀬田キャンパス 6 号館プレゼンテーション室
大津市瀬田大江町横谷 1 番 5

◇日時　平成 22 年 11 月 12 日(金)　13 時 35 分～15 時 30 分
◇会場　関西国際空港株式会社
大阪府泉佐野市泉州空港北 1 番地

輻射科学研究会資料

資料番号	RS 10-01

非等方ランダム薄膜による波動の強調散乱

－２次インコヒーレント散乱の評価－

田村安彦[1]
(京都工芸繊維大学大学院 工芸科学研究科 電子システム工学部門)
1 ytamura@kit.ac.jp

2010年5月20日（木）

輻射科学研究会
(於 大阪大学 吹田キャンパス 理工学図書館 西館３階 図書館ホール)

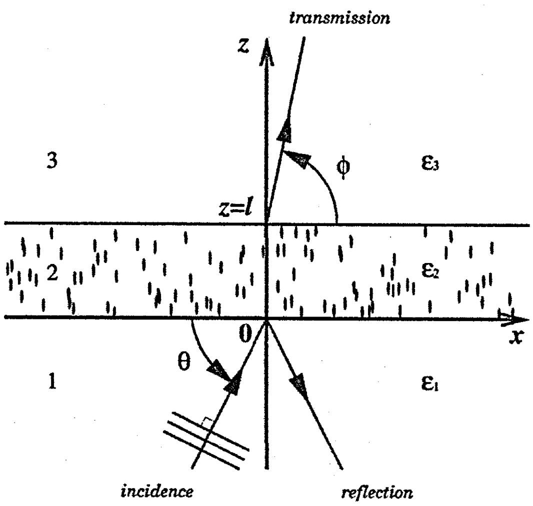


図 1　問題の座標系

1　はじめに

半導体材料、液晶、高分子素材、生体組織等の構造、あるいは大気、土壌、森林と言った自然環境は、特定方向に相関が強い非等方なランダム性を有している [1–5]。そのような非等方なランダム媒質による波動の伝搬や散乱現象の理論解析は、工学上の観点から非破壊検査、リモートセンシング、リアルタイムモニタリングのために重要である。このような特定方向に相関の強い非等方ランダム媒質や薄膜による波動散乱の理論解析は、単一散乱近似によるものが多い [4–6]。一方で多重散乱効果を考慮した系統的な理論解析は少ない。我々は確率汎関数法 [7] によりランダム薄膜 (スラブ) 構造からの波動散乱を研究してきた [8–17]。これらの研究では (統計的に) 等方ランダムもしくは非等方ランダムなゆらぎを持つ薄膜系に対し、インコヒーレント散乱の統計量としてゆらぎによる' 衣を着た' 1 回散乱を表す 1 次インコヒーレント散乱断面積と電力関係を記述する光学定理を計算し、散乱特性について議論した。膜厚方向のゆらぎの相関長が大きくなる非等方性ゆらぎに対し、1 次インコヒーレント散乱おいては入射波長に比して厚い薄膜では、角度分布にリップルが現れること、四つの特定の方向:前方散乱、鏡面反射、後方散乱及び対称前方散乱 (前方散乱と z-軸対称な方向への散乱) 方向に主要なピークが現れることが分かっており、反射側では強調散乱により等方ゆらぎに対してもピークとなることを示した。一方、ゆらぎによる' 衣を着た'2 回散乱に関する統計量である 2 次インコヒーレント散乱断面積に関しては、特定方向の相関長が無限大となる特別な非等方ランダム系としての層状あるいは柱状ゆらぎとなる一次元ランダム薄膜 [11, 12, 15]、もしくは柱状二次元ランダム薄膜 [14] に限定していた。導波路となる薄膜に対し 2 次インコヒーレント散乱では、入射波長に比して薄い場合は、後方散乱と対称前方散乱方向に強調散乱の鋭いピーク及びその周囲に随伴強調散乱のピークもしくはディップが現れ得る。これらの強調散乱は薄膜中の導波モードを励振することで生じる。更に、2 次インコヒーレント散乱における新たな現象として、導波路か否かによらず入射波長に比して厚い薄膜では後方散乱と対称前方散乱方向に' 緩やかな強調散乱' のピークが現れることを示した。

この報告では非等方ゆらぎを持つ二次元ランダム薄膜 (図 1) の TE 平面波による反射と透過について、先の論文 [17] に引き続いて議論する。等方、非等方を含めたランダムなゆらぎを持つ薄膜によるランダム波動場のウィーナ・伊藤展開表現は既に論文 [16] で示している。ある種の非等方な場合 (ゆらぎのスペクトル密度が横方向と縦 (膜厚) 方向に分解できる場合) における 2 次インコヒーレント散乱断面積を計算する。しかしながら先の一次元系とは異なり一般的な二次元ランダム薄膜においては、2 次インコヒーレント散乱断面積は振動する積分核を持つ 3 重積分を必要とするため、その演算強度は膨大である。本報告では、積分核の性質を利用して許容範囲内で演算強度を低減させる種々の工夫を施すことで、非等方ランダム薄膜による 2 次インコヒーレント散乱断面積を計算する。' 衣を着た'2 回散乱による強調散乱現象と非等方性ゆらぎとの関連性を議論する。

本報告においては、時間因子を $e^{-2\pi i f_i t}$ (f_i は周波数) として省略する。

2 ランダム波動場

2.1 ランダム波動場の確率論的なフロケの形

図1の直角座標系 (x,z) (単位ベクトル:e_x, e_z) において、平面 $z=0$ 及び $z=l(>0)$ で仕切られる三層媒質1,2,3からなる二次元ランダム薄膜系へのTE平面波入射を考える。各媒質中での比誘電率を各々 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ で表す。ϵ_2 は zx-平面内での二次元ゆらぎを持ち以下のように書く。

$$\epsilon_2 = \bar{\epsilon}_2\{1+\epsilon_f(\boldsymbol{r},\omega)\},\ \boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+z\boldsymbol{e}_z,\ 0\le z\le l \tag{1}$$

ここで、$\bar{\epsilon}_2$ は ϵ_2 の平均を表す。$\epsilon_f(\boldsymbol{r},\omega)$ はゆらぎ部分で二次元ガウス一様確率場を仮定し、ウィーナ積分 [19] でスペクトル表現する。

$$\epsilon_f(\boldsymbol{r},\omega)=\int_{\boldsymbol{R}^2} e^{i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r}}G(\boldsymbol{\lambda})dB(\boldsymbol{\lambda},\omega),\ \boldsymbol{\lambda}=\lambda_x\boldsymbol{e}_x+\lambda_z\boldsymbol{e}_z \tag{2}$$

ただし、$\boldsymbol{\lambda}=\lambda_x\boldsymbol{e}_x+\lambda_z\boldsymbol{e}_z, \lambda_x,\lambda_z\in\boldsymbol{R}\equiv(-\infty,\infty)$、$\omega$ は見本空間 Ω 中の一見本点、$dB(\boldsymbol{\lambda},\omega)$ は $\boldsymbol{R}^2(=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})$ 上の複素ガウスランダム測度 [19] で統計的性質: $dB^*(\boldsymbol{\lambda},\omega)=dB(-\boldsymbol{\lambda},\omega)$,$\langle dB(\boldsymbol{\lambda},\omega)\rangle=0$,$\langle dB(\boldsymbol{\lambda},\omega)dB^*(\boldsymbol{\lambda}',\omega)\rangle=\delta^2(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}')d\boldsymbol{\lambda}d\boldsymbol{\lambda}'$ を備える。ただし、$\delta^2(\boldsymbol{\lambda})\equiv\delta(\lambda_x)\delta(\lambda_z)$, $d\boldsymbol{\lambda}\equiv d\lambda_x d\lambda_z$ であり、$\langle\cdot\rangle$ はアンサンブル平均、$*$ は複素共役、$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\lambda})\equiv\delta(\lambda_x)\delta(\lambda_y)$ ($\delta(\cdot)$ ディラックデルタ) を表す。ゆらぎ部分の平均、分散 σ^2 及び相関関数 $R(\boldsymbol{r})$ は

$$\langle\epsilon_f(\boldsymbol{r},\omega)\rangle=0,\ \langle|\epsilon_f(\boldsymbol{r},\omega)|^2\rangle=R(0)=\sigma^2,\ R(\boldsymbol{r})=\langle\epsilon_f(\boldsymbol{r},\omega)\epsilon_f^*(0,\omega)\rangle=\int_{\boldsymbol{R}^2}|G(\boldsymbol{\lambda})|^2e^{i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{\lambda} \tag{3}$$

となる。ここで、$|G(\boldsymbol{\lambda})|^2$ はゆらぎのスペクトル密度で $|G(\boldsymbol{\lambda})|^2=|G(-\boldsymbol{\lambda})|^2$、$\sigma(>0)$ はRMSゆらぎである。

TE平面波

$$\psi_i(\boldsymbol{r})=e^{ipx+i\beta_1(p)z} \tag{4}$$

が境界 $z=0$ に入射するとき、各領域のランダム波動場 $\psi_j(\boldsymbol{r},\omega)$ $(j=1,2,3)$ は確率論的なフロケの形として、ウィーナ・伊藤展開を用いて書ける [16]。

媒質1 $(z\le 0)$

$$\begin{aligned}\psi_1(\boldsymbol{r},\omega) &= \psi_i(\boldsymbol{r})+A_0(p)e^{ipx-i\beta_1(p)z}\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\int\cdots\int_{\boldsymbol{R}^2}A_n(\boldsymbol{\lambda}_1,\cdots,\boldsymbol{\lambda}_n|p)e^{i(p+\lambda_{1x}+\cdots+\lambda_{nx})x-i\beta_1(p+\lambda_{1x}+\cdots+\lambda_{nx})z}\hat{h}^{(n)}[dB(\boldsymbol{\lambda}_1,\omega),\cdots,dB(\boldsymbol{\lambda}_n,\omega)],\end{aligned} \tag{5}$$

媒質2 $(0<z<l)$

$$\begin{aligned}\psi_2(\boldsymbol{r},\omega) &= e^{ipx}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu}e^{isz}\Big\{F_0(p;s)\right.\\ &\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\int\cdots\int_{\boldsymbol{R}^2}F_n(\boldsymbol{\lambda}_1,\cdots,\boldsymbol{\lambda}_n|p;s)e^{i(\boldsymbol{\lambda}_1+\cdots+\boldsymbol{\lambda}_n)\cdot\boldsymbol{r}}\hat{h}^{(n)}[dB(\boldsymbol{\lambda}_1,\omega),\cdots,dB(\boldsymbol{\lambda}_n,\omega)]\Big\}ds\right]\quad \mu\in\boldsymbol{R},\end{aligned} \tag{6}$$

媒質3 $(l\le z)$

$$\begin{aligned}\psi_3(\boldsymbol{r},\omega) &= C_0(p)e^{ipx+i\beta_3(p)z}\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\int\cdots\int_{\boldsymbol{R}^2}C_n(\boldsymbol{\lambda}_1,\cdots,\boldsymbol{\lambda}_n|p)e^{i(p+\lambda_{1x}+\cdots+\lambda_{nx})x+i\beta_3(p+\lambda_{1x}+\cdots+\lambda_{nx})z}\hat{h}^{(n)}[dB(\boldsymbol{\lambda}_1,\omega),\cdots,dB(\boldsymbol{\lambda}_n,\omega)]\end{aligned} \tag{7}$$

ここで、A_n, C_n, F_n は n 次のウィーナ核 (ランダムでない確定値関数) で薄膜中のランダム媒質による' 衣を着た'n 回散乱波の振幅を表す。$\hat{h}^{(n)}[\cdot]$ は n 次の複素ウィーナ・エルミット微分式 [19] である。p は入射波動ベクトルの x-軸への写影である。

$$p=k_1\cos\theta \tag{8}$$

ここで、θ $(0<\theta<\pi)$ は入射角である (図1)。裸の伝搬因子 $\beta_j(\lambda)$ $(j=1,2,3)$ は次の二価関数として定義する。

$$\beta_j(\lambda)=\sqrt{k_j+\lambda}\sqrt{k_j-\lambda},\qquad \beta_j(-\lambda)=\beta_j(\lambda) \tag{9}$$

これらの分岐は複素 λ-平面上で、分岐点 $\lambda = k_j, -k_j$ から各々 $k_j + i\infty, -k_j - i\infty$ に至る虚数軸に平行な直線にとる。この時、$\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対し $Im\ \beta_j(\lambda) \geq 0$ が成り立つ (Im は虚部を取ることを表す)。k_j ($j = 1, 2, 3$) は各媒質中での波数である。

$$k_1 = \sqrt{\epsilon_1}k, \quad k_2 = \sqrt{\epsilon_2}k, \quad k_3 = \sqrt{\epsilon_3}k \tag{10}$$

ここで、$k \equiv 2\pi/\Lambda$ は真空中の波数である (Λ は真空中の波長)。

2.2 光学定理とインコヒーレント散乱断面積

無損失系では規格化光学定理は以下で与えられる。

$$1 = P_c^R + P_c^T + P_{ic}^R + P_{ic}^T \tag{11}$$

ここで、P_c^R と P_c^T は各々規格化コヒーレント反射と透過電力である。

$$P_c^R = |A_0(p)|^2, \quad P_c^T = \frac{Re\ \beta_3(p)}{k_1 \sin\theta}|C_0(p)|^2 \tag{12}$$

Re は実部を取ることを表す。P_{ic}^R と P_{ic}^T は各々規格化インコヒーレント反射と透過電力である。

$$P_{ic}^R = \frac{1}{2\pi\sin\theta}\int_{\pi}^{2\pi}\sigma_b(\phi|\theta)d\phi = \sum_{n=1}^{\infty}P_{ic}^R(n), \tag{13}$$

$$P_{ic}^T = \frac{1}{2\pi\sin\theta}\int_{0}^{\pi}\sigma_f(\phi|\theta)d\phi = \sum_{n=1}^{\infty}P_{ic}^T(n), \tag{14}$$

$$P_{ic}^R(n) = \frac{1}{2\pi\sin\theta}\int_{\pi}^{2\pi}\sigma_{bn}(\phi|\theta)d\phi, \tag{15}$$

$$P_{ic}^T(n) = \frac{1}{2\pi\sin\theta}\int_{0}^{\pi}\sigma_{fn}(\phi|\theta)d\phi \tag{16}$$

$P_{ic}^R(n)$ と $P_{ic}^T(n)$ ($n \geq 1$) は各々規格化 n 次インコヒーレント反射と透過電力である。$\sigma_b(\phi|\theta)$ と $\sigma_f(\phi|\theta)$ は各々反射側 ($\pi < \phi < 2\pi$) と透過側 ($0 < \phi < \pi$) でのインコヒーレント散乱断面積である。$\sigma_{bn}(\phi|\theta)$ と $\sigma_{fn}(\phi|\theta)$ はそれらの n 次成分である。ここでは 1 次と 2 次インコヒーレント散乱断面積を示しておく。

$$\sigma_{b1}(\phi|\theta) = 2\pi k_1 \sin^2\phi \int_{-\infty}^{\infty}|A_1((q_1 - p)e_x + \lambda_{1z}e_z|p)|^2 d\lambda_{1z}, \tag{17}$$

$$\sigma_{f1}(\phi|\theta) = \frac{2\pi k_3^2 \sin^2\phi}{k_1}\int_{-\infty}^{\infty}|C_1((q_3 - p)e_x + \lambda_{1z}e_z|p)|^2 d\lambda_{1z} \tag{18}$$

$$\sigma_{b2}(\phi|\theta) = 4\pi k_1 \sin^2\phi \iiint_{-\infty}^{\infty}|A_2((q_1 - p - \lambda_x)e_x + \lambda_{1z}e_z, \lambda_x e_x + \lambda_{2z}e_z|p)|^2 d\lambda_x d\lambda_{1z} d\lambda_{2z} \tag{19}$$

$$\sigma_{f2}(\phi|\theta) = \frac{4\pi k_3^2 \sin^2\phi}{k_1}\iiint_{-\infty}^{\infty}|C_2((q_3 - p - \lambda_x)e_x + \lambda_{1z}e_z, \lambda_x e_x + \lambda_{2z}e_z|p)|^2 d\lambda_x d\lambda_{1z} d\lambda_{2z} \tag{20}$$

ただし、ϕ ($0 < \phi < \pi, \pi < \phi < 2\pi$) は散乱角 (図 1)、$q_1$,$q_3$ は散乱ベクトルの x-軸への写影である。

$$q_1 = k_1\cos\phi, \quad q_3 = k_3\cos\phi \tag{21}$$

2.3 多重繰り込み近似ウィーナ核

微小ゆらぎの条件下: $\sigma^2 \ll 1$ での多重繰り込み近似ウィーナ核は論文 [16] に示してあるが、ここでは後の数値計算で用いる 0 次、1 次及び 2 次ウィーナ核を示しておく。

$$A_0(p) = -\frac{\{\bar\beta_2(p) - \beta_1(p)\}\{\bar\beta_2(p) + \beta_3(p)\}e^{-i\bar\beta_2(p)l} - \{\bar\beta_2(p) + \beta_1(p)\}\{\bar\beta_2(p) - \beta_3(p)\}e^{i\bar\beta_2(p)l}}{\Delta(p)} \tag{22}$$

$$
\begin{aligned}
C_0(p) &= \frac{4\beta_1(p)\bar{\beta}_2(p)e^{-i\beta_3(p)l}}{\Delta(p)} && (23)\\
F_0(p;s) &= \frac{2i\beta_1(p)}{\Delta(p)}Q_0(p;s) && (24)\\
Q_0(\lambda;s) &= \{\bar{\beta}_2(\lambda)-\beta_3(\lambda)\}e^{i\bar{\beta}_2(\lambda)l}(-il)e^{-i\frac{s+\bar{\beta}_2(\lambda)}{2}l}\mathrm{sinc}\left[\frac{s+\bar{\beta}_2(\lambda)}{2}l\right]\\
&\quad+\{\bar{\beta}_2(\lambda)+\beta_3(\lambda)\}e^{-i\bar{\beta}_2(\lambda)l}(-il)e^{-i\frac{s-\bar{\beta}_2(\lambda)}{2}l}\mathrm{sinc}\left[\frac{s-\bar{\beta}_2(\lambda)}{2}l\right] && (25)\\
A_1(\boldsymbol{\lambda}_1|p) &= \frac{k_2^2G(\boldsymbol{\lambda}_1)}{\Delta(p+\lambda_{1x})}a_1(p+\lambda_{1x};\lambda_{1z}) && (26)\\
C_1(\boldsymbol{\lambda}_1|p) &= \frac{k_2^2G(\boldsymbol{\lambda}_1)}{\Delta(p+\lambda_{1x})}c_1(p+\lambda_{1x};\lambda_{1z}) && (27)\\
a_1(\lambda_x;\lambda_z) &= i\Big[\{\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\beta_3(\lambda_x)\}F_0(p;\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\lambda_z)e^{i\bar{\beta}_2(\lambda_x)l}\\
&\quad+\{\bar{\beta}_2(\lambda_x)+\beta_3(\lambda_x)\}F_0(p;-\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\lambda_z)e^{-i\bar{\beta}_2(\lambda_x)l}\Big] && (28)\\
c_1(\lambda_x;\lambda_z) &= -ie^{-i\beta_3(\lambda_x)l}\left[\{\bar{\beta}_2(\lambda_x)+\beta_1(\lambda_x)\}F_0(p;\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\lambda_z)\right.\\
&\quad\left.+\{\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\beta_1(\lambda_x)\}F_0(p;-\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\lambda_z)\right] && (29)\\
F_1(\boldsymbol{\lambda}_1|p;s) &= \frac{k_2^2G(\boldsymbol{\lambda}_1)}{\Delta(p+\lambda_{1x})}f_1(p+\lambda_{1x};s,\lambda_{1z}) && (30)\\
f_1(\lambda_x;s,\lambda_z) &= -F_0(p;s)Q_0(\lambda_x;s+\lambda_z)\\
&\quad+\frac{F_0(p;s)-F_0(p;\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\lambda_z)}{s+\lambda_z-\bar{\beta}_2(\lambda_x)}Q^{(+)}(\lambda_x;s+\lambda_z)\\
&\quad-\frac{F_0(p;s)-F_0(p;-\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\lambda_z)}{s+\lambda_z+\bar{\beta}_2(\lambda_x)}Q^{(-)}(\lambda_x;s+\lambda_z) && (31)\\
Q^{(\pm)}(\lambda;s) &= \{\beta_1(\lambda)+\beta_3(\lambda)\}e^{-isl}\\
&\quad+\{s-\beta_1(\lambda)\}\{\pm\bar{\beta}_2(\lambda)-\beta_3(\lambda)\}e^{\pm i\bar{\beta}_2(\lambda)l}(-il)e^{-i\frac{s\pm\bar{\beta}_2(\lambda)}{2}l}\mathrm{sinc}\left[\frac{s\pm\bar{\beta}_2(\lambda)}{2}l\right] && (32)\\
A_2(\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2|p) &= \frac{k_2^2}{2\Delta(p+\lambda_{1x}+\lambda_{2x})}\{G(\boldsymbol{\lambda}_2)a_2(\boldsymbol{\lambda}_1|p+\lambda_{1x}+\lambda_{2x};\lambda_{1z}+\lambda_{2z})\\
&\quad+G(\boldsymbol{\lambda}_1)a_2(\boldsymbol{\lambda}_2|p+\lambda_{1x}+\lambda_{2x};\lambda_{1z}+\lambda_{2z})\} && (33)\\
C_2(\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2|p) &= \frac{k_2^2}{2\Delta(p+\lambda_{1x}+\lambda_{2x})}\{G(\boldsymbol{\lambda}_2)c_2(\boldsymbol{\lambda}_1|p+\lambda_{1x}+\lambda_{2x};\lambda_{1z}+\lambda_{2z})\\
&\quad+G(\boldsymbol{\lambda}_1)c_2(\boldsymbol{\lambda}_2|p+\lambda_{1x}+\lambda_{2x};\lambda_{1z}+\lambda_{2z})\} && (34)\\
a_2(\boldsymbol{\lambda}_1|\lambda_x;\lambda_z) &= i[e^{i\bar{\beta}_2(\lambda_x)l}\{\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\beta_3(\lambda_x)\}F_1(\boldsymbol{\lambda}_1|p;\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\lambda_z)\\
&\quad+e^{-i\bar{\beta}_2(\lambda_x)l}\{\bar{\beta}_2(\lambda_x)+\beta_3(\lambda_x)\}F_1(\boldsymbol{\lambda}_1|p;-\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\lambda_z)] && (35)\\
c_2(\boldsymbol{\lambda}_1|\lambda_x;\lambda_z) &= -ie^{-i\beta_3(\lambda_x)l}[\{\bar{\beta}_2(\lambda_x)+\beta_1(\lambda_x)\}F_1(\boldsymbol{\lambda}_1|p;\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\lambda_z)\\
&\quad+\{\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\beta_1(\lambda_x)\}F_1(\boldsymbol{\lambda}_1|p;-\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\lambda_z)] && (36)
\end{aligned}
$$

ただし、$\mathrm{sinc}\,\alpha\equiv(\sin\alpha)/\alpha$ である。$\Delta(\lambda)$ は' 衣を着た' 共振因子でランダム薄膜中の多重反射効果を記述する。

$$\Delta(\lambda)=\{\bar{\beta}_2(\lambda)+\beta_1(\lambda)\}\{\bar{\beta}_2(\lambda)+\beta_3(\lambda)\}e^{-i\bar{\beta}_2(\lambda)l}-\{\bar{\beta}_2(\lambda)-\beta_1(\lambda)\}\{\bar{\beta}_2(\lambda)-\beta_3(\lambda)\}e^{i\bar{\beta}_2(\lambda)l} \qquad (37)$$

$\bar{\beta}_2(\lambda)$ は' 衣を着た' 伝搬因子である。

$$\bar{\beta}_2(\lambda)=\sqrt{\bar{k}_2(\lambda)+\lambda}\sqrt{\bar{k}_2(\lambda)-\lambda} \qquad (38)$$

ここで、$\bar{k}_2(\lambda)$ は' 衣を着た' 波数で媒質 2 での実効的な波数を表す。

$$\bar{k}_2(\lambda)=\sqrt{k_2^2+m^{\mathrm{ai}}(\lambda)} \qquad (39)$$

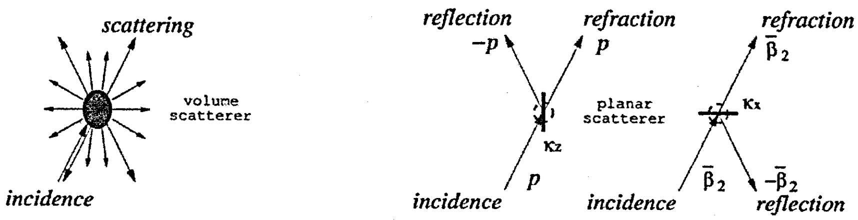


図 2　非等方ランダム媒質における体積散乱体の解釈

m^{ai} は波数の補正因子で以下のように定義する。

$$m^{\mathrm{ai}}(\lambda) \equiv m(\lambda e_x + \beta_2(\lambda) e_z) \tag{40}$$

$\bar{\beta}_2(\lambda)$ の分岐は $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対し Im $\bar{\beta}_2(\lambda) > 0$ が成り立つように取る。$m(\boldsymbol{\mu})$ は二次元ランダム媒質中の多重繰り込みマスオペレータであり無限回繰り込まれた特別な二重散乱効果を記述する非線形積分方程式の解である。

$$m(\boldsymbol{\mu}) = -k_2^4 \int_{R^2} \frac{|G(\boldsymbol{\lambda})|^2}{k_2^2 - (\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\lambda})^2 + m(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\lambda})} d\boldsymbol{\lambda} \tag{41}$$

$m(\boldsymbol{\mu})$ は偶関数 $m(-\boldsymbol{\mu}) = m(\boldsymbol{\mu})$ である。$Im\ m(\boldsymbol{\mu}) > 0$ であれば $Im\ \bar{k}_2(\lambda) > 0$ が成り立つ。これは、コヒーレント波に対して、無損失ランダム媒質があたかも均一な損失媒質のように振る舞うことを意味する。このような多重繰り込みマスオペレータにより共振因子 $\Delta(\lambda)$ は $\lambda \in \mathbf{R}$ に対し常に非零である。

3　インコヒーレント散乱断面積

ゆらぎのスペクトル密度が x,z-軸方向に独立に相関長 κ_x, κ_z を持つとする。更に、スペクトル密度が次のように分解できると仮定する †。

$$|G(\boldsymbol{\lambda})|^2 = |G_x(\lambda_x)|^2 |G_z(\lambda_z)|^2 \tag{42}$$

κ_x, κ_z は各々横もしくは縦方向のゆらぎの相関長とする。ゆらぎのスペクトル密度が (42) の形で書けることの物理的な意味は次のようである。二次元ランダム媒質中の一つの体積散乱体を考えると、これは実質的に x-及び $z-$ 軸に沿った各々有限長 κ_x, κ_z 程度の二つの板状散乱体へ分解できる (図 2)。入射波動ベクトル $pe_x + \bar{\beta}_2(p)e_z$ の波動がそのような板状散乱体に入射すれば' 屈折' と' 反射' を生ずるが、これはブラッグ散乱の意味では各々 $\lambda_x = 0, -2p$(縦方向の板状散乱体) あるいは $\lambda_z = 0, -2Re\bar{\beta}_2(p)$(横方向の板状散乱体) を入射波動ベクトルに与える。従って、z 方向に相関が大きい場合は' 衣を着た'1 回散乱波は板状散乱体としての指向性が強いから、次の 4 方向で散乱を強く生じ得る。

$$q_1 = \left\{ \begin{array}{l} p \\ -p \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \phi = \phi_r \equiv 2\pi - \theta \\ \text{(鏡面反射)} \\ \phi = \phi_b \equiv \pi + \theta \\ \text{(後方散乱)} \end{array} \right. , \quad q_3 = \left\{ \begin{array}{l} p \\ -p \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \phi = \phi_f \equiv \cos^{-1}(\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_3}\cos\theta) \\ \text{(前方散乱)} \\ \phi = \phi_o \equiv \cos^{-1}(-\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_3}\cos\theta) \\ \text{(対称前方散乱)} \end{array} \right. \tag{43}$$

このようなゆらぎの基本構造が元となって統計量としてのインコヒーレント散乱は構成されることになる。

3.1　多重繰り込みマスオペレータ

条件 (42) 下では多重繰り込みマスオペレータは

$$m(\pm\mu_x e_x + \mu_z e_z) = m(\mp\mu_x e_x + \mu_z e_z),\ \ m(\mu_x e_x \pm \mu_z e_z) = m(\mu_x e_x \mp \mu_z e_z) \tag{44}$$

を満たす。よって

$$m^{\mathrm{ai}}(-\lambda) = m^{\mathrm{ai}}(\lambda),\ \bar{k}_2(-\lambda) = \bar{k}_2(\lambda) \tag{45}$$

†散乱過程に関する説明をしやすくするための便宜である。必須の条件ではない。

が成り立つ。これより’衣を着た’伝搬因子は偶関数となる。

$$\bar{\beta}_2(-\lambda) = \bar{\beta}_2(\lambda) \tag{46}$$

このような’衣を着た’伝搬因子の偶関数性と裸の伝搬因子の偶関数性 (9) より、ウィーナ核の構成要素に関する次の偶関数性が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Delta(-\lambda) = \Delta(\lambda), \quad Q_0(-\lambda; s) = Q_0(\lambda; s), \\ Q^{(\pm)}(-\lambda; s) = Q^{(\pm)}(\lambda; s), \quad f_1(-\lambda_x; s, \lambda_z) = f_1(\lambda_x; s, \lambda_z) \end{aligned} \tag{47}$$

多重繰り込みマスオペレータを求めるためには 2 次元非線形積分方程式 (41) を解く必要がある。その解法アルゴリズムは $-k_2 \le \lambda \le k_2$ すなわち $\boldsymbol{\mu}$ が実ベクトルの時、以下のようになる [17]。

$$m^{(n)}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{cases} m^{(\delta)}(\boldsymbol{\mu}) & (n=0) \\ -k_2^4 \displaystyle\int_{R^2} \frac{|G(\boldsymbol{\lambda})|^2}{k_2^2 - (\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\lambda})^2 + m^{(n-1)}(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\lambda})} d\boldsymbol{\lambda} & (n \ge 1) \end{cases} \tag{48}$$

ここで $m^{(\delta)}(\boldsymbol{\mu})$ は δ-厳密解と呼ばれる初期値である。

$$m^{(\delta)}(\boldsymbol{\mu}) = -\frac{(k_2^2 - \boldsymbol{\mu}^2) + D_\beta(\mu_x; \mu_z)}{2}, \quad D_\beta(\mu_x; \mu_z) = \sqrt{k_+ + \mu_x}\sqrt{k_+ - \mu_x}\sqrt{k_- + \mu_x}\sqrt{k_- - \mu_x} \tag{49}$$

$$k_\pm = \sqrt{(k_2^2 - \mu_z^2) \pm 2k_2^2|\sigma|} \tag{50}$$

D_β の分岐は $m^{(\delta)}(\boldsymbol{\mu})$ が $|\boldsymbol{\mu}| \to \infty$ に対し消滅するように決める。一方、$\lambda < -k_2, k_2 < \lambda$ すなわち $\boldsymbol{\mu}$ が複素ベクトルの時、

$$m^{\rm ai}(\lambda) = m^{\rm ai}(k_2) = m^{\rm ai}(-k_2) \tag{51}$$

として近似計算する [18]。

3.2 1 次インコヒーレント散乱断面積の表現

1 次ウィーナ核による 1 次インコヒーレント散乱が表す物理的な意味については論文 [16] で詳細に議論した。ここでは簡単にそのまとめをしておく。(42) と (17),(18) で示した式における 1 次ウィーナ核 A_1,C_1 の引数より 1 次インコヒーレント散乱断面積のより具体的な形を得る。

$$\sigma_{b1}(\phi|\theta) = 2\pi k_1 \sin^2\phi \frac{k_2^4}{|\Delta(q_1)|^2} |G_x(q_1 - p)|^2 |\hat{a}_1(q_1)|^2 \tag{52}$$

$$\sigma_{f1}(\phi|\theta) = 2\pi \frac{k_3^2}{k_1} \sin^2\phi \frac{k_2^4}{|\Delta(q_3)|^2} |G_x(q_3 - p)|^2 |\hat{c}_1(q_3)|^2 \tag{53}$$

$$|\hat{a}_1(\lambda)|^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |G_z(\lambda_z)|^2 |a_1(\lambda; \lambda_z)|^2 d\lambda_z \tag{54}$$

$$|\hat{c}_1(\lambda)|^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |G_z(\lambda_z)|^2 |c_1(\lambda; \lambda_z)|^2 d\lambda_z \tag{55}$$

(52)-(55) より、1 次インコヒーレント散乱は指向性因子 $|\hat{a}_1|^2, |\hat{c}_1|^2$、共振因子 $k_2^4/|\Delta|^2$ 及び 横方向のスペルトル密度 $|G_x|^2$ の三つから構成されることが分かる。指向性因子はコヒーレント平面波のフーリエスペクトルである 0 次ウィーナ核 F_0 を内蔵する。数学的に F_0 は 4 つの特徴的な方向 (43) において主ローブ の最大値をとるが、これはコヒーレント平面波の伝搬方向 (図 3) であるから $\kappa_z \to \infty(|G_z(\lambda_z)|^2 \to \delta(\lambda_z))$ の時は一次元系のゆらぎとなり F_0 は指向性因子において直接的に現れる。この時 1 次インコヒーレント散乱は 4 つの特徴的な方向 (43) で強く生じる [9,13]。有限の κ_z では z 方向のゆらぎにより、F_0 は λ_z に関する積分で鈍り間接的な意味で現れることになる。よって、大なる κ_z では同じく 1 次インコヒーレント散乱は 4 つの特徴的な方向 (43) で比較的強く生じる (図 4)。等方ゆらぎの場合 ($\kappa_x = \kappa_z$) は、z 方向のゆらぎにより強い指向性の劣化した指向性因子とダブルパス (図 4 右の (b1) と (b2)) あるいはトリプルパス (図 4 左の (f1) と (f2) と (f3)) 効果により 4 つの特徴的な方向 (43) に強調散乱の意味でピークやディップとして現れる [16]。

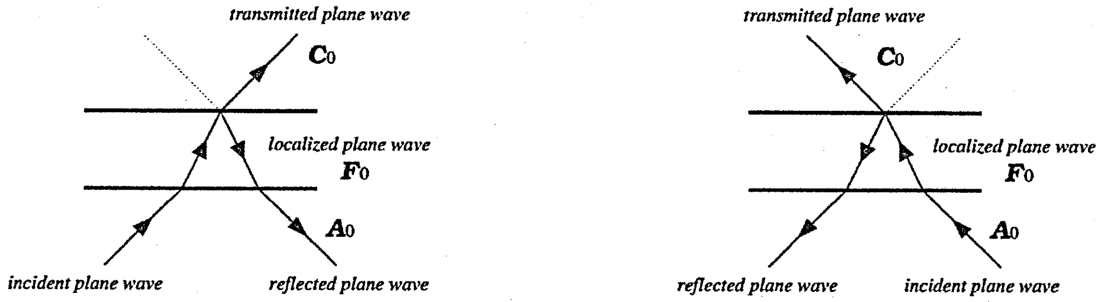


図 3　コヒーレント平面波の伝搬経路

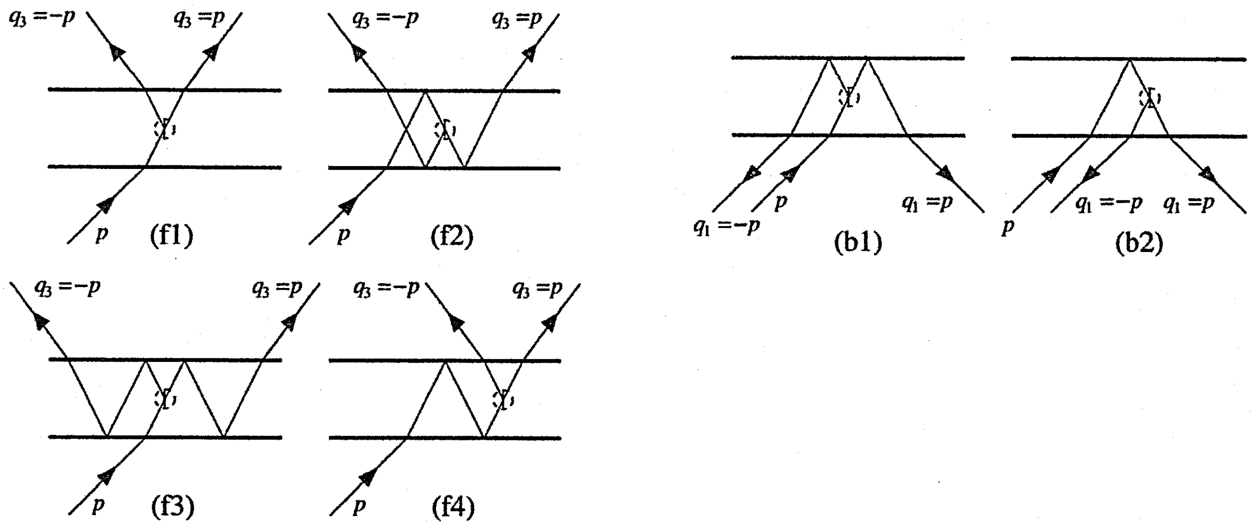


図 4　'衣を着た' 一回散乱のダイアグラム

3.3　2次インコヒーレント散乱断面積の表現

(42) と (17),(18) で示した式の２次ウィーナ核 A_2,C_2 の引数より２次インコヒーレント散乱断面積のより具体的な形を得る。

$$\sigma_{b2}(\phi|\theta) = \pi k_1 \sin^2\phi \frac{k_2^4}{|\Delta(q_1)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_x(q_1 - p - \lambda_x)|^2 |G_x(\lambda_x)|^2 \mathcal{I}_a(\lambda_x; q_1|p) d\lambda_x \tag{56}$$

$$\mathcal{I}_a(\lambda_x; q_1|p) = \iint_{-\infty}^{\infty} |G_z(\lambda_{1z})|^2 |G_z(\lambda_{2z})|^2 |S_{a2}(q_1 - \lambda_x; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}) + S_{a2}(p + \lambda_x; \lambda_{2z}, \lambda_{1z})|^2 d\lambda_{1z} d\lambda_{2z} \tag{57}$$

$$\sigma_{f2}(\phi|\theta) = \pi \frac{k_3^2}{k_1} \sin^2\phi \frac{k_2^4}{|\Delta(q_1)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_x(q_3 - p - \lambda_x)|^2 |G_x(\lambda_x)|^2 \mathcal{I}_c(\lambda_x; q_3|p) d\lambda_x \tag{58}$$

$$\mathcal{I}_c(\lambda_x; q_3|p) = \iint_{-\infty}^{\infty} |G_z(\lambda_{1z})|^2 |G_z(\lambda_{2z})|^2 |S_{c2}(q_3 - \lambda_x; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}) + S_{c2}(p + \lambda_x; \lambda_{2z}, \lambda_{1z})|^2 d\lambda_{1z} d\lambda_{2z} \tag{59}$$

$$S_{a2}(\lambda; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}) = \frac{k_2^2}{\Delta(\lambda)} \hat{S}_{a2}(\lambda; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}) \tag{60}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{a2}(\lambda; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}) = {} & \{\bar{\beta}_2(q_1) - \beta_3(q_1)\} f_1(\lambda| - \lambda_{1z} - \lambda_{2z} + \bar{\beta}_2(q_1), \lambda_{1z}) e^{i\bar{\beta}_2(q_1)l} \\ & + \{\bar{\beta}_2(q_1) + \beta_3(q_1)\} f_1(\lambda| - \lambda_{1z} - \lambda_{2z} - \bar{\beta}_2(q_1), \lambda_{1z}) e^{-i\bar{\beta}_2(q_1)l} \end{aligned} \tag{61}$$

$$S_{c2}(\lambda; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}) = \frac{k_2^2}{\Delta(\lambda)} \hat{S}_{c2}(\lambda; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}) \tag{62}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{c2}(\lambda; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}) = {} & \{\bar{\beta}_2(q_3) + \beta_3(q_3)\} f_1(\lambda| - \lambda_{1z} - \lambda_{2z} + \bar{\beta}_2(q_3), \lambda_{1z}) e^{-i\beta_3(q_3)l} \\ & + \{\bar{\beta}_2(q_3) - \beta_3(q_3)\} f_1(\lambda| - \lambda_{1z} - \lambda_{2z} - \bar{\beta}_2(q_3), \lambda_{1z}) e^{-i\beta_3(q_3)l} \end{aligned} \tag{63}$$

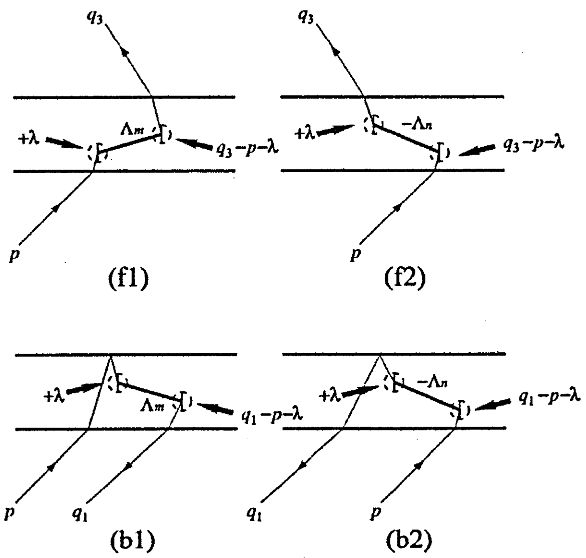


図 5　導波モードを介した'衣を着た'二重散乱による強調散乱のダイアグラム

ウィーナ核の偶関数性 (47) より、S_{a2}, S_{c2} の偶関数性を持つ。

$$S_{a2}(-\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z}) = S_{a2}(\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z}), \quad S_{c2}(-\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z}) = S_{c2}(\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z}) \tag{64}$$

また $p, q_{1,3}$ に関する反転下で不変である。

$$S_{a2}\Big|_{p\to -p} = S_{a2}, \quad S_{a2}\Big|_{q_1\to -q_1} = S_{a2}, \quad S_{c2}\Big|_{p\to -p} = S_{c2}, \quad S_{c2}\Big|_{q_3\to -q_3} = S_{c2} \tag{65}$$

1 次インコヒーレント散乱と比較して 2 次インコヒーレント散乱の散乱過程は複雑である [12]。しかしながら、$\kappa_z \to \infty$ なる特別な一次元系のゆらぎの場合に関しては既に以前の論文 [12] で議論が済んでおり、有限の κ_z の場合もその延長線上のものとして解釈可能である。

膜厚が十分薄い場合 ($k_2 l \ll 4\pi$) は、無摂動時の薄膜が導波モードを持つ (あるいは境界に沿うラティラル波伝搬の寄与が大きい) 場合にはランダム薄膜内部のゆらぎによる'衣を着た' 2 回散乱において、任意の二つの導波モードを励振することで強力なダブルパス効果を生じ、

$$k_j \cos\phi_{j_{mn}} = -p - (\Lambda_m - \Lambda_n) \quad (j = 1, 3) \tag{66}$$

を満たす散乱角 $\phi_{j_{mn}}$ (ただし、$|-p-(\Lambda_m - \Lambda_n)|/k_j < 1$) を中心とする狭い角度範囲において散乱断面積の増大もしくは減少現象を生じさせ得る。ここで、Λ_i ($i = \pm 1, \cdots, \pm N$、$\lambda_{-i} = -\lambda_i$) は無摂動誘電体波路の分散方程式 $\Delta(\lambda)|_{\sigma^2=0} = 0$ を満たす有限個の解である。特に後方散乱 $p = -q_1$ 方向あるいは対称前方散乱 $p = -q_3$ 方向は同じモード $m = n$ を常に取る場合であり顕著なスパイクとなる。これがいわゆる強調散乱である (図 5)。その他の角度 ϕ_{mn} は異なるモード $m \neq n$ を中継する散乱過程の合成であり、随伴強調散乱として微かなスパイクとしてのサテライトピークもしくはディップをもたらす。これらの強調散乱は、導波モードの存在とそれを励振し得るブラッグベクトルを供給する程度にゆらぎの横方向の相関長が十分短いなら、有限の κ_z となる二次元的なゆらぎの場合にも生じ得る。一方膜厚がある程度厚い場合 ($k_2 l > 4\pi$) は、条件 $\kappa_z/l > 1$ [16] が満たされる程度にゆらぎの体積散乱体による散乱指向性が高ければ、$\kappa_z \to \infty$ なる特別な一次元系のゆらぎにおいて見い出した'緩やかな強調散乱'が生じ得る (図 6)。ゆらぎの横方向の相関長が十分短く $|G_x(-2p)|^2$ が小さくない時、$p \to p+0 \to p+(-2p) = -p = q_1, q_3$ と $p \to p+(-2p) \to -p+0 = -p = q_1, q_3$ とのダブルパス効果により、後方散乱あるいは対称前方散乱方向を中心とする広い角度範囲に渡る散乱ピークを生じるものと予想される。

3.4　2 次インコヒーレント散乱断面積の評価式

既に示した 2 次インコヒーレント散乱断面積の表式は三重積分からなる。その演算強度は $O(N_x N_z^2)$ (N_x, N_z は横方向と縦方向のゆらぎに対する数値積分の分割数) 程度で一般には巨大になる。積分核はスペクトル密度を

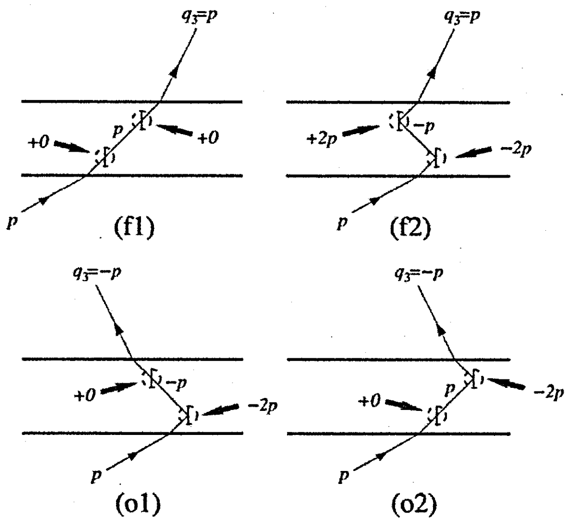


図 6　'衣を着た' 二重散乱による緩やかな強調散乱のダイアグラム

含むため、その数値積分上の帯域は大まかにはゆらぎの相関長 κ_x, κ_z で定まる。明らかに等方ゆらぎ $\kappa_x = \kappa_z$ かつ強調散乱を生じ得る程度に相関長が短い場合が最も幅広な帯域となるが、その意味では $\kappa_x \ll \kappa_z$ なる非等方ゆらぎでは N_z は十分少なくて済むようにも思える。実際にはゆらぎのスペクトル幅もさることながら、薄膜の厚み自体による有限領域に局在するコヒーレント平面波のスペクトル及びそれから派生する形の外部領域でのインコヒーレント波のスペクトルを記述する積分核の本体 S_{a2}, S_{c2} の振舞いも考慮しなければならない。S_{a2}, S_{c2} で縦方向のゆらぎに関連する因子は f_1 であり、これは薄膜内部の 1 次インコヒーレント波のスペクトルである F_1 の主要な構成要素である。f_1 の内蔵関数 $Q_0, Q^{(\pm)}$ は sinc 関数が主要項であり、これは一般論としては膜厚がある程度厚い場合 $(k_2 l > 4\pi)$ は、局在する振動関数であるため、数値積分的な意味での収束性は良好とは言えない。これとは独立に、横方向のゆらぎに関連する因子として共振因子 Δ を係数的に持つが、こちらは薄膜が導波モードを持つ場合はそれに対応する鋭いスパイクを示す振幅特性を備える。例えば具体的に、非等方ガウス型スペクトル

$$|G_x(\lambda)|^2 = \frac{\sigma\kappa_x}{2\sqrt{\pi}} e^{-\{(\kappa_x\lambda_x)^2/4}, \quad |G_z(\lambda)|^2 = \frac{\sigma\kappa_z}{2\sqrt{\pi}} e^{-\{(\kappa_z\lambda_z)^2/4} \tag{67}$$

と He-Ne レーザー入射 $(\Lambda = 0.6328\mu\mathrm{m})$ に対して次の三種類の薄膜系

$$\begin{array}{ll} \text{薄膜 (I)} & \epsilon_1 = \epsilon_3 = 1(\mathrm{air}), \bar{\epsilon}_2 = 2.25(\mathrm{glass}) \\ \text{薄膜 (II)} & \epsilon_1 = \bar{\epsilon}_2 = \epsilon_3 = 1(\mathrm{air}) \\ \text{薄膜 (III)} & \epsilon_1 = 1(\mathrm{air}), \bar{\epsilon}_2 = 6.7(\mathrm{SiC}), \epsilon_3 = 11.8(\mathrm{Si}) \end{array} \tag{68}$$

を想定し、薄膜に関するパラメータは共通に

$$l = 0.75, 10\mu\mathrm{m},\ \sigma^2 = 10^{-4},\ \kappa_x = 0.1\mu\mathrm{m}, \kappa_z = 10\mu\mathrm{m} \tag{69}$$

とした系に対し、共振因子 $k_2^2/|\Delta(\lambda)|$ を図 7 に示す。薄膜 (I) は $0 < \lambda < k_1$ では薄膜内部の多重反射によるリップルを持つ。$k_1 < \lambda < k_2 = 1.5k_1$ の領域に導波モードに対応するスパイクを持ち、その個数は膜厚が厚くなると増加するがそのピーク値もしくは Q 値は減少する。$l = 0.75\mu\mathrm{m}$ では $N = 3$、$l = 10\mu\mathrm{m}$ では $N = 35$ である。ピーク値に関しては後者は前者に比べて 1/10 程度に減少している。薄膜 (I) は $\lambda = k_1$ で非常に鋭い唯一のスパイクを持ち、膜厚の依存性はほとんど見られない。これは境界 $z = 0, l$ に沿って伝搬するラティラル波の存在を示唆している。ラティラル波の影響は、境界の上下の媒質の誘電率差が少ない程顕著になり、また薄膜厚さに依存しない。実際、スパイクの鋭さがそれを示している。薄膜 (III) も薄膜 (I) と同じく $0 < \lambda < k_1$ では薄膜内部の多重反射によるリップルを持つ。この薄膜は無摂動時には導波モードを持たないためゆらぎが存在する場合ももちろん導波モードは持たない。しかしながら、$k_1 < \lambda < k_2 \simeq 2.59k_1$ の領域でも細かいリップルを持ち、膜厚が増すと非常に微細な構造となる。これらの共振因子の性質が主に原因となり、λ_x に関する数値積分においてはその分点数 N_x は必然的に大きくなる。例えば $\kappa_z \to \infty$ なる特別な一次元系のゆらぎの場合では、一次元積分に

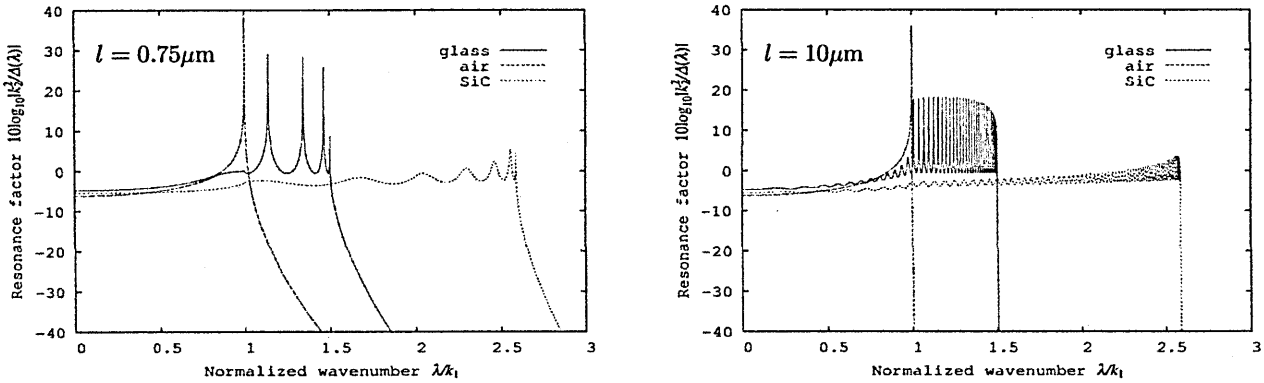


図 7　ランダム薄膜の共振因子 $k_2^2/|\Delta(\lambda)|$ ($l = 0.75\mu$m,1μm,$\sigma^2 = 10^{-4}$,$\kappa_x = 0.1\mu$m,$\kappa_z = 10\mu$m)

もかかわらず N_x の減少すなわち演算強度の低減のためにはスパイク近傍での数値積分区間の細かな分割と制御が必須である。そのような工夫を施してもなお N_x は数千〜数万オーダの量となる。またモードが存在せずとも共振因子が非常に微細な構造を持つ場合は、同様な工夫を必要とする。以上の様々な要因から、三重積分の積分核は数値計算上非常に厄介な性質を持ち、一般論としては膜厚が厚い程、厳しいものになる。

本報告では、共振因子 k^2/Δ が $\lambda_{1z}, \lambda_{2z}$ に関する積分においては関与しないことに着目する。λ_x に関する急激な変化の主要部が共振因子に由来すると仮定し、以下に示す工夫により N_x を減らすこと、すなわち関数 $\mathcal{I}_a(\lambda_x; q_1|p)$,$\mathcal{I}_c(\lambda_x; q_3|p)$ の数値積分での参照を減らすことで演算強度の低減を行う。ここでは $\mathcal{I}_a(\lambda_x; q_1|p)$ の評価に対し二種類のアプローチを導入するが、$\mathcal{I}_c$ については、ほとんど同じ議論であるため省略する。なお簡単のため以下の議論では、

$$\epsilon_1 \leq \bar{\epsilon}_2, \epsilon_1 \leq \epsilon_3 \quad \longleftrightarrow k_1 \leq k_2, k_1 \leq k_3 \tag{70}$$

を前提としておくが、(68) はこれを満たしている。

評価法 (その 1)　$\mathcal{I}_a(\lambda_x; q_1|p)$ の被積分関数を展開する。

$$\begin{aligned}
& |S_{a2}(q_1 - \lambda_x; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}) + S_{a2}(p + \lambda_x; \lambda_{2z}, \lambda_{1z})|^2 \\
= \; & |S_{a2}(q_1 - \lambda_x; \lambda_{1z}, \lambda_{2z})|^2 + |S_{a2}(p + \lambda_x; \lambda_{2z}, \lambda_{1z})|^2 \\
& + S_{a2}(q_1 - \lambda_x; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}) S^*_{a2}(p + \lambda_x; \lambda_{2z}, \lambda_{1z}) + S^*_{a2}(q_1 - \lambda_x; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}) S_{a2}(p + \lambda_x; \lambda_{2z}, \lambda_{1z})
\end{aligned}$$

よって $\mathcal{I}_a(\lambda_x; q_1|p)$ は三つに分解できる。

$$\mathcal{I}_a(\lambda_x; q_1|p) = g_{a2}(q_1 - \lambda_x) + g_{a2}(p + \lambda_x) + 2Re\; g_{Ma2}(b_- + \lambda_x; q_1|p) \tag{71}$$

$$g_{a2}(\lambda) = \iint_{-\infty}^{\infty} |G_z(\lambda_{1z})|^2 |G_z(\lambda_{2z})|^2 |S_{a2}(\lambda; \lambda_{1z}, \lambda_{2z})|^2 d\lambda_{1z} d\lambda_{2z} \tag{72}$$

$$g_{Ma2}(\lambda; q_1|p) = \iint_{-\infty}^{\infty} |G_z(\lambda_{1z})|^2 |G_z(\lambda_{2z})|^2 S_{Ma}(\lambda; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}; q_1|p) d\lambda_{1z} d\lambda_{2z} \tag{73}$$

$$S_{Ma}(\lambda; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}; q_1|p) = S_{a2}(b_+ - \lambda; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}) S^*_{a2}(b_+ + \lambda; \lambda_{2z}, \lambda_{1z}) \tag{74}$$

$$b_\pm \equiv \frac{p \pm q_1}{2} \tag{75}$$

S_{a2} に関する偶関数性から

$$g_{a2}(-\lambda_x) = g_{a2}(\lambda_x) \tag{76}$$

が成り立つ。また、

$$g_{Ma2}(-\lambda; q_1|p) = \iint_{-\infty}^{\infty} |G_z(\lambda_{1z})|^2 |G_z(\lambda_{2z})|^2 S_{Ma}(-\lambda; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}; q_1|p) d\lambda_{1z} d\lambda_{2z}$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_{-\infty}^{\infty} |G_z(\lambda_{1z})|^2 |G_z(\lambda_{2z})|^2 S_{a2}(b_+ + \lambda; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}) S^*_{a2}(b_+ - \lambda; \lambda_{2z}, \lambda_{1z}) d\lambda_{1z} d\lambda_{2z} \\
&= \left[\iint_{-\infty}^{\infty} |G_z(\lambda_{1z})|^2 |G_z(\lambda_{2z})|^2 S^*_{a2}(b_+ + \lambda; \lambda_{1z}, \lambda_{2z}) S_{a2}(b_+ - \lambda; \lambda_{2z}, \lambda_{1z}) d\lambda_{1z} d\lambda_{2z} \right]^* \\
&= g^*_{Ma2}(\lambda; q_1|p)
\end{aligned}
$$

より、

$$
Re\ g_{Ma2}(-\lambda; q_1|p) = Re\ g_{Ma2}(\lambda; q_1|p) \tag{77}
$$

が成り立つ。更には同時反転 $p \to -p, q_1 \to -q_1$ に対して

$$
g_{Ma2}(\lambda; -q_1|-p) = g_{Ma2}(\lambda; q_1|p) \tag{78}
$$

も成り立つ。これらの性質から $b_+ \to |b_+|$ なる置き換えが常に可能である。故に、$b_+, \lambda \geq 0$ で求めれば十分である。先の図 2 で具体的に示したように、共振因子 k^2/Δ はその引数如何によって振舞いが大きく異なるが、大別すると'衣を着た'伝搬因子 $\bar{\beta}_2(\lambda)$ における $0 \leq \lambda < k_2$ か $k_2 < \lambda$ で区別が必要である。前者は薄膜内部で伝搬波動となり、多重反射及び導波モードの存在領域である。この領域では更に $0 \leq \lambda < k_1$ と $\lambda > k_1$ で区別するが、に $0 \leq \lambda < k_1$ では共振因子 $k_2^2/|\Delta|$ は比較的緩やかなリップルを、$\lambda > k_1$ では共振因子 $k_2^2/|\Delta|$ はスパイクもしくは非常に微細なリップルを持つ。したがって特に $k_1 < \lambda < k_2$ では λ の変化に対し、$|f_1|$ と比較して共振因子 $k_2^2/|\Delta|$ は激しい振動特性を示す。一方後者 $k_2 < \lambda$ は薄膜中でエバネッセント波となる領域であり、共振因子の振幅 $k_2^2/|\Delta|$ は指数関数的に減衰するのに対し $|f_1|$ が指数関数的に増大し、合わせて単調に減衰する量となる。このため、浮動小数点演算においては両者を別々に計算することは精度低下もしくはオーバーフロー (アンダーフロー) を招く。よって、$0 \leq \lambda \leq k_2$ では S_{a2} から共振因子を分離した (61) の $\hat{S}_{a2}$ を、$k_2 < \lambda$ では S_{a2} 自体を評価する。以上を踏まえて $\lambda \geq 0$ を以下のように分類する。

$b_+ \leq k_1$ かつ $k_1 - k_2 \geq 2b_+$

$0 \leq \lambda \leq k_1 - b_+$	$k_1 - b_+ < \lambda < k_1 + b_+$	$k_1 + b_+ \leq \lambda \leq k_2 - b_+$	$k_2 - b_+ < \lambda < k_2 + b_+$
(a)	(a)	(a)	(b)

$b_+ \leq k_1$ かつ $k_1 - k_2 < 2b_+$

$0 \leq \lambda \leq k_1 - b_+$	$k_1 - b_+ < \lambda < k_2 - b_+$	$k_2 - b_+ \leq \lambda \leq k_1 + b_+$	$k_1 + b_+ < \lambda < k_2 + b_+$
(a)	(a)	(a)	(b)

$b_+ > k_1$ かつ $k_2 - k_1 \geq 2b_+$

$0 \leq \lambda \leq -k_1 + b_+$	$-k_1 + b_+ < \lambda < k_1 + b_+$	$k_1 + b_+ \leq \lambda \leq k_2 - b_+$	$k_2 - b_+ < \lambda < k_2 + b_+$
(a)	(a)	(b)	(b)

$b_+ > k_1$ かつ $k_1 + k_2 > 2b_+ > k_2 - k_1$

$0 \leq \lambda \leq -k_1 + b_+$	$-k_1 + b_+ < \lambda < k_2 - b_+$	$k_2 - b_+ \leq \lambda \leq k_1 + b_+$	$k_1 + b_+ < \lambda < k_2 + b_+$
(a)	(a)	(b)	(b)

$b_+ > k_1$ かつ $k_1 + k_2 \leq 2b_+$

$0 \leq \lambda \leq k_2 - b_+$	$k_2 - b_+ < \lambda < -k_1 + b_+$	$-k_1 + b_+ \leq \lambda \leq k_1 + b_+$	$k_1 + b_+ < \lambda < k_2 + b_+$
(a)	(b)	(b)	(b)

もしくは

$$
k_2 + b_+ \leq \lambda \Longrightarrow \text{(c)}
$$

ただし、$2\bar{\epsilon}_2 > \epsilon_1 + \epsilon_3$ (i.e. $2k_2 > k_1 + k_3$) を仮定している。分類 (a),(b),(c) では g_{Ma2} の積分核 S_{Ma} を以下の

ように扱う。

$$S_{Ma}(\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z};q_1|p) = \frac{k_2^4}{\Delta(b_+-\lambda)\Delta^*(b_++\lambda)}\hat{S}_{a2}(b_+-\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z})\hat{S}^*_{a2}(b_++\lambda;\lambda_{2z},\lambda_{1z}) \quad \text{(a)}$$

$$S_{Ma}(\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z};q_1|p) = \frac{k_2^2}{\Delta(b_++\lambda)}S_{a2}(b_+-\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z})\hat{S}^*_{a2}(b_++\lambda;\lambda_{2z},\lambda_{1z}) \quad \text{(b)}$$

$$S_{Ma}(\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z};q_1|p) = S_{a2}(b_+-\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z})S^*_{a2}(b_++\lambda;\lambda_{2z},\lambda_{1z}) \quad \text{(c)}$$

よって、分類 (a),(b) においては共振因子は積分の外に係数的に分離し、各々

$$g_{Ma2}(\lambda;q_1|p) = \frac{k_2^4}{\Delta(b_+-\lambda)\Delta^*(b_++\lambda)}\hat{g}_{Ma2}(\lambda;q_1|p) \tag{79}$$

$$\hat{g}_{Ma2}(\lambda;q_1|p) = \iint_{-\infty}^{\infty}|G_z(\lambda_{1z})|^2|G_z(\lambda_{2z})|^2\hat{S}_{a2}(b_+-\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z})\hat{S}^*_{a2}(b_++\lambda;\lambda_{2z},\lambda_{1z})d\lambda_{1z}d\lambda_{2z} \tag{80}$$

あるいは

$$g_{Ma2}(\lambda;q_1|p) = \frac{k_2^2}{\Delta(b_++\lambda)}\hat{g}_{Ma2}(\lambda;q_1|p) \tag{81}$$

$$\hat{g}_{Ma2}(\lambda;q_1|p) = \iint_{-\infty}^{\infty}|G_z(\lambda_{1z})|^2|G_z(\lambda_{2z})|^2 S_{a2}(b_+-\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z})\hat{S}^*_{a2}(b_++\lambda;\lambda_{2z},\lambda_{1z})d\lambda_{1z}d\lambda_{2z} \tag{82}$$

とする。g_{a2} については $b_+=0$ とおいた分類で行えばよい。この場合は (a) もしくは (c) のみである。

評価法 (その 2) $\mathcal{I}_a(\lambda_x;q_1|p)$ の被積分関数を展開しないで扱う。

$$\begin{aligned} & |S_{a2}(q_1-\lambda_x;\lambda_{1z},\lambda_{2z})+S_{a2}(p+\lambda_x;\lambda_{2z},\lambda_{1z})|^2 \\ = & |S_{a2}(b_+-(b_-+\lambda_x);\lambda_{1z},\lambda_{2z})+S_{a2}(b_++(b_-+\lambda_x);\lambda_{2z},\lambda_{1z})|^2 \end{aligned}$$

このとき

$$\mathcal{I}_a(\lambda_x;q_1|p) = g'_{a2}(b_-+\lambda_x;q_1|p) \tag{83}$$

$$g'_{a2}(\lambda;q_1|p) = \iint_{-\infty}^{\infty}|G_z(\lambda_{1z})|^2|G_z(\lambda_{2z})|^2|S_{a2}(b_+-\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z})+S_{a2}(b_++\lambda;\lambda_{2z},\lambda_{1z})|^2 d\lambda_{1z}d\lambda_{2z} \tag{84}$$

となるが、反転に関する不変性から

$$g'_{a2}(-\lambda;q_1|p)=g'_{a2}(\lambda;q_1|p),\ g'_{a2}(\lambda;-q_1|-p)=g'_{a2}(\lambda;q_1|p) \tag{85}$$

より b_+ に対し、$|b_+|,\lambda\geq 0$ として求めれておけば十分である。積分核における共振因子の扱いを評価法 (その 1) と同じく分類する必要がある。この場合は対応する (a),(b) は以下のようになる ((c) はそのまま)。

$$\begin{aligned} & |S_{a2}(b_+-\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z})+S_{a2}(b_++\lambda;\lambda_{2z},\lambda_{1z})|^2 \\ = & \frac{k_2^8}{|\Delta(b_+-\lambda)|^2|\Delta(b_++\lambda)|^2}|\hat{S}_{a2}(b_+-\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z})\Delta(b_++\lambda)+\hat{S}_{a2}(b_++\lambda;\lambda_{2z},\lambda_{1z})\Delta(b_+-\lambda)|^2 \quad \text{(a)} \\ = & \frac{k_2^4}{|\Delta(b_+-\lambda)|^2}|\hat{S}_{a2}(b_+-\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z})+k_2^{-2}S_{a2}(b_++\lambda;\lambda_{2z},\lambda_{1z})\Delta(b_+-\lambda)|^2 \quad \text{(b)} \end{aligned}$$

よって、分類 (a),(b) においては共振因子は積分の外に係数的に分離し、各々

$$g'_{a2}(\lambda;q_1|p) = \frac{k_2^8}{|\Delta(b_+-\lambda)\Delta(b_++\lambda)|^2}\hat{g}'_{a2}(\lambda;q_1|p) \tag{86}$$

$$\begin{aligned} \hat{g}'_{a2}(\lambda;q_1|p) = & \iint_{-\infty}^{\infty}|G_z(\lambda_{1z})|^2|G_z(\lambda_{2z})|^2 \\ & \cdot|\hat{S}_{a2}(b_+-\lambda;\lambda_{1z},\lambda_{2z})\Delta(b_++\lambda)+\hat{S}_{a2}(b_++\lambda;\lambda_{2z},\lambda_{1z})\Delta(b_+-\lambda)|^2 d\lambda_{1z}d\lambda_{2z} \end{aligned} \tag{87}$$

あるいは

$$g'_{a2}(\lambda; q_1|p) = \frac{k_2^4}{|\Delta(b_+ + \lambda)|^2}\hat{g}'_{a2}(\lambda; q_1|p) \tag{88}$$

$$\hat{g}'_{a2}(\lambda; q_1|p) = \iint_{-\infty}^{\infty}|G_z(\lambda_{1z})|^2|G_z(\lambda_{2z})|^2 \cdot|\hat{S}_{a2}(b_+ - \lambda; \lambda_{1z}, \lambda_{2z})\Delta(b_+ + \lambda) + k_2^{-2}S_{a2}(b_+ + \lambda; \lambda_{2z}, \lambda_{1z})\Delta(b_+ - \lambda)|^2 d\lambda_{1z}d\lambda_{2z} \tag{89}$$

とする。

3.5　2次インコヒーレント散乱断面積の数値計算上の留意点

評価法その1,2はどちらも一長一短がある。実際には N_x をより少なく扱うためには、計算する薄膜系のパラメータ (種類、厚み、入射角、散乱角等) に応じて個別に選択することになる。これに関しては実際の数値計算のところで述べることにしてここでは全体に関わる留意点について記しておく。

f_1 の実際の計算式　f_1 は積分核 S_{a2}, S_{c2} の主要部をなす重要な因子であり、その表現は既に (31) に示したとおりである。この表現は各項が明解に物理的意味を持つことから理解しやすい [12]。しかしながら、この表現は数学的には正しいものの、そのままコーディングすると $k_2 l$ がある程度大きくなる時、浮動小数点演算に関わる精度上の問題が顕在化することが1次元系の計算から分かっている [10]。これはIEEE-754規格倍精度はおろか四倍精度をもってしても回避不能であるため、もとの行列方程式のクラーメルの公式による表現に戻る必要があった。論文においては頁数制限の都合上省略しているため、一次元系の論文で示した類似手順で導出した 3×3-行列方程式のクラーメルの公式による解表現より f_1 を表す元の表現を示す。

$$f_1(\lambda_x|s,\lambda_z) = \frac{\begin{vmatrix} F_0(p;s) & i\{s+\lambda_z-\beta_1(\lambda_x)\} & -i\{s+\lambda_z+\beta_3(\lambda_x)\}e^{-i(s+\lambda_z)l} \\ F_0(p;-\lambda_z+\bar{\beta}_2(\lambda_x)) & i\{\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\beta_1(\lambda_x)\} & -i\{\bar{\beta}_2(\lambda_x)+\beta_3(\lambda_x)\}e^{-i\bar{\beta}_2(\lambda_x)l} \\ F_0(p;-\lambda_z-\bar{\beta}_2(\lambda_x)) & -i\{\bar{\beta}_2(\lambda_x)+\beta_1(\lambda_x)\} & i\{\bar{\beta}_2(\lambda_x)-\beta_3(\lambda_x)\}e^{i\bar{\beta}_2(\lambda_x)l} \end{vmatrix}}{\{s+\lambda_z-\bar{\beta}_2(\lambda_x)\}\{s+\lambda_z+\bar{\beta}_2(\lambda_x)\}} \tag{90}$$

数値計算にはこれを用いる。

オーバーフロー (アンダーフロー) 回避　f_1 の計算式として (90) を用いて共振因子 Δ との共通因子の削除等を考慮してもなお、個別の指数因子 $e^{\pm 2i\bar{\beta}_2(\lambda_x)l}$ 自体が $\lambda_M < |\lambda_x|$ に対しIEEE-754規格倍精度演算でのオーバーフローもしくはアンダーフローを引き起こす。ここで λ_M はオーバーフローとなる閾値である。この回避としては四倍精度演算を用いる必要がある。しかしながら現在のメジャーなCPUはハードウェア四倍精度演算をサポートしていないため、ソフトフェア四倍精度演算を実装しているコンパイラを用いる必要がある。ソフトフェア四倍精度演算は処理速度が遅いため、これを全ての演算に適用するのは処理時間上の問題がある [10,12]。このようなオーバーフローが問題になるのは $|\lambda_x| > \lambda_M \gg k_2$ の時のみでありそれは先の分類で言えば (c) を用いる場合に限られる (薄膜系如何によっては (b) においても用いる必要がある)。そこで、ランダム薄膜の各パラメータを定めたときに λ_M 予め計算しておき、指数因子 $e^{\pm 2i\bar{\beta}_2(\lambda_x)l}$ の引数がそれを越える場合のみ f_1/Δ の計算において四倍精度演算を適用するようにコーディングする。またこの領域での分点数は極力抑えたものとする。実際には閾値 λ_M は次式を満たすよう数値的に決定する。

$$Im\bar{\beta}_2(\lambda_M) = \frac{\log M}{2l} \tag{91}$$

ここで M はIEEE-754規格倍精度表現での最大値を越えないように余裕を持って確保したある大きな定数である。

4 数値計算

本報告では薄膜 (I) に対しインコヒーレント散乱断面積を計算する。追加する計算パラメータは

$$\theta = 60^\circ,\ M = 1.0 \times 10^{300},\ \triangle_x = 3.4/\kappa_x,\ \triangle_z = 3.4/\kappa_z \tag{92}$$

とする。ここで、$\triangle_x, \triangle_z$ は数値積分の半帯域幅である。また、本報告では薄膜 (I) の計算のみに限定し、パラメータは (69) を用いる。多重繰り込みマスオペレータ m^{ai} は論文 [17] に示した計算データを用いる。

4.1 数値計算上の留意点

数値積分の収束判定等　従来全ての研究において特に明示することはあまりなかった [20] が、数値積分の分点数に関する収束判定は用いる積分公式如何によらず相対誤差による精度保証を施している。ループ回数 j $(j = 0, 1, \cdots)$ に対し与えられた積分区間を 2^j 等分割したときの積分評価値 S_j について、相対誤差 δ に対し

$$|S_j - S_{j-1}| < \delta |S_{j-1}| \tag{93}$$

が成り立つ場合に収束確定値とする。相対誤差で評価する場合、収束に至っていない状態で局所的に誤差条件 (93) を満たす場合があるため、更に最低保証ループ回数 L を設けて $L \leq j$ の条件を付加する必要がある。多くの場合最大ループ回数も設定する必要がある。

$\lambda_{1z}, \lambda_{2z}$ に関する数値積分の処理　一番外側の一次元積分 (56),(58) から内部の $\lambda_{1z}, \lambda_{2z}$ に関する二重積分が呼び出される形となる。二重積分の内側の一次元積分には二重指数型の積分公式 [21] を相対誤差による精度保証付きで用いる。このとき最低ループ回数は $L_1 = 3$、許容相対誤差は $\delta_1 = 10^{-2}$ としている。次に二重積分の外側の一次元積分にはロンバーグ積分公式 [22] を相対誤差による精度保証付きで用いる。同様な相対誤差評価を用いるが、最低ループ回数 L_2 と許容相対誤差 δ_2 は、外部パラメータ λ_x の分類に応じてきめ細かく制御する。一般的には (c) → (b) → (a) の順で要求精度を高くする。ここでは

	(a)	(b)	(c)
L_2	6	4	4
δ_2	10^{-2}	10^{-1}	10^{-1}

(94)

としている。

λ_x に関する積分　本来、一番外側の一次元積分 (56),(58) は前述のように激しく変化し得る共振因子 k^2/Δ により、そのままでは非常に多くの分点数 N_x を要する。しかし、先に述べた工夫により共振因子の影響を取り除けば、二重積分 $\mathcal{I}_{a2}, \mathcal{I}_{c2}$ は比較的緩やかな λ_x の関数であると期待できるから、精度の意味での許容範囲内で十分少ない N_x に対し前処理的に求め、その他の点では補間を行うことで近似評価する。これに関しては別途後述する。そのようにした状態で一番外側の一次元積分 (56),(58) には、再度相対誤差による精度保証を施した二重指数型の積分公式を用いる。このとき最低ループ回数は $L_3 = 3$、許容相対誤差は $\delta = 10^{-4}$ としている。このようにすれば実効的な N_x を小さくできる。分点数の設定は基本的には共振因子 $k^2/|\Delta(\lambda_x)|$ の変化程度に呼応して決定する。具体的には $0 \leq \lambda_x \leq k_1$ では共振因子の $k^2/|\Delta|$ の緩やかなリップルの頂点に対応した点、$k_1 < \lambda_x \leq k_2$ では共振因子の $k^2/|\Delta|$ のスパイクあるいは微細なリップルの頂点等に対応した点、$k_2 < \lambda_x$ では減衰特性を記述できる程度の点間隔とする。例として $\kappa_z = 10\mu\mathrm{m}$ での共振因子から見た離散点の配置を図 8 に示しておく。これらを基本離散点としてあとはその間を必要なだけ等分割するが、評価法その 1 の $g_{M_{a,c}}$ や評価法その 2 については二つの共振因子に対する基本離散点を合わせて生じる小区間に対し、分割パラメータ D を導入して更に必要なだけ等分割する。なお媒質 2 のレーリー波数 k_2 の近傍領域では共振因子の影響を除いても値の対数変化的な増減が見られるため、論文で導入した多重レベル分割に類似のきめ細かい処理を施す必要があり、特にラティラル波のスパイクが非常に鋭くなる薄膜 (II) の計算においてはその正確な記述のため必須となろう。

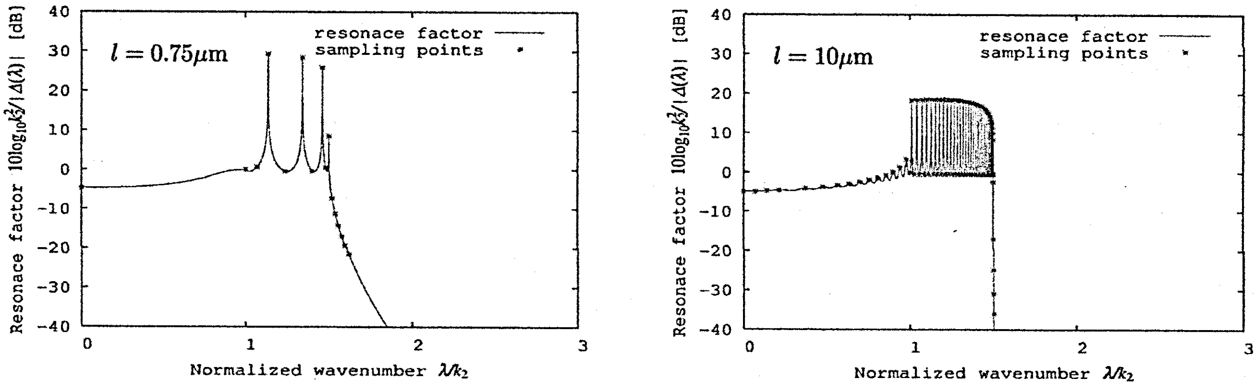


図 8　基本離散点の配置例 ($l = 0.75\mu$m,1μm,$\sigma^2 = 10^{-4}$, $\kappa_x = 0.1\mu$m,$\kappa_z = 10\mu$m)

補間処理　補間には線形補間やスプライン補間等種々ある。今回は、評価法その 1 の $g_{a2}(, g_{c2})$ と評価法その 2 については常に正数であることと、レーリー波数近傍及びエバネッセント領域での振舞いも考慮して対数を取った値に対し線形補間することで任意の値を復元する。評価法その 1 の $g_{M_{a2}}$ に関しても同様に扱う。ただし、こちらは複素数であるため対数を取った後に位相に関する連続性を補償するための後処理 (アンラッピング処理) を施して線形補間を行う必要がある。

4.2　インコヒーレント散乱断面積

計算環境　数値計算は全体の所要時間を低減するため、マルチコア CPU 環境に対しオブジェクトの複数起動で対応する。使用計算機は Core2Quad Q6600,Q6700,Q9450 もしくは Core i7 920 を OC により 3GHz もしくは 3.2GHz 駆動させ、主記憶を 6GB,8GB もしくは 12GB 搭載の自作アセンブリ HPC、あるいは Dual Xeon X5365 3GHz かつ主記憶 32GB 搭載のカスタム計算サーバを用いている。これらの計算機は 4 コア、8 コアないしは疑似 8 コアのシステムになっている。OS はいずれも openSuSE 11.1 x86-64 である。前述のように四倍精度浮動小数点演算が一部に処理に必要となるため、ここではコンパイラとしては Intel Fortran を用いる。

インコヒーレント散乱断面積　総合的な意味での計算時間短縮のため特に 2 次インコヒーレント散乱断面積では、$1^\circ \sim 179^\circ$ を 1° 間隔の計 179 点とし、評価法その 1 で計算する。D は $D = 2 \sim 8$ 程度とする。まず、$l = 0.75\mu$m に対するインコヒーレント散乱断面積を示す。図 9 は $\kappa_z = 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, \infty\mu$m に対する 1 次インコヒーレント散乱断面積 $\sigma_{f1}(\phi|\theta)$,$\sigma_{b1}(\phi|\theta)$ である。膜厚が薄いため反射側で相関長が短い場合を除いては指向性の効果はほとんど見られない。それよりは全体としての値が相関長 κ_z に敏感である。図 10 に対応する 2 次インコヒーレント散乱断面積 $\sigma_{f2}(\phi|\theta)$,$\sigma_{b2}(\phi|\theta)$ を示す。なお、一部の計算では内部の二重積分が精度不足になる散乱角を生じたため、設定 (94) で δ_2 を更に 1/10 にして精度を上げている。全体としての散乱パターンは反射側と透過側で非常に似ている。後方散乱と対称前方散乱方向には強調散乱として鋭いピークが出ている。なお、強調散乱の近傍 $119^\circ \sim 121^\circ$ のみ 0.1° 間隔で計算している ‡。等方ゆらぎに近づくにつれて、反射側では強調散乱ピークはその周囲から見た突出具合が減少している。一方透過側では非常に相関長に敏感に反映し、等方ゆらぎに近づくにつれて強調散乱のピークは消滅する傾向にある。

次に、$l = 10\mu$m に対するインコヒーレント散乱断面積を示す。図 11 は $\kappa_z = 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, \infty\mu$m に対する 1 次インコヒーレント散乱断面積 $\sigma_{f1}(\phi|\theta)$,$\sigma_{b1}(\phi|\theta)$ である。これは論文 [17] の Fig.4 そのものであり、比較のために再掲した。なおこの図は散乱角 $0^\circ \sim 180^\circ$ を 0.18° 間隔とした計 1001 点を計算している。σ_{f1} と σ_{b1} は共振因子 $k_2^4/|\Delta|^2$ によってランダム薄膜中の多重反射によるリップルを持つが、特に $\kappa_z \geq 10\mu$m では指向性因子 $|\hat{a}_1|^2, |\hat{c}_1|^2$ 自体のリップルをも持つ。反射側では鏡面反射 $\phi = \phi_r = 300^\circ$ と後方散乱 $\phi = \phi_b = 240^\circ$ において強調散乱が見られ相関長 κ_z によらず二つの緩やかなピークとして発現している。これらのピークは、指向性因子 $|\hat{a}_1|^2$ が支配的となる $\kappa_z \geq 1\mu$m においてより顕著である。透過側では $\kappa_z \geq 0.2\mu$m では前方散乱 $\phi = \phi_f = 60^\circ$

‡この厚みの場合、随伴強調散乱の鋭いピークやディップが顕在化する [10,12] が、今回はその角度を含めて近傍の詳細な計算は行っていない。

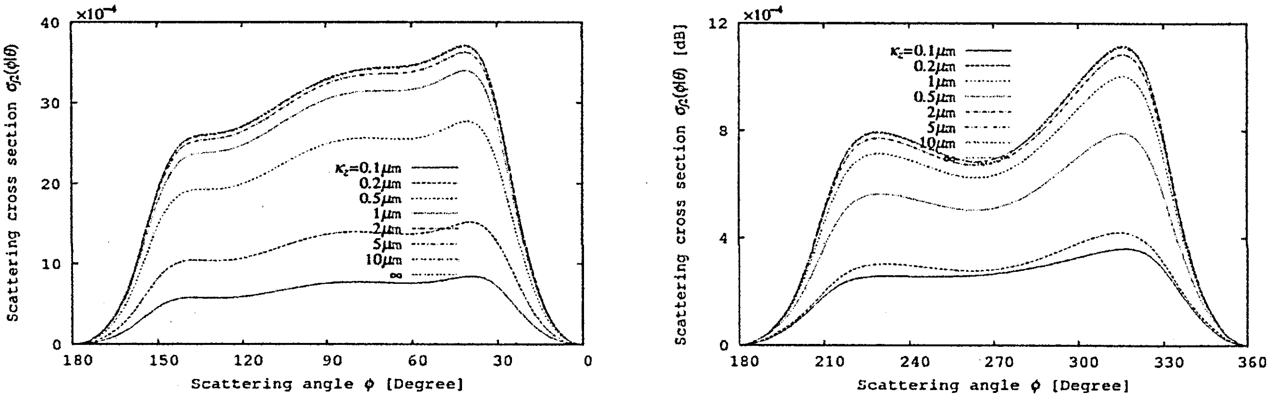


図 9　1 次インコヒーレント散乱断面積 σ_{b1},σ_{f1} ($\theta = 60^\circ$,$l = 0.75\mu$m,$\kappa_x = 0.1\mu$m,$\kappa_z = 0.1,0.2,0.5,1,2,5,10,\infty\mu$m,$\sigma^2 = 10^{-4}$,$\Lambda = 0.6328\mu$m)

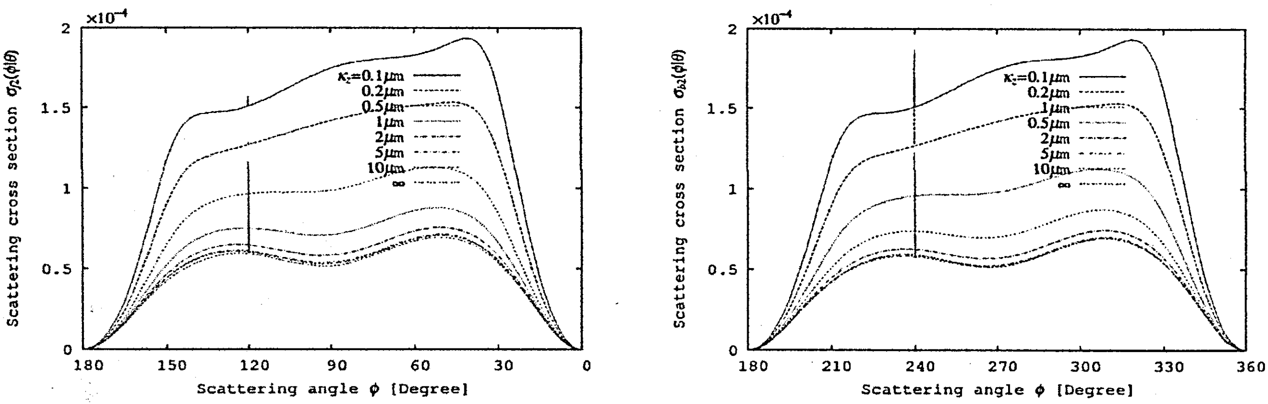


図 10　2 次インコヒーレント散乱断面積 σ_{b2},σ_{f2} ($\theta = 60^\circ$,$l = 0.75\mu$m,$\kappa_x = 0.1\mu$m,$\kappa_z = 0.1,0.2,0.5,1,2,5,10,\infty\mu$m,$\sigma^2 = 10^{-4}$,$\Lambda = 0.6328\mu$m)

と対称前方散乱 $\phi = \phi_o = 120^\circ$ 方向において特徴的な二つの緩やかなピークが見られる。相関長 κ_z が増すにつれて等方ゆらぎから柱状一次元ゆらぎへの連続的な推移がよく分かる。次に図 12 に対応する 2 次インコヒーレント散乱断面積 $\sigma_{f2}(\phi|\theta)$,$\sigma_{b2}(\phi|\theta)$ を示す †。基本的には κ_z が大きい非等方ゆらぎの場合には、' 緩やかな' 強調散乱が同じく四方向に見られるが、一次元系 ($\kappa_z = \infty$) での場合と同じく、後方散乱方向は鏡面反射方向よりも高いピーク値を、あるいは、対称前方散乱方向は前方散乱方向よりも高いピーク値となっている。等方ゆらぎに近付くとき、これらの構造に由来する' 緩やかな' 強調散乱は消滅し、全体として共振因子がもたらすリップルをなぞった広範囲に渡る拡散散乱の様相を呈してゆく。特に反射側は透過側よりも早く' 緩やかな' 強調散乱が消滅することがわかる。要した計算時間は、例えば最も計算強度が大きい図 12 の $\kappa_z = 0.1\mu$m の場合で、プロトタイプコードのオブジェクトに対し Core2 Quad Q6600 3GHz(OC) 6GB メモリの計算機において σ_{b2},σ_{f2} を 179 点計算したところ、各々1044556[sec](290 時間と 15 分 36 秒),1055665[sec](293 時間と 19 分 14 秒) である。N_x,N_z に関しては、一部の計算例では内側で N_z は数万、外側で N_z は数百、N_x は数十〜数百程度となった。今回提案した工夫により三重積分の処理を N_x が本来数万オーダならば、数十〜数千倍高速に処理できることになる。

評価法その 2 に関しては特に今回の計算の最終局面では用いていないが、膜厚が薄く κ_z が大きい場合や薄膜 (II) の場合に有効になりそうである。その他を含めて詳細は今後の検討課題としたい。

†l がある程度大きい場合、複素数値 $g_{M_{o2}}$ の影響は分類 (a) を除いて非常に小さくなることが幾つかのテストの結果分判明している。これはおそらくは $|\lambda_x|$ が大きくなって被積分関数 s_{M_a} が複素数として振動関数的な振舞いとなり積分の結果キャンセルが生じ積分値としては比較的小さな値になるものと考えられる。$l = 10\mu$m の計算ではこの結果を積極的に利用して、総合的な処理時間の低減のためその他の分類 (b),(c) の計算を省略している。

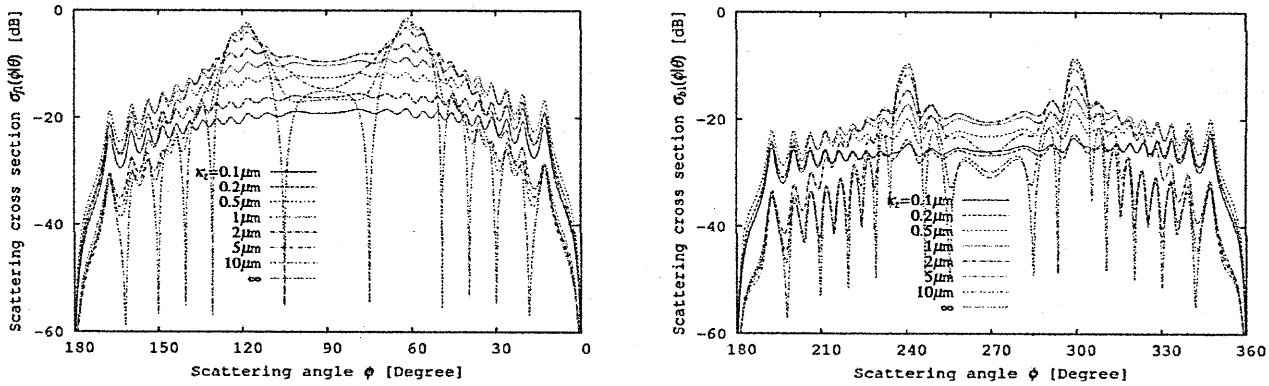


図 11　1 次インコヒーレント散乱断面積 σ_{b1},σ_{f1} ($\theta = 60°$,$l = 10\mu$m,$\kappa_x = 0.1\mu$m,$\kappa_z =$ 0.1,0.2,0.5,1,2,5,10,$\infty\mu$m,$\sigma^2 = 10^{-4}$,$\Lambda = 0.6328\mu$m)

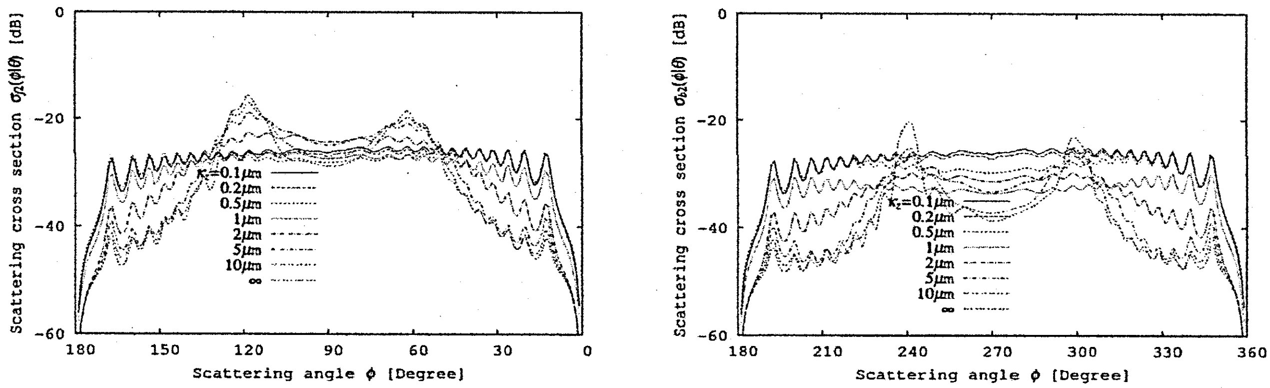


図 12　2 次インコヒーレント散乱断面積 σ_{b2},σ_{f2} ($\theta = 60°$,$l = 10\mu$m,$\kappa_x = 0.1\mu$m,$\kappa_z =$ 0.1,0.2,0.5,1,2,5,10,$\infty\mu$m,$\sigma^2 = 10^{-4}$,$\Lambda = 0.6328\mu$m)

5　むすび

本報告では、非等方 2 次元ランダム薄膜による TE 平面波の反射と透過問題において 2 次インコヒーレント散乱断面積を計算し、強調散乱とゆらぎの相関長に関して議論した。2 次インコヒーレント散乱断面積は三重積分を計算する必要があり、これは膜厚が大なるほどに計算強度が上る。そこで種々の技巧を導入し計算強度の低減を試み、テスト計算において良好な結果を得た。今後は種々のランダム薄膜系に関して計算し、非等方性の散乱特性への影響や光学定理の計算等を行う予定である。また、縦方向のゆらぎに関わる二重積分を高速化することで全体の高速化を検討したい。これらの高速化により三次元ゆらぎの場合の四重積分の計算強度の低減を図りたい。

参考文献

[1] G.H.Brown and J.J.Wolken, *Liquid Crystals and Biological Structures* (New York), 1979.

[2] 吉田貞史、矢嶋弘義, 薄膜・光デバイス, 東京大学出版会, 1994.

[3] C.H.Wu, C.Jacob, X.J.Ning, S.Nishino and P.Pirouz, "Epitaxial growth of 3C-SiC on Si(111) from hexamethyldisilane", *J. Crystal Growth*, **158**, pp.480-490, 1996.

[4] C.J.Oton, Z.Gaburro, M.Ghulinyan, L.Pancheri, P.Bettotti, L.Dan Negro and L.Pavesi, "Scattering rings in optically anisotropic porous silicon", *Appl. Phys. Lett.*, **81**, no.26, pp.4919-4921, 2002.

[5] S.Kassam, A.Duparre, K.Hehl, P.Bussemer and J.Meubert, "Light scattering from the volume of optical thin films:theory and experiment", *Appl. Optics* **31** pp.1304-1331, 1992.

[6] V.G.Gavrilenko, A.V.Aistov and G.V.Jandieri, "Some peculiariteis wave multiple scattering in a statistically anisotropic medium", *Waves in Random Media* **10** 4 pp.435-445, 2000.

[7] H.Ogura N.Takahashi, "Scattering, Radiation and Propagation over Two-dimensional Random Surface - Stochastic Functional Approach -", Progress In Electromagnetics Research PIER, 14 pp.89-189, 1996.

[8] L.Gao and J.Nakayama, "Scattering of a plane wave from a thin film with volume disorder", IEICE Trans. Electron., Vol. E79-C, pp.1327-1333, 1996.

[9] Y.Tamura and J.Nakayama, "Wave reflection and transmission from a thin film with one-dimensional disorder", Waves in Random Media, vol.14, no.3, pp.435-465, 2004.

[10] 田村安彦, 不規則表面とゆらぎのある薄膜による波動の散乱回折理論, 京都工芸繊維大学 博士学位論文, 2005.

[11] Y.Tamura and J.Nakayama, "TE plane wave reflection and transmission from a one-dimensional random slab", IEICE Trans. Electron., Vol. E88-C, 4 pp.713-720, 2005.

[12] Y.Tamura and J.Nakayama, "Enhanced scattering from a thin film with one-dimensional disorder", Waves in Random and Complex Media, Vol.15, no.2, pp.269-295, 2005.

[13] 杉山俊介、田村安彦、中山純一, "一次元揺らぎがある薄膜による TM 平面波の反射と透過", 電子情報通信学会論文誌 C, Vol. J90-C, no.3, March 2007.

[14] Y.Tamura and J.Nakayama, "Scalar plane wave scattering from a thin film with two-dimensional fluctuation", Waves in Random and Complex Media, Vol.18, no.1, pp.269-295, 2008.

[15] Y.Tamura, "TM plane wave reflection and transmission from a one-dimensional random slab", IEICE Trans. Electron., IEICE Trans. Electron., Vol. E91-C, 3 pp.713-720, 2008.

[16] Y.Tamura, "TE plane wave reflection and transmission from a two-dimensional random slab", IEICE Trans. Electron., IEICE Trans. Electron., Vol. E92-C, 1 pp.77-84, 2009.

[17] Y.Tamura and K.Tsutsumi, "Reflection and Transmission of a TE Plane Wave from a Two-dimensional Random Slab – Anisotropic Fluctuation", IEICE Trans. Electron., IEICE Trans. Electron., Vol. E92-C, 12, 2009.

[18] 田村安彦, 二次元非等方ランダム薄膜による TE 平面波の反射と透過 – 傾斜ゆらぎ –, 電磁界理論研究会資料 EMT09-126 pp.15-20, 2009.

[19] 小倉久直, 物理・工学のための確率過程論, コロナ社, 1978.

[20] Y.Tamura, "An improved technique on the stochastic functional approach for randomly rough surface scattering – Numerical-analytical Wiener analysis", *Waves in Random and Complex Media*, Vol.19, no.2, pp.181-215, 2009.

[21] 渡部力、名取亮、小国力 監修, Fortran77 による数値計算ソフトウェア, 丸善, 1989.

[22] 水上孝一、市山寿男、野田松太郎、南原英生、渡辺敏正 共著, コンピュータによる数値計算, 朝倉書店, 1996.

輻射科学研究会資料
RS10-02

信号再生器が配置された光ファイバ伝送路の通信路容量

Channel Capacity of Optical Fiber Transmission Lines Equipped with Signal Regenerators

松本正行、小林大禎、八幡雄介

大阪大学大学院工学研究科

2010年5月20日
於　大阪大学

あらまし 振幅雑音除去の機能をもつ位相保持振幅リミタが配置された光ファイバ伝送路における位相変調信号の情報速度(Information Rate)を数値計算を用いて求める。変調形式として QPSK を想定する。各シンボルが独立に伝送される場合の計算から、振幅リミタを用いることによって非線形位相雑音が低減され、伝送信号電力が大きい場合でも 2bit/symbol に近い情報速度を得ることができるを明らかにする。また、分散によるシンボル間干渉(ISI)が生じ、伝送路が記憶をもつ場合でも、ある程度の ISI であれば高い情報速度が得られることを示す。これは、振幅リミタにおけるシンボル間干渉によって生ずる非線形信号劣化は、系列推定などの信号処理によってある程度補償できることを意味する。

1. まえがき

ファイバ伝送路を伝わる光信号は様々な原因により劣化する。光領域において生ずる主要な信号劣化は、波長分散や偏波分散などによる波形歪みと、損失を補うために用いられる光増幅から発生する雑音による振幅や位相の揺らぎ、に大別できる。信号電力が大きい場合には、ファイバの非線形性がもたらす波形歪みや信号間クロストークも劣化の原因になる。これらの要因のうち、分散や非線形性による波形歪みは、決定論的な信号劣化であり、種々の補償方法(例えば、分散補償ファイバによる分散補償、検波後の電気信号に対する等化や系列推定、非線形性も考慮に入れた逆伝搬補償など)を用いることによって原理的に補償が可能である。特に最近は、コヒーレント受信との組み合わせによる広範囲で柔軟な補償を電気信号領域で行う試みが精力的に進められている [1]。このような補償を行った後に残る信号劣化が雑音による振幅や位相の揺らぎであり、それによって伝送特性(距離や速度)の上限が決まることになる。また、波長分割多重(WDM)伝送方式では、チャネル間の非線形クロストークによる他チャネルのデータパターンに依存した信号揺らぎや波形劣化が、着目するチャネルの信号に加わる。当該チャネルを受信するときに、他チャネルのデータが不明である場合は、このような信号劣化もランダムな雑音として働く。

雑音の累積を抑制し、誤り無く信号を伝送できる距離を伸ばすためには、伝送途中に信号再生器を配置することが有効である。現状の実用システムでは、光信号を電気信号に変換した後に波形整形やタイミング再生を行い、電気信号を再度光信号に変えて送りなおすという方法がとられる。しかしながら、この方法には、電子回路の動作速度によって処理できる光信号の速度が制限される、光/電気変換および電気/光変換の際に不要なエネルギー消費が発生する、強度変調(OOK)信号以外の変調形式には対応が難しい、などの問題点がある。これらの問題の多くは、光信号を光のままで再生処理する方法ー全光信号再生ーを用いることによって解決できることが期待される。最近では、位相変調光信号に対する種々の全光信号再生方式の提案や動作デモンストレーションも数多く報告されている [2,3]。

全光信号再生器が配置された伝送システムの特性解析や性能評価の指標として、これまでは、信号振幅の揺らぎの大きさを示す量である Q 値や、受信時のビット誤り率などが主に用いられてきた。通信システムとしての原理的な性能評価を行うためには、これらの指標よりも、通信路容量を用いることが妥当であ

ると考えられる [4]。そこで、本報告では、全光信号再生器が配置された長距離光ファイバ伝送路の通信路容量(または情報速度)を数値的に計算し、全光信号再生器の有効性を議論する。

なお、一般に信号再生器を用いる場合、各信号シンボルが孤立した状態、すなわち隣接シンボル間の重なりがない状態で信号を再生器に入力する必要がある。このことは、分散のある伝送路では信号再生器の直前で完全な分散補償を行う必要があることを意味する。シンボル間干渉が生じた状態で信号が再生器に入力されると、シンボル間に非線形の相互作用が生じ、データパターンに依存する波形歪みが発生する。このような波形歪みは、受信端においてシンボルごとに符号判定を行う場合には、符号誤りの原因となるが、最尤系列推定などの信号処理を行えばその影響をかなりの程度除去できる可能性がある。伝送路の記憶を考慮に入れた通信路容量(情報速度)を尺度として特性評価を行うことによって、このような修復可能な劣化を除いた特性を明らかにすることができる。

以下の議論においては、信号変調形式として4値の位相変調(QPSK)信号を用いた単一チャネル伝送について考える。また、ファイバ中の四光波混合の飽和現象を利用した位相保持振幅リミタを信号再生器として用いることを想定する。

2. 振幅再生による位相変調信号の非線形位相雑音の低減

近年の大容量基幹系光ファイバ通信システムにおいては、変調形式として従来の OOK 信号に加えて、位相変調(PSK)信号、さらには QAM 信号などのより高度な変調方式の利用が進んでいる [1]。PSK 信号は主として位相雑音によってその品質が劣化するが、伝送後の受信信号の位相雑音の分散は、伝送路の波長分散の影響を無視したモデル(光増幅器間の実効スパン長を L_{eff}、スパン数を M とする)では、近似的に

$$\left\langle \delta\phi^2 \right\rangle = N_a BM/(2P_{sig}) + 2P_{sig} N_a B (\gamma L_{eff})^2 M(M-1)(2M-1)/6 \qquad (1)$$

で表される [5]。なおここでは、位相雑音の原因として、伝送路中に周期的に挿入された光増幅器から発生する自然放出(ASE)雑音を想定している。また、WDM 伝送におけるチャネル間の相互作用による雑音の発生を考慮していない。なお、N_a, B, P_{sig}, およびγ は、光増幅器雑音の電力スペクトル密度、帯域幅、各スパンにおいて伝送ファイバに入力される信号のピーク電力、および、伝送ファイバの非線形係数である。(1)中の第1項は、ASE 雑音のうち信号と直交する位相成分からもたらされる位相雑音である。第2項は、ASE 雑音のうち信号と同位相の成分が作り出す振幅雑音が、伝送路ファイバの非線形性(ここでは自己位相変調効果)を介して位相雑音に変換されたものであり、非線形位相雑音と呼ばれる。伝送距離、すなわちスパン数 M が大きい極限においては(1)の第2項は M の3乗に比例して大きくなる。つまり、長距離伝送では非線形位相雑音が伝送特性の主要な劣化要因となる。

3. ファイバ中の四光波混合の飽和を利用した振幅リミタ

前節で述べた非線形位相雑音は振幅雑音によって誘起されるものであるので、振幅雑音を除去すること

ができれば非線形位相雑音の発生を抑制することができる。本報告では、位相変調信号の振幅雑音を除去する方法として、ファイバ中の四光波混合(FWM)の飽和を利用した振幅リミタを伝送路に挿入することを考える [6]。

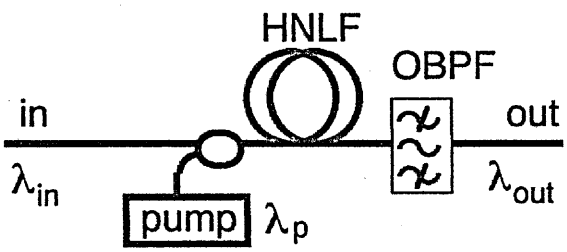
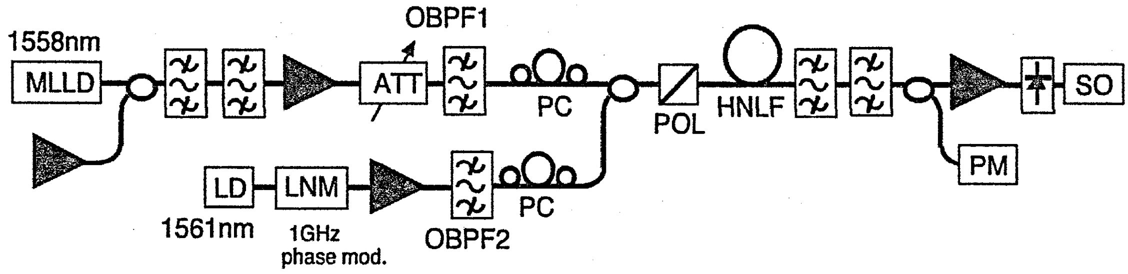


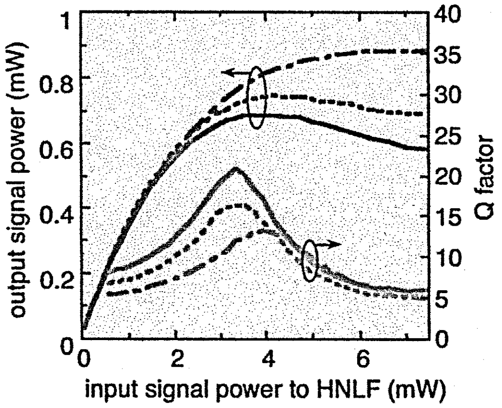
図1 ファイバ中の四光波混合の飽和を利用した振幅リミタ

図1に、ファイバ中の FWM の飽和を利用した振幅リミタの構成図を示す。高非線形ファイバ(HNLF)、ポンプ光源、およびファイバ出力から信号光波長成分のみを取り出す光バンドパスフィルタから構成される。この構成は、単一ポンプ光を用いたパラメトリック増幅器と同じである。この構成において、入力信号電力が小さい場合は、線形的な信号の増幅が生ずるが、信号電力がポンプ光電力と同程度になるとポンプデプレションが生じ、信号とポンプ光間の電力のやりとりの方向が逆転するとともに高次のFWM光成分が発生するため、出力信号電力が飽和する。このような飽和現象は、光増幅器全般や他の非線形効果デバイスにおいても現れるが、ファイバ中の FWM(パラメトリック増幅)の飽和の場合は、(1)関与するファイバ中のKerr非線形効果の応答時間がフェムト秒オーダーと非常に短く、100 ギガシンボル/秒を超えるような高速信号に対してもシンボルごとに飽和が生じる、(2)比較的低い入力信号電力に対して飽和が現れるので、自己位相変調など他の非線形効果が信号に及ぼす影響が小さく、振幅リミティングに伴う信号の位相変化が小さい、という特徴をもつ。すなわち、高速光ファイバ伝送におけるPSK信号パルスの位相保持振幅リミタとして適している。

図2は、振幅リミタの効果を測定する実験系(a)と測定結果の一例(b)である [7]。パルス幅 7.5ps、繰返し周波数 10GHz、のパルス列(中心波長 1558nm)に雑音を加えた後、振幅リミタに入力する。振幅リミタを構成するファイバは高非線形分散シフトファイバであり、ゼロ分散波長 1556nm、分散スロープ $dD/d\lambda=0.026ps/nm^2/km$、非線形係数 γー12/W/km、長さ 1500m である。また、ポンプ光の波長は 1561nm、電力は約 40mW である。図2(b)に、リミタ出力信号電力および出力信号の Q 値と入力信号電力の関係を示す。ここで、Q 値は μ/σ として定義される量である。ただし μ はサンプリングオシロスコープで観測したパルスピーク電力の平均値、σ はパルスピーク電力の標準偏差である。図2(b)から、入力信号電力を大きくすると出力信号電力が飽和すると同時に、適切な入力信号電力において出力信号の振幅揺らぎが抑制される(Q 値が増大する)ことがわかる。



(a)実験系



(b)入出力特性と出力信号の Q 値

図2　ファイバ中の四光波混合の飽和を利用した振幅リミタの特性

4. 位相保持振幅リミタが挿入された伝送系における QPSK 信号の情報速度の数値計算

ここでは、図3に示すような伝送系における QPSK 信号の情報速度を計算する [8]。伝送系は長さ 100km のファイバスパンからなり、N_{span}ごとに振幅リミタが挿入され、それがN_L回繰り返される。伝送ファイバの損失は 0.2dB/km、分散はゼロであるとする。また、増幅器の利得は G=100 (20dB)であり、各増幅器から発生するASE雑音の電力スペクトル密度は$N=n_{sp}h\nu(G-1)$で与えられる。ただし、n_{sp}は増幅器の自然放出係数(数値計算においては、n_{sp}=2 とする。これは、雑音指数 6dB に相当する)、$h\nu$ は光子エネルギーである。伝送ファイバの分散がゼロであるという設定は現実の伝送系とはかけ離れているが、今回の計算では振幅リミタの有無による特性の違いを検討することが主目的であることと、シミュレーションに要する時間を短縮するために、このようなモデルを用いる。また、シンボル間干渉が生じた場合の計算を行う際には、送信機直後に分散値 D_{pre} の分散を挿入する。

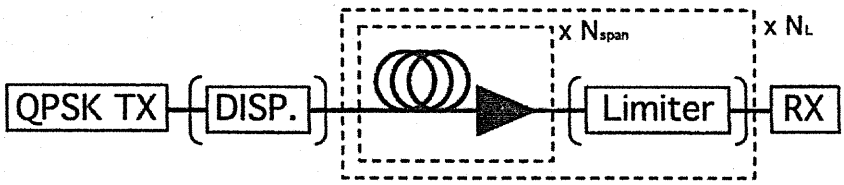


図3　シミュレーションで用いる伝送路モデル

4−1. 情報速度の計算

伝送系への入力シンボル列を$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$、出力サンプル列を$Y=(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$とおくと、入出力間の相互情報量は

$$I = H(Y) - H(Y|X) \tag{2}$$

で与えられる。ここで、nは伝送するシンボル数であり、受信端においては送信シンボル列と同期した時刻において1サンプル/シンボル時間の割合で受信信号を検出するとする。また、H(Y)は受信信号のエントロピー、H(Y｜X)は条件付きエントロピーである。送信アルファベットの選び方およびアルファベットの出現確率分布を変えて相互情報量を最大化した量が通信路容量である。送信アルファベットとその生起確率を固定した場合、相互情報量は情報速度(IR: Information Rate)と呼ばれる [9,10]。本報告では、信号変調形式(つまり送信アルファベットの選び方)を QPSK に固定し、4つのアルファベットの生起確率を等確率(1/4)であるとして情報速度を計算する。また、受信方式としてコヒーレント受信を想定し、Y_i ($i=1,2, \ldots, n$)は複素平面上の連続変数であるとする。

4−2. 伝送路に記憶がない場合の情報速度の計算

まず、伝送路の分散が完全にゼロの場合(図3中の送信機直後の分散がない場合)を考える。この場合、伝送途中でのパルスの時間波形が変化しないとみなせるため、パルスのピーク値の揺らぎのみに着目して情報速度を計算する。すなわち、シンボルごとに1つの複素変数を割当て、光増幅器において増幅されるごとに、分散が $P_N=NB$ に等しい2次元のガウス分布に従う乱数を加え、さらに各ファイバスパンにおいては自己位相変調による位相変化 $\Delta\theta=\gamma P_{sig}L_{eff}$ を各信号振幅に与える。振幅リミタにおいては、図1に示す構成中の HNLF 内のポンプ光、信号光、アイドラ光、および信号側の高次 FWM 光の4波に関する連立非線形常微分方程式 [11] を解いて、リミタ出力における信号振幅を計算する。この手順に従って、受信端における各シンボルの複素振幅を計算し、その分布を求める。シンボル間干渉がなく、各シンボルが独立に伝送される場合、情報速度はシンボルごとの確率密度関数から次のように表される。

$$I = H(Y) - H(Y|X) \tag{3}$$

$$H(Y) = -\int_y P(y)\log P(y)\,dy \tag{4}$$

$$H(Y|X) = -\sum_{x=1}^{4} P(x)\int_y P(y|x)\log P(y|x)\,dy \tag{5}$$

上式中の確率密度関数P(y)は、多数回の試行によって得られる受信信号サンプルのそれぞれを中心とする2次元ガウス分布の重ね合わせによって構成する。すなわち、ℓ回めの試行における受信信号サンプルの実部と虚部がそれぞれ$y_{\ell R}$、$y_{\ell I}$であるとすると、

$$P(y = y_R + iy_I) = \frac{1}{n\sigma^2}\sum_{\ell=1}^{n} K\left(\frac{y_R - y_{\ell R}}{\sigma}, \frac{y_I - y_{\ell I}}{\sigma}\right)、\quad ただし K(u,v) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2}\right) \tag{6}$$

のようにP(y)を表す [12]。なお、σ はカーネル関数の標準偏差である。また、P(y|x)については送信ア

ルファベットが x である場合に限定して(6)と同様に確率密度関数を構成する。

なお、4つの送信アルファベットが等確率で生起し、異なる送信アルファベット x に対する受信信号の分布 $P(y|x)$ が全く重なりをもたない場合は、情報速度は QPSK 信号伝送における最大値 2bit/symbol をとる。異なる x に対する $P(y|x)$ が重なりをもつと、情報速度は 2bit/symbol より小さい値をとる。

4−3. 伝送路に記憶がある場合の情報速度の計算

伝送路の分散などによってパルスの時間幅が広がり、受信信号サンプル間に干渉が生ずる場合、伝送路は記憶を有する伝送路となる。この場合の時間波形の変化は、数値シミュレーションによって求める。ここでは、初期シンボル波形としてデューティー比 50%の RZ 形式のパルスを想定する。従って、各シンボル時間内での複素振幅波形は

$$q(t)=\sqrt{P_{sig}}\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(1+\cos\frac{2\pi t}{T}\right)\right]\exp\left(i\frac{\pi}{2}k\right),\qquad k=1,2,3,\text{または}\,4 \tag{7}$$

のように表される。ここで、t は各シンボル時間の中央を原点とする時間変数、T はシンボル時間である。擬似ランダム変数を用いてシンボル列を生成し、(7)に従って初期波形を定め、数値計算によって受信信号波形を求める。分散の効果は周波数領域において計算し、非線形効果は時間領域において計算する。増幅器から発生する ASE 雑音は乱数を用いて生成し、周波数領域において信号電界に付加する。また、振幅リミタ位置において、前節で述べたような複素振幅変化を波形の瞬時時間ごとに計算し、振幅リミティングの効果を計算に含める。このようにして得られた受信端における複素振幅時間波形をシンボル時間間隔でサンプルし、それらを $Y_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ とする。

記憶のある伝送路では、受信信号サンプルは独立ではないので、サンプルごとの確率密度関数から H(Y)や H(Y | X)を計算することはできない。そこで、ここでは、有限状態機械の考え方を用いた方法にしたがって情報速度を計算する [9,10]。まず、H(Y)は、長い受信サンプル列 $Y^n=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ の確率密度関数 $P(Y^n)$ を用いて

$$H(Y)=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(y^n) \tag{8}$$

のように表される。ここで、$y^n=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ は Y^n の実現値である。なお、上式中の $\log P(y^n)$ は条件付き確率 $P(y_i|y^{i-1})$ を用いて、

$$\log P(y^n)=\sum_{i=1}^{n}\log P(y_i|y^{i-1}) \tag{9}$$

のように表される。次に、$P(y_i|y^{i-1})$ を次のように表す。

$$P(y_i|y^{i-1})=\sum_{s',s}\alpha_{i-1}(s')P(y_i|s)P_{s',s} \tag{10}$$

ここで、s は入力状態 $s=(x_{i-m},x_{i-m+1},\ldots,x_i,\ldots,x_{i+m-1},x_{i+m})$ を表し、s' は s よりも1シンボル時間前の時刻における入力状態 $s'=(x_{i-m-1},x_{i-m},\ldots,x_{i-1},\ldots,x_{i+m-2},x_{i+m-1})$ である。ここで、m は伝送路が有する記

憶の時間幅を表すパラメタであり、受信信号がその時刻の前後 m 個の送信シンボルから受ける影響を考慮に入れることを意味する。また、$P(y_i|s)$ はある入力状態 s のときに出力が y_i となる確率、$P_{s',s}$ は状態が s'から s に遷移する確率である。変調形式として4値の QPSK を用いる場合は、s および s'の状態数は 4^{2m+1} であり、$P_{s',s}$ は、ある状態 s'からは、s'によって決まる4つの状態 s に遷移する場合にのみ 1/4 という値をとる。さらに、(10)中の $\alpha_i(s)$ は、時刻 i における状態が s である確率であり、

$$\alpha_i(s)=\sum_{s'}\alpha_{i-1}(s')P(y_i|s)P_{s',s}\Big/\sum_{s',s}\alpha_{i-1}(s')P(y_i|s)P_{s',s} \tag{11}$$

によって α_i と α_{i-1} が関係づけられる。以上より、まず、長い擬似ランダムシンボル列の波形シミュレーションによって $P(y_i|s)$ を求めておき（3−2節で述べた確率密度関数推定をここでも用いる）、つぎに $P(y_i|y^{i-1})$ と $\alpha_i(s)$ を(10)と(11)を用いて逐次的に計算し、最後に(8)と(9)にしたがって H(Y)を計算する。

また、H(Y|X)は

$$H(Y|X)=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log P(y_i|s) \tag{12}$$

として求めることができる。

5. 情報速度の計算結果

5−1. 伝送路に記憶が無い場合

まず、伝送路に記憶が無い場合の計算結果を示す。伝送ファイバの非線形係数を γ=2/W/km として計算を行った。伝送距離が 1000, 2000,および 3000km の場合の情報速度と SN 比の関係を図4中の太い実線で示す。点線はシャノン限界（2自由度） log(1+SNR) であり、細い実線は伝送ファイバに非線形性がないとした場合の QPSK 信号の情報速度である。なお、図4の横軸の SN 比は、平均信号電力と、伝送系中の全ての光増幅器から生ずる全雑音電力との比である。伝送距離を決めると全雑音電力も決まるので、図4における横軸の値は各伝送ファイバスパン入力信号電力の値に対応する。図4より、信号電力が小さい場合（SN 比が小さい場合）、線形的な雑音の重畳により情報速度が低下することがわかる。一方、信号電力が大きくなると、自己位相変調による非線形位相雑音の影響が顕著になるため、情報速度が低下する。伝送距離が長いほど、同じ SN 比に対応する信号電力が大きくなるので、低い SN 比において情報速度の低下が生ずる。

次に伝送距離 3000km の場合に、5 スパン（500km）ごとに位相保持振幅リミタを挿入した場合の計算を行った。図5に、伝送路入力信号電力を変えて情報速度を計算した結果を示す。振幅リミタを挿入することによって非線形位相雑音が抑制され、信号電力が大きい場合でも情報速度の劣化が小さいことがわかる。リミタを用いない場合と比べて、伝送路入力信号電力を約 10dB 大きくすることができる。

また、伝送距離が 3000km の場合の受信信号のコンスタレーション図を図6に示す。伝送路入力信号電力は 8dBm（SN 比一18dB）である。図6(a)は伝送路ファイバの非線形性がない場合である。伝送路ファイ

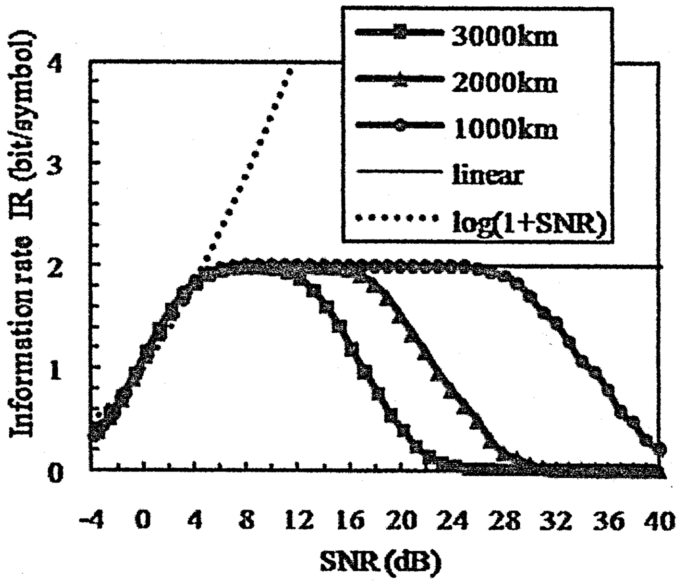


図4 QPSK 伝送における情報速度とSN 比の関係(伝送路に記憶がない場合)

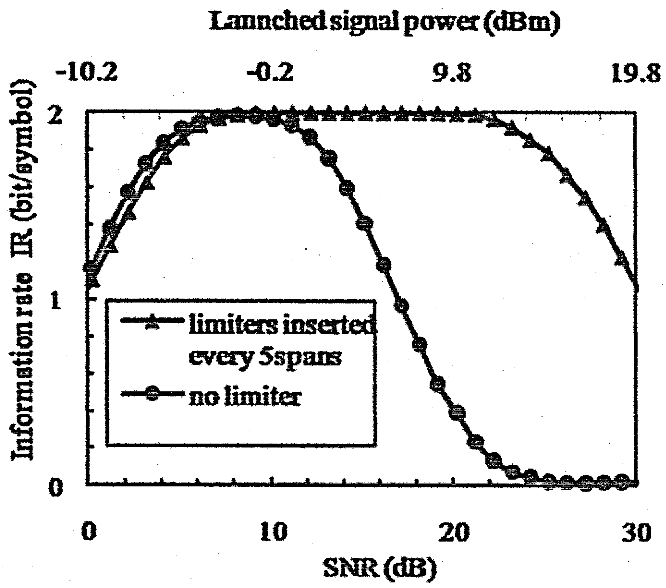


図5 QPSK 伝送における情報速度とSN 比の関係(伝送路に記憶がない場合)
伝送距離 3000km、 ●:リミタを用いない場合、 ▲:500km ごとにリミタを挿入した場合

バの非線形性を考慮に入れる(γ=2/W/km)と、コンスタレーション図は図6(b)のようになる。ただし、振幅リミタは用いていない。この場合、非線形位相雑音による位相回転のために4つのシンボルの区別ができなくなる。一方、伝送路に 5 スパンごとに振幅リミタを挿入すると、受信端でのコンスタレーション図は図 6(c)のようになる。リミタを挿入することによって振幅方向の信号揺らぎが抑制されると同時に、非線形位相雑音による位相変化が低減されることがわかる。

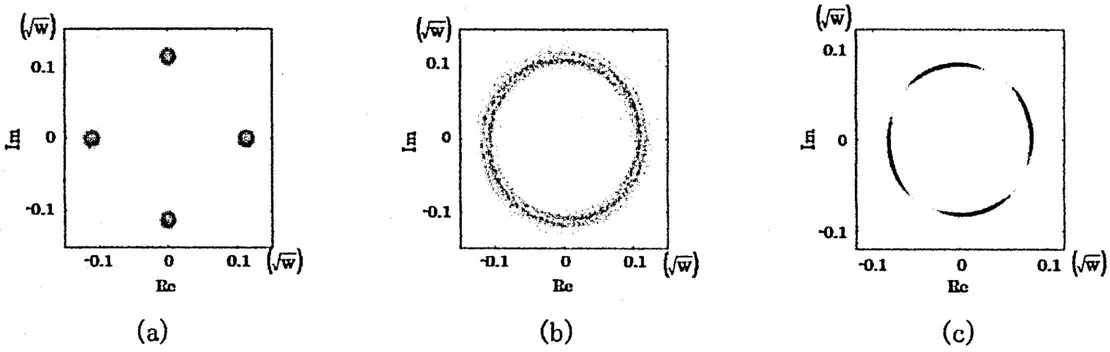


図6 受信信号のコンスタレーション図(伝送距離 3000km)

(a):伝送路に非線形性がない場合。

(b):伝送路に非線形性がある場合。リミタを用いない場合。

(c):伝送路に非線形性がある場合。500km ごとにリミタを挿入した場合。

5−2. 伝送路の記憶を考慮した場合

次に、信号に分散を与えてシンボル間干渉を発生させるとともに、伝送の記憶を考慮に入れて情報速度を計算した。伝送路入力信号電力を 8dBm、伝送距離を 3000km に固定する。図7に、情報速度と送信機直後に信号に与える分散量 D_{pre} の関係を示す。変調形式はデューティー比が 50%の RZ-QPSK、伝送速度は 40Gsymbol/s である。図8中の細い実線と点線は m=0(波形の変形を計算に含めるが、伝送路の記憶は考慮しない場合)、太い実線と点線は m=1 の場合の情報速度である。また、どちらの場合も点線は振幅リミタを用いない場合、実線は 5 スパンごとに振幅リミタを挿入した場合の結果である。

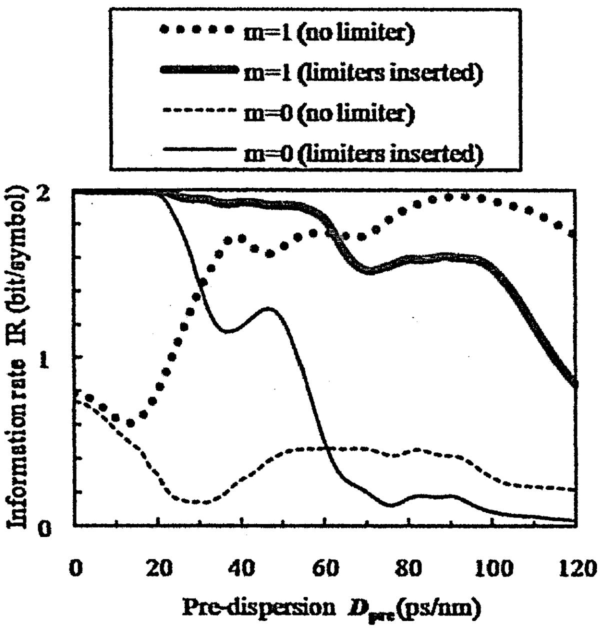


図7 QPSK 信号の情報速度と送信機直後に挿入された分散値の関係

図7より、D_{pre}が約20ps/nmより小さい場合、リミタを用いることによってほぼ2bit/symbolの情報速度を得ることができることがわかる。これは、前節で述べたように、リミタを用いた場合は非線形位相雑音が大幅に低減されるためである。D_{pre}が 20ps/nm より小さい場合は、パルス幅はあまり広がらず符号間干渉が生じないので、m=0 でも m=1 の場合でも情報速度の値はほぼ同じである。D_{pre}が20ps/nmよりも大きくなると、リミタを用いた場合の情報速度は、記憶を考慮せずに(m=0)計算すると大きく低下する。これは、分散によって符号間干渉を起こしたパルス列がリミタに入力されると、リミタの非線形性によるパルス間相互作用が生じて波形が劣化し、サンプルごとの符号判定では送信データを正しく読みとれなくなるためである。しかしながら、m=1 の場合は、D_{pre}が 60ps/nm 程度までは 2bit/symbol に近い情報速度が保たれることがわかる。これは、受信機において適切な系列推定を行えば、リミタにおける非線形波形劣化の影響をかなりの程度除去できることを意味している。

一方、リミタを挿入しない場合においても、記憶を考慮する場合(m=1)、初期分散D_{pre}が大きくなるにつれて情報速度が増大している。これは、分散によってパルス幅が広がり、信号のピーク電力が低下することによって非線形位相雑音が低減するためである。記憶の時間幅すなわちmをさらに大きくすると、より大きな分散値において2bit/symbol に近い情報速度が得られることが予想されるが、その際には送信データを読みとるために必要な信号処理量が大きくなる。

6. まとめ

位相保持型振幅リミタを挿入した伝送路における QPSK 信号伝送シミュレーションを行い、情報速度を計算して伝送システムの性能を評価した。その結果、リミタに入力されるシンボル列に符号間干渉が存在しない場合は、振幅雑音が期待どおりに除去され、非線形位相雑音が大幅に現象し、良好な伝送特性が得られることがわかった。また、符号間干渉のある信号を振幅リミタに入力した場合でも、伝送路の記憶を考慮した場合の情報速度は大きい値を保つことがわかった。つまり、受信機において伝送路の記憶を考慮した信号処理を行うことで、リミタにおける非線形波形劣化の影響を除去できると言える。

今回の計算では、当該シンボルの前後1シンボルずつの範囲の記憶のみを考慮した計算を行ったが、記憶の範囲をさらに広げた計算を行う必要がある。また、伝送路ファイバの分散がゼロであるようなモデルに対してシミュレーションを行ったが、分散と非線形性を同時に含むファイバからなるより実際に近い伝送系における評価を行う必要がある。いずれの場合も、より効率のよい計算手法の開発が望まれる。また、振幅リミタをはじめとする全光信号再生器における非線形波形劣化の影響を除去するための系列推定アルゴリズムの考案も今後の課題である。

参考文献

[1] A. Sano, H. Masuda, T. Kobayashi, M. Fujiwara, K. Horikoshi, E. Yoshida, Y. Miyamoto, M. Matsui, M. Mizoguchi, H. Yamazaki, Y. Sakamaki, and H. Ishii, "69.1-Tb/s (432 x 171-Gb/s) C- and extended L-band transmission over 240 km using PDM-16-QAM modulation and digital

coherent detection," 2010 Optical Fiber Communication Conference, PDPB7 (2010).

[2] K. Croussore and G. Li, "Phase and amplitude regeneration of differential phase-shift keyed signals using phase-sensitive amplification," IEEE J. Selected Topics in Quantum Electron., vol. 14, no. 3, pp. 648-658 (2008).

[3] M. Matsumoto, "All-optical DQPSK signal regeneration using 2R amplitude regenerators," Opt. Express, vol. 18, no. 1, pp. 10-24 (2010).

[4] R. –J. Essiambre, G. Kramer, P. J. Winzer, G. J. Foschini, and B. Goebel, "Capacity limits of optical fiber networks," J. Lightwave Technol., vol. 28, no. 4, pp. 662-701 (2010).

[5] J. P. Gordon and L. F. Mollenauer, "Phase noise in photonic communications systems using linear amplifiers," Opt. Lett., vol. 15, no. 23, pp. 1351-1353 (1990).

[6] M. Matsumoto and K. Sanuki, "Performance improvement of DPSK signal transmission by a phase-preserving amplitude limiter," Opt. Express, vol. 15, no. 13, pp. 8094-8103 (2007).

[7] M. Matsumoto and T. Kamio, "Nonlinear phase noise reduction of DQPSK signals by a phase-preserving amplitude limiter using four-wave mixing in fiber," IEEE J. Selected Topics in Quantum Electron., vol. 14, no. 3, pp. 610-615 (2008).

[8] M. Matsumoto and Y. Yahata, "Information rates of PSK-signal transmission in a system including phase-preserving amplitude limiters," to be presented at 2010 Nonlinear Photonics Topical Meeting, OSA, NME35 (2010).

[9] I. B. Djordjevic, B. Vasic, M. Ivkovic, and I. Gabitov, "Achievable information rates for high-speed long-haul optical transmission," J. Lightwave Technol., vol. 23, no. 11, pp. 3755-3763 (2005).

[10] M. Franceschini, G. Bongiorni, G. Ferrari, R. Raheli, F. Meli, and A. Castoldi, "Fundamental limits of electronic signal processing in direct-detection optical communications," J. Lightwave Technol., vol. 25, no. 7, pp. 1742-1753 (2007).

[11] M. Matsumoto, "Phase noise generation in an amplitude limiter using saturation of a fiber-optic parametric amplifier," Opt. Lett., vol. 33, no. 15, pp. 1638-1640 (2008).

[12] B. W. Silverman, *Density Esitmation for Statics and Data Analysis*, Chapman & Hall/CRC (1998).

輻射科学研究会資料
RS10-03

非可逆移相右手／左手系複合伝送線路と進行波形共振器への応用

Nonreciprocal phase-shift composite right/left handed transmission lines and their application to traveling-wave-resonators

岸本紘幸　　上田哲也
Hiroyuki Kishimoto　　Tetsuya Ueda
京都工芸繊維大学大学院　工芸科学研究科　電子システム工学部門
Dept. of Electronics, Kyoto Institute of Technology

2010 年 5 月 20 日(木)
於 大阪大学 吹田キャンパス

1. まえがき

近年，人工的な構造によって従来に無い新しい電磁気的性質を持つメタマテリアルに関する研究が急速に発展しており，マイクロ波，ミリ波帯から光波領域にわたって，その応用が期待されている．メタマテリアルの一種に右手/左手系複合伝送線路がある[1],[2][3]．筆者らはこれまでに，従来の右手/左手系複合伝送線路において用いられていたマイクロストリップ線路の誘電体基板の代わりに，直流磁界が垂直方向に印加されたフェライト基板を用いることにより，非可逆な伝送特性を有する右手/左手系複合伝送線路を提案した．同構造では，透過係数の大きさに非可逆性が現れることから，アイソレータやサーキュレータなどへの応用が提案された[4],[5],[6]．しかしながら，メタマテリアルの重要な特徴の一つとして，伝搬する電磁波の位相を自由に制御できる点が挙げられる．この点に注目することにより，最近，透過係数の位相特性に非可逆性の現れる非可逆移相右手/左手系複合伝送線路が提案された[7]．同線路は順方向に右手系モードが，逆方向に左手系モードが主モードとして伝搬するという特長を有している．この特長を活かして，線路からの漏れ波放射ビーム方向が入力ポートの選択に依存せず，ブロードサイド方向に対して傾いて同一方向を向く非可逆な漏れ波アンテナを提案した[7]．さらに，伝送線路の終端での反射を積極的に利用することにより，不要なサイドローブを発生することなく，漏れ波放射の利得を改善することが可能であることが数値計算により示された[8]．しかし，文献[7]で具体的に提案された線路の構成方法では，伝搬する波の位相特性に現れる非可逆性だけでなく，振幅特性に現れる非可逆性も無視できない程度に大きくなる問題があった．この問題を解決する方法の一つとして，最近，基板の一部にフェライト棒を用いたマイクロストリップ線路構造が提案された．本報告では同線路の特性を数値計算[9]および試作による実験により示す．また同線路を用いた応用例の一つとして，進行波型共振器を紹介する[10][11]．この共振器は非可逆移相右手/左手系複合伝送線路にみられる一方が右手系モード，もう一方が左手系モードで伝搬し，かつ位相定数の大きさが等しい周波数を動作周波数としている．本来，伝送線路型共振器が共振状態にあるときには，電磁界分布として定在波を有することが知られているが，提案された共振器は，振幅は線路上のいかなる点でも一定であり，かつ一定の位相勾配を有するという，進行波型共振器と類似した特徴を持っている．

2. 可逆な伝送特性を示す右手/左手系複合伝送線路

2.1 等価回路モデル及び分散特性

図1は，可逆な特性を示す従来の右手/左手系複合伝送線路の等価回路モデルである．分布定数線路の直

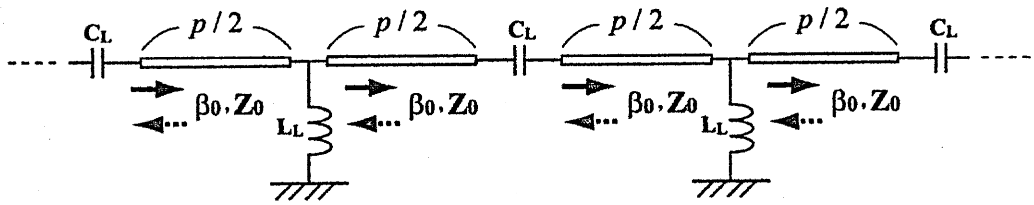


図1　等価回路

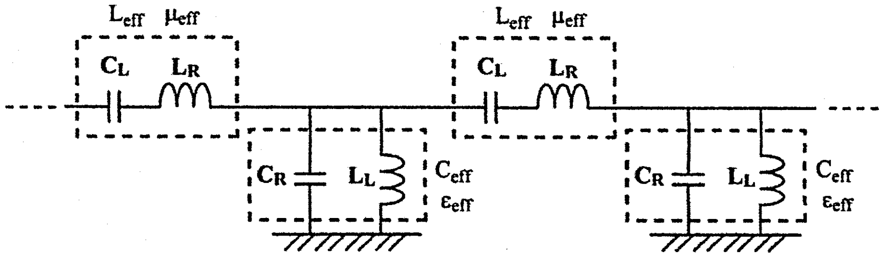


図2　集中定数モデル

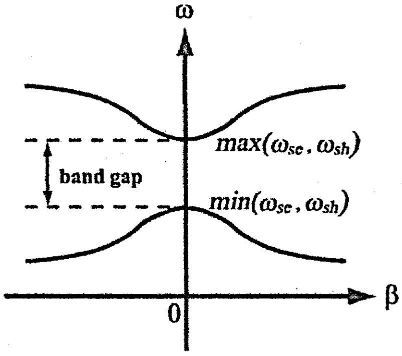


図3　非平衡型分散曲線

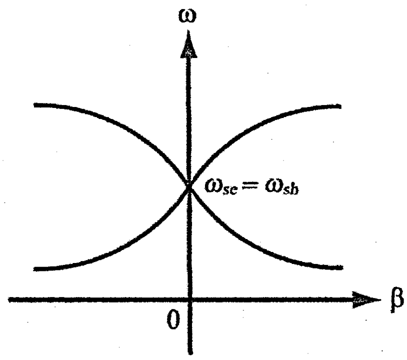


図4　平衡型分散曲線

列枝にキャパシタ C_L を，シャント枝にインダクタ L_L をそれぞれ周期的に装荷している．また，1 周期あたりの長さを p とし，分布定数線路部分の位相定数を β_0，特性インピーダンスを Z_0 とする．同線路を集中定数モデルとして表したものを図 2 に示す．C_R, L_R は伝送線路部分の寄生素子の特性を表す．ここで直列枝の実効インダクタは

$$L_{eff} = L_R\left(1 - \frac{{\omega_{se}}^2}{\omega^2}\right) \tag{1}$$

但し　${\omega_{se}}^2 = \dfrac{1}{C_L L_R}$

で表すことができる．また，シャント枝の実効キャパシタは

$$C_{eff} = C_R\left(1 - \frac{{\omega_{sh}}^2}{\omega^2}\right) \tag{2}$$

但し　${\omega_{sh}}^2 = \dfrac{1}{C_R L_L}$ である

ここで，式(1)は直列共振周波数 ω_{se} の下側の帯域で直列枝の実効インダクタが負となることを表している．構造体の実効透磁率 μ_{eff} は直列枝の実効インダクタ L_{eff} に対応しており，実効インダクタ L_{eff} が負となると実効透磁率 μ_{eff} も負となる．一方，式(2)は，並列共振周波数 ω_{sh} の下側の帯域でシャント枝の実効キャパシタが負となることを表している．構造体の実効誘電率 ϵ_{eff} はシャント枝の実効キャパシタ C_{eff} に対応し

ており，実効キャパシタC_{eff}が負となると実効誘電率ϵ_{eff}も負となる．以上のことから，直列共振周波数および並列共振周波数よりも下側の周波数で実効誘電率および実効透磁率が同時に負となり，その時入力された信号は左手系モードで伝搬する．

次に，同線路の分散関係式を以下に示す．

$$\cos\beta p = \cos\beta_0 p - \frac{1}{2\omega^2 C_L L_L}\cos^2\frac{\beta_0 p}{2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\omega C_L Z_0} + \frac{Z_0}{\omega L_L}\right\}\sin\beta_0 p \tag{3}$$

式(3)中の変数βは右手/左手複合伝送線路の位相定数である．式(3)より導出される分散曲線の模式図を図 3 に示す．図 3 はω_{se}とω_{sh}の値が異なる場合の分散曲線であり，非平衡状態と呼ぶ．非平衡状態での分散曲線はω_{se}とω_{sh}の間の周波数帯において実効誘電率と実効透磁率の符号が異なり，電磁波は伝搬しない禁止帯が存在する．一方，ω_{se}とω_{sh}が同じ値を有する場合を平衡状態と呼び，そのときの分散曲線を図 4 に示す．図 4 より，平衡型分散曲線では非平衡型と異なり，禁止帯が存在しないことが分かる．また平衡状態となる場合，式(1), (2)より$Z_0 = \sqrt{\frac{L_R}{C_R}} = \sqrt{\frac{L_L}{C_L}}$ を満足することから，インピーダンス整合条件を満たしていると言うこともできる．

2. 非可逆移相右手/左手系複合伝送線路

2.1 等価回路モデル及び分散特性

本節では，非可逆移相右手/左手系複合伝送線路の等価回路モデル及び，その分散関係を示す．図 5 は本節で取り扱う非可逆移相右手/左手系複合伝送線路の等価回路モデルである．分布定数線路の直列枝にキャパシタ Cをシャント枝にインダクタ Lをそれぞれ周期的に装荷している．また，1 周期あたりの長さをpとし，一方向に電磁波が伝搬するときの位相定数および特性インピーダンスをそれぞれβ_p, Z_pとし，逆方向に電磁波が伝搬するときの位相定数および特性インピーダンスをそれぞれβ_m, Z_mとする．同線路の分散関係式は

$$\cos\left(\beta - \frac{\Delta\beta}{2}\right)p = \cos\bar{\beta}p - \frac{1}{2\omega^2 C_L L_L}\left\{\left(1-\frac{\Delta Z^2}{4\bar{Z}^2}\right)\cos^2\frac{\bar{\beta}p}{2} + \frac{\Delta Z^2}{4\bar{Z}^2}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\omega C_L \bar{Z}} + \frac{\bar{Z}}{\omega L_L}\left(1-\frac{\Delta Z^2}{4\bar{Z}^2}\right)\right\}\sin\bar{\beta}p \tag{4}$$

と表される．但し

$$\Delta Z = Z_p - Z_m, \bar{Z} = \frac{Z_p + Z_m}{2},$$

$$\Delta\beta = \beta_p - \beta_m, \bar{\beta} = \frac{\beta_p + \beta_m}{2} \tag{5}$$

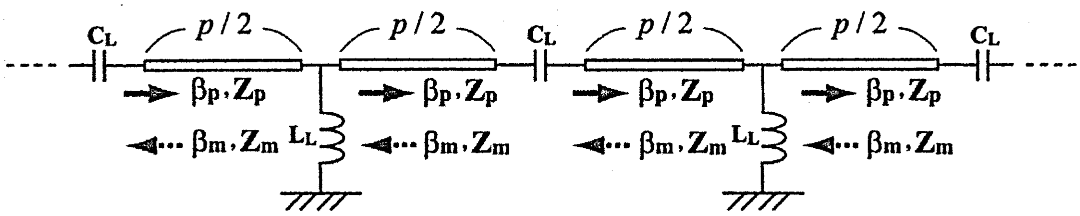


図 5　等価回路

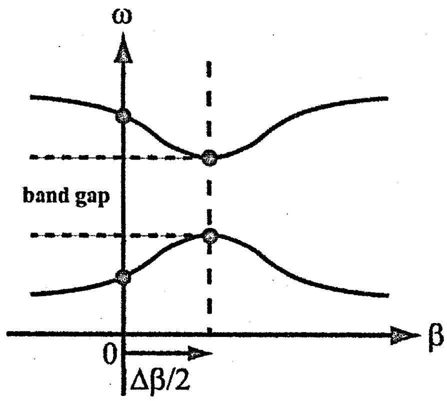


図 6　非可逆な非平衡型分散曲線

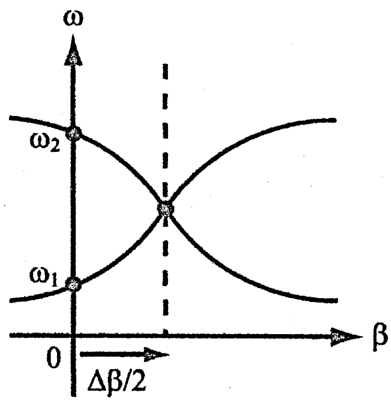


図 7　非可逆な平衡型分散曲線

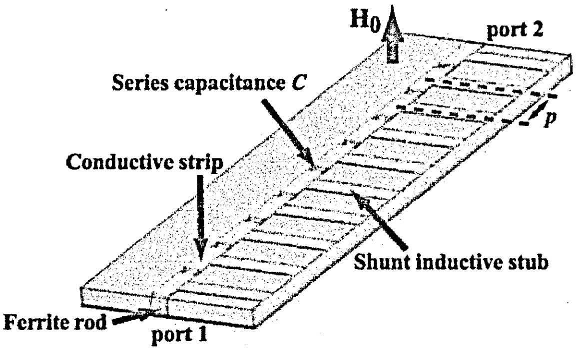
である．式(4)から求められる分散曲線の模式図を図 6 に示す．図 6 はω_{se}とω_{sh}が異なる値を有する非平衡状態の分散曲線である．式(4)の左辺の構造からもわかるように，図 6 は可逆な位相特性を示す図 3 と比べて，対称軸が$\Delta\beta/2$だけ右側にシフトしていることが分かる．次にω_{se}とω_{sh}が同じ値を有する平衡状態の分散曲線を図 7 に示す．図 7 も非平衡状態と同様に対称軸が$\Delta\beta/2$だけ右側にシフトしている．平衡状態となる条件は，インピーダンス整合条件を満たす場合として，$Z_p = \sqrt{\frac{L_L}{C_L}}$ または $Z_m = \sqrt{\frac{L_L}{C_L}}$ のときである．また，分散曲線の接線の傾きが伝送電力の向きを表すことに注意すると図中の 2 本の曲線は，それぞれ伝送電力の方向が正および負の場合を示す．従って，図 7 のω_1からω_2までの周波数帯においては，一方からの信号入力に対して右手系モードが伝搬し，もう一方からの信号入力に対して左手系モードが伝搬することが分かる．

2.2 数値計算

2.2.1　構造

本報告で取り扱う非可逆移相右手/左手系複合伝送線路の構造を図 8 に示す．マイクロストリップ線路の直列枝にコンデンサーC を，並列枝に誘導性短絡スタブを，それぞれ周期的に挿入した構造をしている．また，図 8(b)に示すように，マイクロストリップ線路の基板として，垂直に磁化されたフェライトの角棒が，中央のストリップ導体の下に置かれる形で 2 板の誘電体基板の間に挟まれている．垂直に直流磁界が印加されたフェライト基板マイクロストリップ線路では，エッジガイドモードが主モードとして伝搬する．このエッジガイドモードの電磁界分布は，ストリップ導体の幅方向に対して一方のエッジに指数関数的に偏って集中するため，スタブを非対称に挿入することにより，スタブの挿入された側に電磁界が偏るか否かで伝送特性が大きく変わり，結果として透過係数が非可逆となる．ここで，エッジガイドモードの伝搬定数β_{EG}は次式で表される．

$$\beta_{EG} = \frac{\omega}{C}\sqrt{\epsilon_r \mu_{eff}}$$



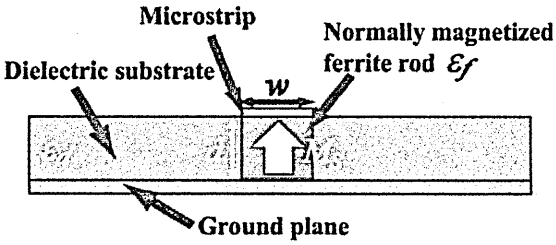


図 8　提案構造　(a) 鳥観図　(b) 断面図

但し

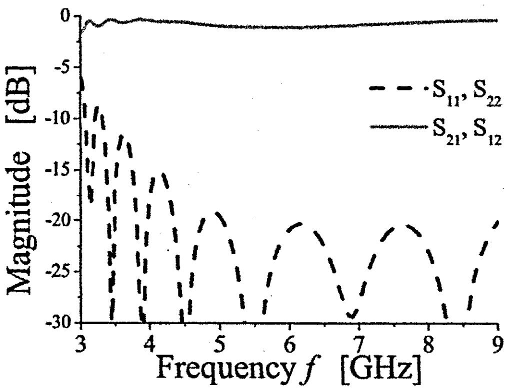
$$\mu_{eff} = \frac{\omega^2 - {\omega_0}^2}{\omega^2 - {\omega_h}^2}$$

$$\omega_h = \gamma\mu_0 H_0\,, \omega_m = \gamma\mu_0 M_S\,, \omega_0 = \sqrt{\omega_h(\omega_h + \omega_m)}$$

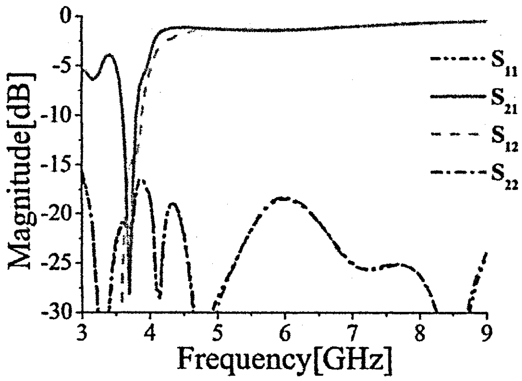
である．以下では動作周波数として，エッジガイドモードの実効透磁率μ_{eff}が負となる周波数$\omega_h < \omega < \omega_0$より十分上側の帯域で動作させるものとする．従って，右手/左手系複合伝送線路を支えるエッジガイドモード自体の実効透磁率μ_{eff}は正で，右手系モードとして動作する．

2.2.2　数値計算結果

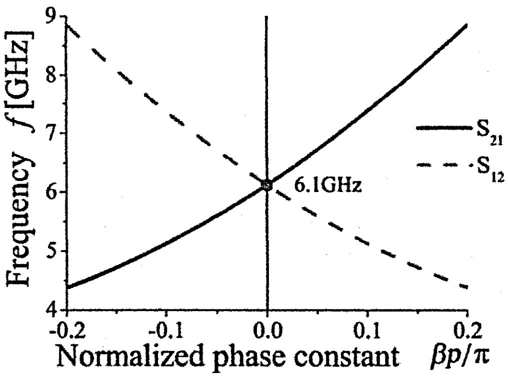
本節では，具体的な構造パラメータの設計手順と，その計算結果を示す．まずフェライトの内部直流磁界を 0 と設定して計算を行う．内部磁界を考えない場合，軟磁性体であるフェライトは誘電体とみなすことができ，マイクロストリップ線路の主モードは準 TEM モードとなる．この可逆性右手/左手系複合伝送線路において，右手系モードの伝搬帯域と左手系モードの伝搬帯域の間にバンドギャップが存在しない平衡型となるように，しかもブロッホインピーダンスが 50Ωとなるように構造パラメータを決定した．また，計算で使用するフェライトの棒の寸法は0.8 mm × 0.8 mm × 30 mmであり，飽和磁化$\mu_0 M_S = 175$ mT，磁気損失$\mu_0 \Delta H = 5$ mTとした．また，使用する誘電体基板の比誘電率 $\epsilon_d = 2.62$，フェライトの比誘電率$\epsilon_f = 15$である．実験で用いるフェライトの低磁界損による伝送損が 4.5 GHz 以下の帯域で顕著に大きくなるため，その影響を受けないように動作周波数を 6 GHz 付近となるよう設計した．単位セルの長さは$p = 3$ mm とし，線路全体の単位セル数は 10 とした．直列容量素子として $C = 0.5$ pF，並列誘導性素子として誘導性短絡スタブのスタブ幅 1.0 mm，スタブ長 4.0 mm とした場合に，禁止帯のない平衡条件をほぼ満たした．以上のパラメータでの計算結果を図 9 に示す．図 9(b)より内部直流磁界が 0 の場合，位相定数が 0 となる周波数は 6.1GHz であることがわかる．また，図 9(a)において 6.1GHz での挿入損は-1.04dB であった．さらに同周波数での反射係数 S_{11} および S_{22} の大きさが-20 dB 以下であり，バンドギャップに対する典型的な反射特性が陽に現れていないことから，ほぼ平衡型右手/左手系複合伝送線路として動作していることが確認



(a)



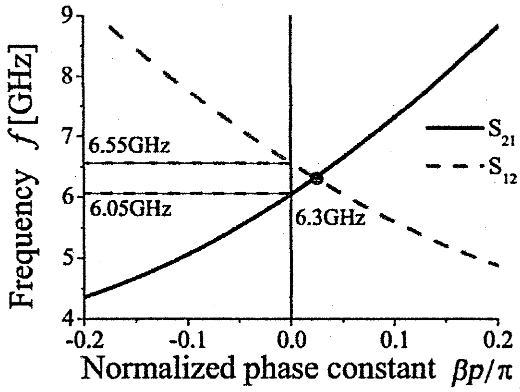
(a)



(b)

図 9　内部磁界 0 とした計算結果

(a)　散乱パラメータの大きさ　(b)　分散曲線



(b)

図 10　内部磁界 50mT とした計算結果

(a)　散乱パラメータの大きさ　(b)　分散曲線

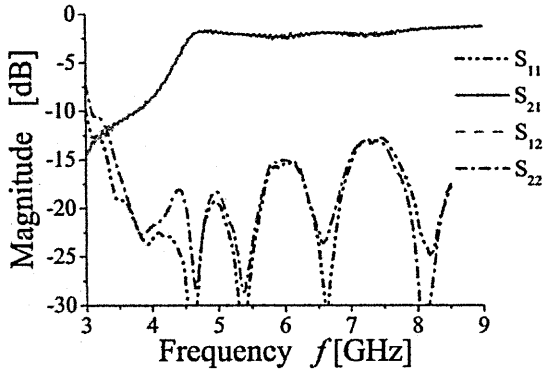
できる.

次に，フェライトの内部直流磁界を 60mT と設定した，非可逆性を有する場合における伝送特性の計算結果を図 10 に示す. 図 10(b)の計算結果において，2 本の分散曲線の交点は周波数を表す縦軸よりも右側にシフトしていることが分かる. つまり，図 7 の概略図で示した様に非可逆な位相特性を有していることが確認でき，6.05GHz から 6.55GHz の周波数帯においては端子 1 からの入力信号に対して右手系モードが伝搬し，端子 2 からの入力信号に対して左手系モードが伝搬することがわかる. また，二本の分散曲線の交点は 6.3GHz であり，この周波数では両ポートから入力した場合の位相定数の大きさおよび符号が等しくなる. さらに図 10(a)より同周波数帯では，透過係数 S_{21} と S_{12} の大きさにおいて非可逆性がほとんど見られないことが確認できる. 6.3GHz での S_{21} と S_{12} の大きさは，共に-1.3dB であり内部直流磁界を 0 として計算した場合とほぼ同じであった. 以上のように，透過係数の位相特性において非可逆性を従来程度維持したまま，振幅特性において非可逆性が無視できるほど小さくなっていることが数値計算結果により確認できた.

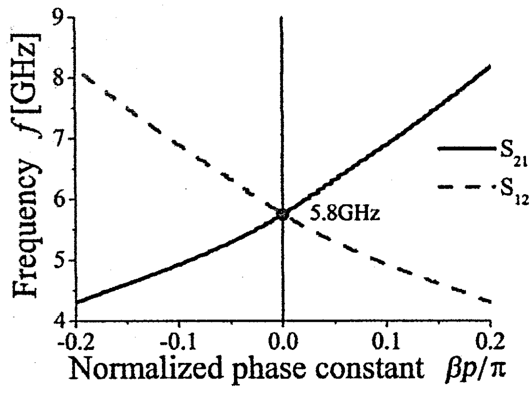
2.3 実験結果

本節では，非可逆移相右手/左手系複合伝送線路を実際に試作し，測定して得られた結果を示す．試作回路用のフェライト棒としてイットリウム・鉄・ガーネット(YIG)多結晶体を，誘電体基板として Rexolite 2200 を使用した．まず，フェライトに直流磁界が印加されていない場合の伝送特性を図 11 に示す．直流磁界が印加されていない場合，既に 2.2 章で述べたように，軟磁性体であるフェライトは誘電体とみなすことができ，伝送特性は可逆となる．図 11(b)より直流磁界を印加しない場合，位相定数が 0 となる周波数は 5.8GHz であることがわかる．図 11(a)において 5.8GHz での透過係数 S_{21} は-2.5 dB であった．また図 11(a)より，同周波数での反射係数 S_{11} および S_{22} の大きさが-15 dB 以下であり，バンドギャップに対する典型的な反射特性が陽に現れていないことから，ほぼ平衡型右手/左手系複合伝送線路として動作していることが確認できる．

次に，フェライト棒に直流磁界が印加された非可逆性を有する場合を考える．直流磁界を印加した場合の透過特性および分散曲線を図 12 に示す．線路の中心付近の外部印加磁界は 150mT であった．図 12(b)の実験結果において，2 本の分散曲線の交点は，周波数を表す縦軸よりも右側にシフトしていることがわかる．ここで，分散曲線の接線の傾きが伝送電力の向きを表すことに注意すると，図中の S_{21} と S_{12} は，それぞれ



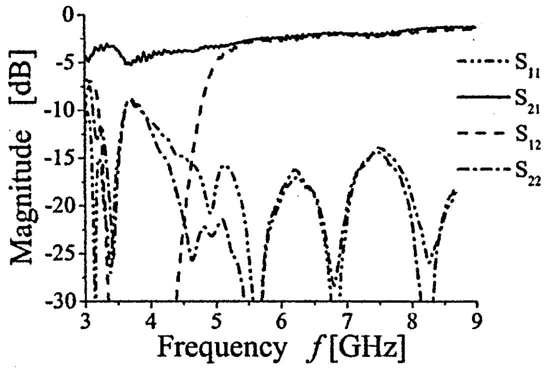
(a)



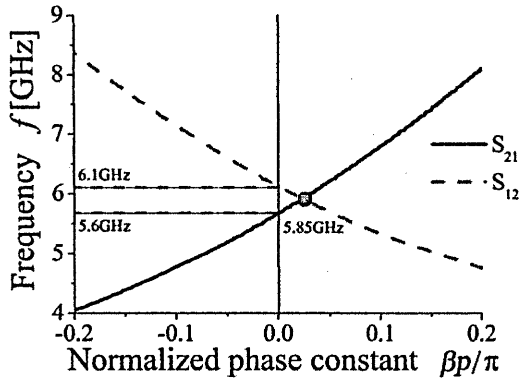
(b)

図 11 磁界を印加していない場合の伝送特性

(a) 散乱パラメータの大きさ (b) 分散曲線



(a)



(b)

図 12 磁界を印加した場合の伝送特性

(a) 散乱パラメータの大きさ (b) 分散曲線

伝送電力の方向が正および負の場合を示す．従って，図 12(b)の実験結果の場合，5.6 GHz から 6.1 GHz の周波数帯においては，端子 1 からの入力信号に対して右手系モードが伝搬し，端子 2 からの入力信号に対して左手系モードが伝搬することがわかる．また，2 本の分散曲線の交点である周波数は 5.85 GHz であった．これは 2.2 章で示した計算結果の帯域幅とほぼ一致していることがわかる．実験結果と計算結果の間の相違は，試作回路の製作誤差のためと考えられる．また図 12(a)より，同周波数帯では，透過係数 S_{21} と S_{12} の大きさにおいて，非可逆性がほとんど見られないことがわかる．5.85 GHz での透過係数 S_{21}, S_{12} はともに -2.5 dB であり，直流磁界が印加されていない場合とほぼ同じであった．以上のように，透過係数の位相特性において非可逆性を残したまま，振幅特性において非可逆性が無視できるほど小さくなっていることが実験結果により確認できた．

3. 進行波型共振器への応用

本章では，第 2 章で示した非可逆移相右手/左手系複合伝送線路を用いた進行波型共振器を構成し，動作特性を数値計算により示す．

3.1 動作原理

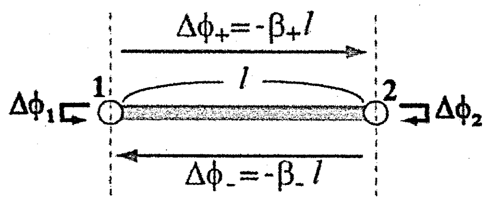


図 13　伝送線路型共振器

本節では，伝送線路型共振器の動作原理を示す．図 13 に有限長さ l の伝送線路型共振器の概略図を示す．β_+は入力信号が順方向に伝搬する場合の位相定数であり，β_-は入力信号が逆方向に伝搬する場合の位相定数である．また，$\Delta\Phi_1$は端点 1 での反射による位相の変化を表し$\Delta\Phi_2$は端点 2 での反射による位相の変化を表す．この伝送線路型共振器の共振条件は

$$\Delta\Phi_+ + \Delta\Phi_- + \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = 2n\pi \tag{5}$$

で表すことができる．但し，n は整数である．ここで，両端の終端条件が短絡の場合，電圧波に対して $\Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2 = \pi$となり，$\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = 2\pi$ となる．一方，両端が開放の場合，電圧波に対して$\Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2 = 0$となる．結局両端が短絡および開放のいずれの場合も$\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = 2n\pi$ $(n = 0,$ もしくは $1)$ となるので，$\Delta\Phi_1$ および $\Delta\Phi_2$を無視して考えることができる．また，$\Delta\Phi_+ = \beta_+ l$ ，$\Delta\Phi_- = \beta_- l$ なので式(2)は

$$(\beta_+ + \beta_-)l = 2n\pi \tag{6}$$

と書き直すことができる．式(6)より，共振周波数が線路長 l に依存しない条件として

$$\beta_+ + \beta_- = 0 \tag{7}$$

を導くことができる．ここで，β_+およびβ_-は，線路内を順方向および逆方向に伝搬する主モードの位相定数を表し，伝送電力の向きに正の値を取るように選んでいる．従って，式(7)は有限長の非可逆伝送線路が共振する条件として，順方向が右手系伝送，逆方向が左手系伝送で，かつ位相定数の大きさが互いに等しいという条件が必要であることを示している．

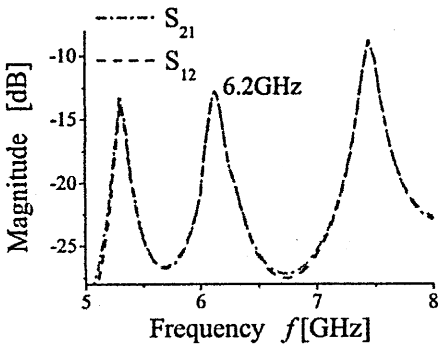


図 14　散乱パラメータの大きさ

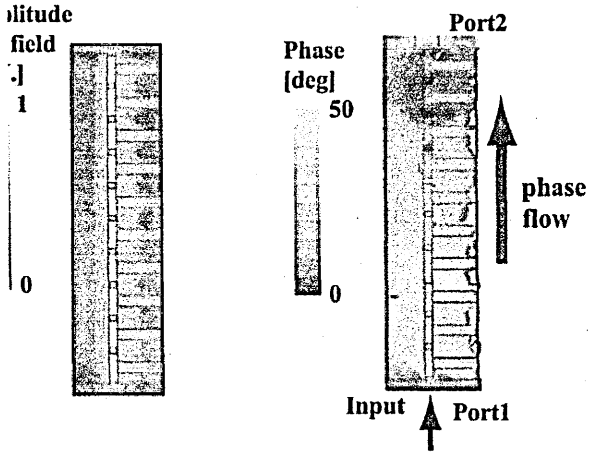


図 15　電界分布

3. 2 提案構造及び特性

本節では，提案する進行波型共振器の数値計算結果を示す．本報告では，図 8(a)に示す非可逆移相右手/左手系複合伝送線路の両端と給電用のマイクロストリップ線路の間に空隙を設けることにより，終端条件を開放とした共振器を構成した．構成した共振器の伝送特性を図 14 に示す．図 10(b)より，式(7)を満たす動作周波数は 6.3GHz であることが分かり，図 14 より共振周波数はほぼ一致していることが分かる．次に，同周波数での電界分布を図 15 に示す．図 15 は，端子 1 より電磁界を入力した電界分布である．図 15 より，振幅は線路上のいかなる場所でも一定であり，位相は端子 1 から端子 2 に向かって遅れていることが確認できる．また電磁界を端子 2 から入力した場合も同様の特性を得ることが確認できた．従来の伝送線路型共振器では，共振状態として定在波が現れることが一般的に知られているが，提案した伝送線路型共振器の場合，振幅は線路上のいかなる場所でも一定であり，位相分布は直線的に変化する，進行波型共振器と類似した特性を持つ共振器が構成されていることが数値計算により確認できた．

5. まとめ

非可逆な伝送特性を示す右手/左手系複合伝送線路において，透過係数の位相特性は従来の非可逆性とほぼ同程度を維持したまま，同振幅特性の非可逆性を大幅に低減させるために，棒状のフェライトを用いた構造を提案し，その動作を数値計算及び試作による実験により確認した．また同線路を用いた応用例として，進行波型共振器と類似した特性を有する伝送線路型共振器を提案し，その動作を数値計算により確認した．本稿で提案する非可逆移相右手/左手系複合伝送線路および共振器を用いることにより，新機能を有するマイクロ波回路及びアンテナへの応用が期待される．

参考文献

[1] C. Caloz and T. Itoh, Electromagnetic Metamateriarls – Transmission Line Theory and Microwave Applications, John Wiley and Sons., 2006.

[2] A. Sanada, C. Caloz, and T. Itoh “Characteristics of the composite right/left-handed transmission lines,” IEEE *Microw. Wireless Comp. Lett.*, vol. 14, no. 2, pp. 68-70, Feb. 2004.

[3] G. V. Eleftheriades and K. G. Balmain, "Negative-Refraction Metamaterials – Fundamental Principles and Applications," IEEE Press, 2005.

[4] M. Tsutsumi and T. Ueda, "Nonreciprocal left-handed microstrip lines using ferrite substrate, " *2004 IEEE MTT-S Int. Microw. Symp. Dig.*, pp. 249-252, June 2004.

[5] T. Ueda and M. Tsutsumi, "Nonreciprocal left-handed transmission characteristics of microstrip lines on the ferrite substrate," *IET Proc. Microwaves, Antennas & Propagation*, vol. 1, no. 2, pp. 349-354, April 2007.

[6] T. Ueda and M Tsutsumi, "Left-handed transmission characteristics of ferrite microstrip lines without series capacitive loading," *IEICE Trans. on Electron.*, vol. E89-C, pp. 1318-1323, Sept. 2006.

[7] T. Ueda, K. Horikawa, M. Akiyama and M. Tsutsumi, "Nonreciprocal phase-shift composite right/left handed transmission lines and their application to leaky wave antennas," *IEEE Trans. on Antennas Propag.*, vol. 57, no. 7, pp. 1995-2005, July 2009.

[8] K. Horikawa, T. Ueda, M. Akiyama, "Influence of reflected waves at a terminal of nonreciprocal phase-shift CRLH transmission lines on the leaky wave radiation," *Proc. of the 2009 Asia-Pacific Microwave Conference*, TU3C-5, Dec. 2009.

[9] T. Ueda and M. Akiyama, "Nonreciprocal phase-shift composite right/left handed transmission lines using ferrite-rod-embedded substrate," *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 45, no. 10, pp. 4203-4206, Oct. 2009.

[10] 岸本紘幸, 上田哲也, 秋山正博, "非可逆移相右手/左手系複合伝送線路からなる伝送線路型共振器," 電子情報通信学会総合大会, C-2-103, p. 145, March. 2010.

[11] T. Ueda and H. Kishimoto, "Pseudo-traveling wave resonator based on nonreciprocal phase-shift composite right/left handed transmission lines," *2010 IEEE MTT-S Int. Microw. Symp. Dig.*, TU1B-5, May 2010.

輻射科学研究会資料

資料番号	RS10-04

構造性複屈折近似を用いた誘電率変調型格子の解析

Analysis of Modulated Dielectric Gratings
Using Form Birefringence Approximation

若林 秀昭† 山北 次郎

岡山県立大学 情報工学部

† E-mail: waka@c.oka-pu.ac.jp

2010年5月20日 (木)

於 大阪大学 吹田キャンパス

概　要　本報告では，斜め入射による誘電率変調型格子の 3 次元散乱問題において，筆者らが提案してきた構造性複屈折を表す汎用的な近似式の有効性について検討する．誘電率変調型格子による回折問題の厳密な解析法として，電磁界成分の空間高調波展開，周期的誘電率分布のフーリエ級数展開に Inverse Rule を適用し，マクスウェルの方程式から得られる行列微分方程式の行列固有値問題に帰着させる方法を用いる．Inverse Rule は構造性複屈折近似の高次の展開を用いた計算法であることを数式及び数値計算例により，明らかにする．数値計算例では，直線偏波だけでなく円偏波入射を考え，回折問題の厳密な解析法を用いて数値的に求めた変調型格子の誘電率に相当する値と実効誘電率を比較することにより，汎用的な複屈折近似式の有効性を直接的に示す．本報告では，誘電率分布として，正弦波状，三角波状分布を考えている．

1　まえがき

入射光の波長に比べて十分短い周期をもつ矩形状レリーフ型誘電体格子は，構造性複屈折と呼ばれる等価異方性を示し，負の 1 軸異方性と同じ性質をもつことが知られている [(1)]．入射光の偏光方向 (電界の向き) が，格子に平行な場合は，一様な電界と不連続な電束密度の空間平均値との比から，格子と垂直な場合は，不連続な電界の空間平均値と一様な電束密度との比から，矩形状レリーフ型誘電体格子の実効誘電率は与えられる．従って，偏光方向によって，これらの実効誘電率が異なるため，異方性媒質として振る舞い [(2)]，格子の溝を調節するだけで，人工的に異方性媒質の製作が可能となる．この複屈折を利用した回折光学素子は狭帯域フィルタ，光磁気ディスクヘッドの検光子，液晶ディスプレイの薄膜コーティングなどに利用される．矩形状レリーフ型誘電体格子の実効誘電率を表す構造性複屈折近似式は電波領域では，一様近似式と呼ばれ，ウェッジ型電波吸収体の設計に有効である [(3)]．

誘電体格子は，表面に周期的な凹凸を設けた表面レリーフ型と，周期的に誘電率が変化する誘電率変調型に大別され [(4)]，2 次元散乱問題において，格子の周期間隔が十分短い場合，誘電率変調型格子も等価異方性を示すことを汎用的な構造性複屈折近似式を提案することにより，筆者らは報告した [(5,6)]．しかしながら，格子の周期方向と入射面が一致しない一般的な場合である 3 次元散乱問題については，レリーフ型格子も含めて等価異方性に関する報告はされていないようである．

そこで本報告では，格子の周期方向と入射面が一致しない斜め入射による誘電率変調型格子の 3 次元散乱問題を想定し，筆者らが提案してきた構造性複屈折を表す汎用的な近似式の有効性について検討する．直線偏波だけでなく円偏波入射を考え，回折問題の厳密な解析法を用いて数値的に求めた変調型格子の誘電率に相当する値と実効誘電率を比較することにより，汎用的な複屈折近似式の有効性を直接的に示す．誘電率変調型格子による回折問題の厳密な解析法として，電磁界成分の空間高調波展開，及び周期的誘電率分布のフーリエ級数展開 [(4)] に Inverse Rule を適用することにより，マクスウェルの方程式から得られる 1 階行列微分方程式の行列固有値問題に帰着させる方法を用いる．さらに，構造性複屈折近似は Inverse Rule，または電磁束密度展開法の 1 項展開であることを示し，Inverse Rule は構造性複屈折近似の高次の展開を用いた計算法であることを数式及び数値計算により，明らかにする．Inverse Rule は誘電率分布と電界が同一点において不連続な関数となるレリーフ型格子の解析に有効であり，数学的性質に基づいていると報告されている [(7,8)]．一方，筆者らがレリーフ型格子の解析に対して提案してきた電磁束密度を展開する方法は不連続点を含まない連続関数からなる成分を展開するため，誘電率分布の不連続点においても一様収束であり，項別微積分が保証され，物理的性質に基づいているといえる [(9,10)]．なお，本報告では誘電率分布として，正弦波状，三角波状分布を考える．

2　問題の設定

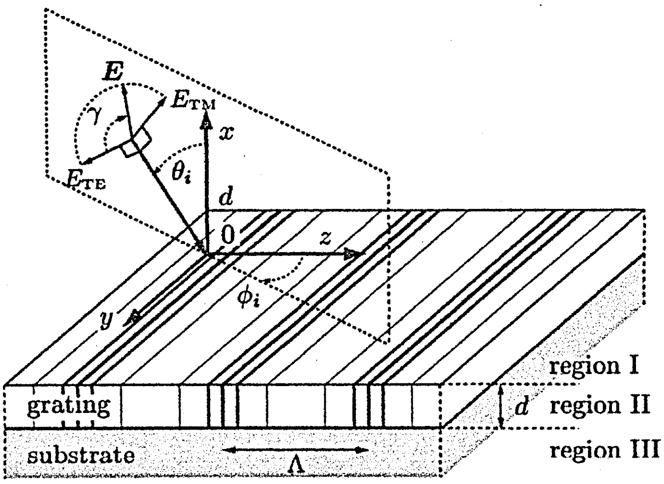


図 1　誘電率変調型格子

y 軸方向に一様で z 軸方向に周期 Λ，位置 z の関数で表される比誘電率 $\varepsilon(z)$ を有する厚さ d の誘電率変調型格子を図 1 に示す．この格子に波長 λ の光波が入射角 θ_i，格子の周期方向からの方位角 ϕ_i，偏波角 γ で斜め入射する散乱問題を考える．領域 I，III は無損失媒質とし，比誘電率 ε_1，ε_3 とする．

3　誘電率変調型格子の構造性複屈折近似

入射光の波長 λ に比べて，格子周期 Λ が十分短ければ，偏光方向によって，異なる実効誘電率が与えられ，誘電体格子は負の 1 軸結晶と等価な性質をもつ．格子の列方向に平行な偏光成分に対して，誘電率変調型格子領域内の電界 $E_\ell(\ell = x, y)$ は一様となり，電束密度の平均値 D_ℓ^{av} は，

$$D_\ell^{\mathrm{av}} = \varepsilon_\parallel\,\varepsilon_0\,E_\ell = \left(\frac{1}{\Lambda}\int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2}\varepsilon(z)\,\varepsilon_0\,dz\right)E_\ell \tag{1}$$

で与えられる．格子に垂直な偏光成分では，格子内の電束密度 D_z は一様となり，電界の平均値 E_z^{av} は，

$$E_z^{\mathrm{av}} = \frac{D_z}{\varepsilon_\perp\,\varepsilon_0} = \left(\frac{1}{\Lambda}\int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2}\frac{1}{\varepsilon(z)\,\varepsilon_0}\,dz\right)D_z \tag{2}$$

で与えられる．従って，筆者らが提案してきた実効比誘電率を表す汎用的な構造性複屈折 (1 軸異方性) 近似式は

$$\varepsilon_\parallel = \frac{1}{\Lambda}\int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2}\varepsilon(z)\,dz, \quad \frac{1}{\varepsilon_\perp} = \frac{1}{\Lambda}\int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2}\frac{1}{\varepsilon(z)}\,dz \tag{3}$$

のように成立する．比誘電率テンソル $[\varepsilon]$ は 式 (3) を用いて次式のように与えられる．

$$\left[\varepsilon\right] = \begin{bmatrix}\varepsilon_\parallel & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_\parallel & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_\perp\end{bmatrix} \tag{4}$$

本報告では，誘電率分布として，次式で表される正弦波状，三角波状分布を考える．

$$\varepsilon(z) = \overline{\varepsilon}\left\{1 + \delta\,\cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}z\right)\right\} \qquad \text{(正弦波)} \tag{5}$$

$$\varepsilon(z) = \overline{\varepsilon}\left\{1 + \delta\,\frac{\Lambda \mp (2a - 4z)}{\Lambda \pm 2a}\right\} \qquad \text{(三角波)} \tag{6}$$

但し，$\bar{\varepsilon}$ は格子の比誘電率分布の平均値，δ は変調度，三角波状分布の場合は $z=a$ のとき，比誘電率が最大となり，符号順に $-\Lambda/2 \le z < a$，$a \le z \le \Lambda/2$ の範囲を示す．式 (5)(6) を式 (3) に代入すれば，次式のような実効比誘電率が求められる．

$$\varepsilon_{\parallel} = \bar{\varepsilon}, \quad \varepsilon_{\perp} = \bar{\varepsilon}\sqrt{1-\delta^2} \qquad (\text{正弦波}) \tag{7}$$

$$\varepsilon_{\parallel} = \bar{\varepsilon}, \quad \varepsilon_{\perp} = \frac{2\bar{\varepsilon}\delta}{\log\dfrac{1+\delta}{1-\delta}} \qquad (\text{三角波}) \tag{8}$$

以上から，格子の列方向に対する実効誘電率は，格子の誘電率分布に関わらず，平均値となり，格子の周期方向に対する実効誘電率は，変調度によって変化する．また，三角波状分布の場合，誘電率が最大となる位置に関わらず，実効誘電率は全て同じになることがわかる．

4　Inverse Rule による解析法

本節では，誘電率変調型格子による回折問題の厳密な解析法として，電磁界成分の空間高調波展開，及び周期的誘電率分布のフーリエ級数展開に Inverse Rule を適用することにより，マクスウェルの方程式から得られる行列微分方程式の行列固有値問題に帰着させる方法について述べる．誘電体格子だけでなく，磁性体格子も解析対象として定式化を行う．

4.1　対角異方性媒質からなる格子領域における定式化

構造の周期性から，比誘電率 $\varepsilon_{ii}(z)$，比透磁率 $\mu_{ii}(z)$ $(i=x,y)$ だけでなく，Inverse Rule を適用するため，逆数 $1/\varepsilon_{zz}(z)$，$1/\mu_{zz}(z)$ を次式のように，フーリエ級数展開する．

$$\varepsilon_{ii}(z) = \sum_m \tilde{\varepsilon}_{ii,m} \exp\left\{jm\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)z\right\}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ii,m} = \frac{1}{\Lambda}\int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \varepsilon_{ii}(z)\exp\left\{-jm\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)z\right\}dz \tag{9}$$

$$\mu_{ii}(z) = \sum_m \tilde{\mu}_{ii,m} \exp\left\{jm\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)z\right\}, \quad \tilde{\mu}_{ii,m}(x) = \frac{1}{\Lambda}\int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \mu_{ii}(z)\exp\left\{-jm\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)z\right\}dz \tag{10}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{zz}(z)} = \sum_m \widetilde{\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz}}\right)}_m \exp\left\{jm\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)z\right\}, \quad \widetilde{\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz}}\right)}_m = \frac{1}{\Lambda}\int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \frac{1}{\varepsilon_{zz}(z)}\exp\left\{-jm\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)z\right\}dz \tag{11}$$

$$\frac{1}{\mu_{zz}(z)} = \sum_m \widetilde{\left(\frac{1}{\mu_{zz}}\right)}_m \exp\left\{jm\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)z\right\}, \quad \widetilde{\left(\frac{1}{\mu_{zz}}\right)}_m = \frac{1}{\Lambda}\int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \frac{1}{\mu_{zz}(z)}\exp\left\{-jm\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)z\right\}dz \tag{12}$$

ここで，式 (9)(11) を 1 項展開 $(M=0)$ とすると，複屈折近似式 (3) と一致することがわかる．このことから，構造性複屈折近似は，Inverse Rule の 1 項展開である．Inverse Rule の立場から解釈すると，Inverse Rule は，構造性複屈折近似の高次の展開を用いた計算法であると言える．式 (5) を式 (9)(11) に代入すると，正弦波状誘電率分布におけるフーリエ展開係数は次式のように表される．

$$\tilde{\varepsilon}_{ii,0} = \bar{\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ii,\pm1} = \frac{\bar{\varepsilon}\delta}{2}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ii,m} = 0 \ (\text{otherwise}), \quad \widetilde{\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz}}\right)}_m = \frac{1}{\bar{\varepsilon}\sqrt{1-\delta^2}}\left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}-1}{\delta}\right)^{|m|} \tag{13}$$

電磁界 E_i，H_i $(i=x,y,z)$ は e_{im}，h_{im} を展開係数とする空間高調波展開によって，

$$\sqrt{Y_0}E_i(x,y,z) = \sum_m e_{im}(x)\exp\{-j(q_0 y + s_m z)\} \tag{14}$$

$$\sqrt{Z_0}H_i(x,y,z) = \sum_m h_{im}(x)\exp\{-j(q_0 y + s_m z)\} \tag{15}$$

のように展開表示される．但し，s_m は z 軸方向の規格化伝搬定数，s_0，q_0 は入射波条件によって与えられ，次式のように表される．

$$s_m = s_0 + m\,\lambda/\Lambda, \quad s_0 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin\theta_i\cos\theta_i, \quad q_0 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin\theta_i\sin\phi_i \tag{16}$$

ここで，ε_1, μ_1 は入射波領域の比誘電率，比透磁率である．空間変数が規格化されたマクスウェルの方程式を，直角座標系で表示すると，

$$\frac{\partial\sqrt{Y_0}E_z}{\partial y} - \frac{\partial\sqrt{Y_0}E_y}{\partial z} = -j\mu_{xx}(z)\sqrt{Z_0}H_x, \quad \frac{\partial\sqrt{Y_0}E_x}{\partial z} - \frac{\partial\sqrt{Y_0}E_z}{\partial x} = -j\mu_{yy}(z)\sqrt{Z_0}H_y \tag{17}$$

$$\frac{1}{\mu_{zz}(z)}\left(\frac{\partial\sqrt{Y_0}E_y}{\partial x} - \frac{\partial\sqrt{Y_0}E_x}{\partial y}\right) = -j\sqrt{Z_0}H_z, \quad \frac{\partial\sqrt{Z_0}H_z}{\partial y} - \frac{\partial\sqrt{Z_0}H_y}{\partial z} = j\varepsilon_{xx}(z)\sqrt{Y_0}E_x \tag{18}$$

$$\frac{\partial\sqrt{Z_0}H_x}{\partial z} - \frac{\partial\sqrt{Z_0}H_z}{\partial x} = j\varepsilon_{yy}(z)\sqrt{Y_0}E_y, \quad \frac{1}{\varepsilon_{zz}(z)}\left(\frac{\partial\sqrt{Z_0}H_y}{\partial x} - \frac{\partial\sqrt{Z_0}H_x}{\partial y}\right) = j\sqrt{Y_0}E_z \tag{19}$$

が得られ，式 (14)(15) を代入して整理すると，次式のような 1 階行列微分方程式が得られる．

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{F} = j\,[C]\boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{F} = [\boldsymbol{e}_y \quad \boldsymbol{e}_z \quad \boldsymbol{h}_y \quad \boldsymbol{h}_z]^{\mathrm{t}} \tag{20}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & -[q][\varepsilon_{xx}]^{-1}[s] & [q][\varepsilon_{xx}]^{-1}[q] - [1/\mu_{zz}]^{-1} \\ [0] & [0] & [\mu_{yy}] - [s][\varepsilon_{xx}]^{-1}[s] & [s][\varepsilon_{xx}]^{-1}[q] \\ [q][\mu_{xx}]^{-1}[s] & [1/\varepsilon_{zz}]^{-1} - [q][\mu_{xx}]^{-1}[q] & [0] & [0] \\ [s][\mu_{xx}]^{-1}[s] - [\varepsilon_{yy}] & -[s][\mu_{xx}]^{-1}[q] & [0] & [0] \end{bmatrix} \tag{21}$$

但し，$[\varepsilon_{ii}] = [\tilde{\varepsilon}_{ii,n-m}]$，$[\mu_{ii}] = [\tilde{\mu}_{ii,n-m}]$，$[1/\varepsilon_{zz}] = [(\widetilde{1/\varepsilon_{zz}})_{n-m}]$，$[1/\mu_{zz}] = [(\widetilde{1/\mu_{zz}})_{n-m}]$，$[s] = [s_m\delta_{mn}]$，$[q] = q_0[\delta_{mn}]$ である．Inverse Rule を適用しない従来法では，係数行列 $[C]$ 中において，$[1/\varepsilon_{zz}]^{-1} \to [\varepsilon_{zz}]$，$[1/\mu_{zz}]^{-1} \to [\mu_{zz}]$ となる．

4.2 電磁束密度を展開する方法との比較

本節では，Inverse Rule と比較するために，筆者らが提案してきた電磁束密度を展開する方法 (9,10) による式を展開する．不連続点を含まない連続関数からなる成分を用いて展開するために，電磁界成分 E_z，H_z の代わりに，電磁束密度 D_z，B_z を次式のように空間高調波展開する．

$$\sqrt{Y_0}D_z(x,y,z) = \sum_m d_{zm}(x)\exp\{-j\,(q_0y + s_mz)\} \tag{22}$$

$$\sqrt{Z_0}B_z(x,y,z) = \sum_m b_{zm}(x)\exp\{-j\,(q_0y + s_mz)\} \tag{23}$$

不連続点を含まない連続関数からなる 6 成分 $(E_x, E_y, D_z, H_x, H_y, B_z)$ を用いて規格化されたマクスウェルの方程式を，直角座標系で表示すると，

$$\frac{1}{\varepsilon_{zz}(z)}\frac{\partial\sqrt{Y_0}D_z}{\partial y} - \frac{\partial\sqrt{Y_0}E_y}{\partial z} = -j\mu_{xx}(z)\sqrt{Z_0}H_x, \quad \frac{\partial\sqrt{Y_0}E_x}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_{zz}(z)}\frac{\partial\sqrt{Y_0}D_z}{\partial x} = -j\mu_{yy}(z)\sqrt{Z_0}H_y \tag{24}$$

$$\frac{\partial\sqrt{Y_0}E_y}{\partial x} - \frac{\partial\sqrt{Y_0}E_x}{\partial y} = -j\sqrt{Z_0}B_z, \quad \frac{1}{\mu_{zz}(z)}\frac{\partial\sqrt{Z_0}B_z}{\partial y} - \frac{\partial\sqrt{Z_0}H_y}{\partial z} = j\varepsilon_{xx}(z)\sqrt{Y_0}E_x \tag{25}$$

$$\frac{\partial\sqrt{Z_0}H_x}{\partial z} - \frac{1}{\mu_{zz}(z)}\frac{\partial\sqrt{Z_0}B_z}{\partial x} = j\varepsilon_{yy}(z)\sqrt{Y_0}E_y, \quad \frac{\partial\sqrt{Z_0}H_y}{\partial x} - \frac{\partial\sqrt{Z_0}H_x}{\partial y} = j\sqrt{Y_0}D_z \tag{26}$$

が得られ，式 (14)(15) の x, y 成分，式 (22)(23) を代入して整理すると，1 階行列微分方程式は次式のようになる．

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{F} = j\,[C]\boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{F} = [\boldsymbol{e}_y \quad \boldsymbol{d}_z \quad \boldsymbol{h}_y \quad \boldsymbol{b}_z]^{\mathrm{t}} \tag{27}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & -[q][\varepsilon_{xx}]^{-1}[s] & [q][\varepsilon_{xx}]^{-1}[1/\mu_{zz}][q] - [1] \\ [0] & [0] & [1/\varepsilon_{zz}]^{-1}\left([\mu_{yy}] - [s][\varepsilon_{xx}]^{-1}[s]\right) & [1/\varepsilon_{zz}]^{-1}[s][\varepsilon_{xx}]^{-1}[1/\mu_{zz}][q] \\ [q][\mu_{xx}]^{-1}[s] & [1] - [q][\mu_{xx}]^{-1}[1/\varepsilon_{zz}][q] & [0] & [0] \\ [1/\mu_{zz}]^{-1}\left([s][\mu_{xx}]^{-1}[s] - [\varepsilon_{yy}]\right) & -[1/\mu_{zz}]^{-1}[s][\mu_{xx}]^{-1}[1/\varepsilon_{zz}][q] & [0] & [0] \end{bmatrix} \tag{28}$$

$\boldsymbol{d}_z = [1/\varepsilon_{zz}]^{-1}\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{b}_z = [1/\mu_{zz}]^{-1}\boldsymbol{h}_z$ より，変換行列

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{d}_z \\ \boldsymbol{h}_y \\ \boldsymbol{b}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [1/\varepsilon_{zz}]^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [1/\mu_{zz}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{h}_y \\ \boldsymbol{h}_z \end{bmatrix} \tag{29}$$

を用いて，$\boldsymbol{d}_z$ を $\boldsymbol{e}_z$ に，$\boldsymbol{b}_z$ を $\boldsymbol{h}_z$ に変換すれば，

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} [1] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [1/\varepsilon_{zz}]^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [1/\mu_{zz}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{h}_y \\ \boldsymbol{h}_z \end{bmatrix} = j\,[C] \begin{bmatrix} [1] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [1/\varepsilon_{zz}]^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [1/\mu_{zz}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{h}_y \\ \boldsymbol{h}_z \end{bmatrix} \tag{30}$$

となり，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{h}_y \\ \boldsymbol{h}_z \end{bmatrix} &= j \begin{bmatrix} [1] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [1/\varepsilon_{zz}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [1/\mu_{zz}] \end{bmatrix} [C] \begin{bmatrix} [1] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [1/\varepsilon_{zz}]^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [1/\mu_{zz}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{h}_y \\ \boldsymbol{h}_z \end{bmatrix} \\ &= j \begin{bmatrix} [0] & [0] & -[q][\varepsilon_{xx}]^{-1}[s] & [q][\varepsilon_{xx}]^{-1}[q] - [1/\mu_{zz}]^{-1} \\ [0] & [0] & [\mu_{yy}] - [s][\varepsilon_{xx}]^{-1}[s] & [s][\varepsilon_{xx}]^{-1}[q] \\ [q][\mu_{xx}]^{-1}[s] & [1/\varepsilon_{zz}]^{-1} - [q][\mu_{xx}]^{-1}[q] & [0] & [0] \\ [s][\mu_{xx}]^{-1}[s] - [\varepsilon_{yy}] & -[s][\mu_{xx}]^{-1}[q] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{h}_y \\ \boldsymbol{h}_z \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{31}$$

となる．式 (31) は Inverse Rule における式 (20) (21) と一致していることから，電磁束密度を展開する方法と Inverse Rule による方法は数式の上で同じであることがわかる．従って，$[1/\varepsilon_{zz}]^{-1}$，$[1/\mu_{zz}]^{-1}$ に着目すれば，構造性複屈折近似は，Inverse Rule または，電磁束密度を展開する方法の 1 項展開であると言える．

4.3 格子領域における電磁界成分

Inverse Rule を適用した 1 階行列微分方程式 (21) は係数行列 $[C]$ の行列固有値問題に帰着し，格子領域における固有値と固有ベクトルを数値的に求める．$4(2M+1)$ 元の列ベクトル $\boldsymbol{a}(x)$，固有ベクトルから得られる対角化行列 $[\boldsymbol{T}]$ を用いて，$\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{T}]\boldsymbol{a}(x)$ のように変換すると，式 (21) は，$d\boldsymbol{a}(x)/dx = j\,[\kappa]\boldsymbol{a}(x)$ となり，解は次式のように求められる．

$$\boldsymbol{F} = [T]\begin{bmatrix} [\mathrm{EXP}^{+}(x-x_0)] & [0] \\ [0] & [\mathrm{EXP}^{-}(x-x_0)] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{+}(x_0) \\ \boldsymbol{a}^{-}(x_0) \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$[\mathrm{EXP}^{\pm}(x)] = [\delta_{pq}\exp(\mp j\kappa_p\, x)]\,, \quad p, q = 1, \cdots, 2(2M+1) \tag{33}$$

但し，$\boldsymbol{a}^{\pm}(x) = \left[{}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{a}^{\pm}(x) \quad {}^{\mathrm{M}}\boldsymbol{a}^{\pm}(x)\right]^{\mathrm{t}}$ であり，添字 E，M はそれぞれ TE 波，TM 波成分を示す．また，$\boldsymbol{a}^{\pm}(x)$ はそれぞれ，$2(2M+1)$ 元の列ベクトル，${}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{a}^{\pm}(x)$，${}^{\mathrm{M}}\boldsymbol{a}^{\pm}(x)$ はそれぞれ，$(2M+1)$ 元の列ベクトルである．κ_p は計算機によって数値的に求めた固有値であり，$[\kappa] = \mathrm{diag}\left[[\delta_{pq}\kappa_p^{+}] \;\; [\delta_{pq}\kappa_p^{-}]\right]$，$\{\kappa_p^{+}\}, \{\kappa_p^{-}\} = \{-\kappa_p\}, \{\kappa_p\}$ である．

4.4 一様領域における定式化

領域 I, III のような周期性が存在しない一様媒質においては，$\varepsilon_{ii}(z) = \varepsilon$，$\mu_{ii}(z) = \mu$，$[\varepsilon] = \varepsilon[1]$，$[\mu] = \mu[1]$ であり，係数行列 $[C]$ の小行列は対角行列になるので，m 次の空間高調波成分を取り出し，$[C_m]$ を用いて，次式のように表される．

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} e_{ym} \\ e_{zm} \\ h_{ym} \\ h_{zm} \end{bmatrix} = j\,[C_m]\begin{bmatrix} e_{ym} \\ e_{zm} \\ h_{ym} \\ h_{zm} \end{bmatrix}, \quad [C_m] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_m q_0/\varepsilon & q_0^2/\varepsilon - \mu \\ 0 & 0 & \mu - s_m^2/\varepsilon & s_m q_0/\varepsilon \\ s_m q_0/\mu & \varepsilon - q_0^2/\mu & 0 & 0 \\ s_m^2/\mu - \varepsilon & -s_m q_0/\mu & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

4×4 元の $[C_m]$ の固有値 κ_m，固有ベクトル $\boldsymbol{t}_m$ は TE，TM 波に対して，次式のように，解析的に求められる．

$${}^{\mathrm{E(M)}}\kappa_m^{\pm} = \kappa_m^{\pm} = \mp\xi_m = \mp\sqrt{\varepsilon\mu - q_0^2 - s_m^2} \tag{35}$$

$${}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{t}_m^{\pm} = \begin{bmatrix} \dot{s}_m\sqrt{\mu^*} \\ -\dot{q}_0\sqrt{\mu^*} \\ \pm\xi_m\dot{q}_0/\sqrt{\mu^*} \\ \pm\xi_m\dot{s}_m/\sqrt{\mu^*} \end{bmatrix}, \quad {}^{\mathrm{M}}\boldsymbol{t}_m^{\pm} = \begin{bmatrix} \mp\xi_m\dot{q}_0/\sqrt{\varepsilon} \\ \mp\xi_m\dot{s}_m/\sqrt{\varepsilon} \\ \dot{s}_m\sqrt{\varepsilon} \\ -\dot{q}_0\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix} \tag{36}$$

但し，

$$\dot{q}_0 = \begin{cases} \dfrac{q_0}{\sqrt{q_0^2+s_m^2}} \\ 0 \end{cases}, \quad \dot{s}_m = \begin{cases} \dfrac{s_m}{\sqrt{q_0^2+s_m^2}} & (q_0^2+s_m^2 \neq 0) \\ 1 & (q_0^2+s_m^2 = 0) \end{cases} \tag{37}$$

である．ここで，固有ベクトル $\boldsymbol{t}_m$ は $\mathrm{Re}\left(e_{ym}h_{zm}^* - e_{zm}h_{ym}^*\right) = \xi_m$ に規格化してあり，円偏波を扱うために，図 2 に示す回折する方向に従って，固有ベクトルの向きを選択し，$[\boldsymbol{t}_m]$ の符号を表 1 のように決めている．固有ベクトルを用いて，対角化行列 $[T_m]$ は．

$$[T_m] = \left[{}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{t}_m^{+} \quad {}^{\mathrm{M}}\boldsymbol{t}_m^{+} \quad {}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{t}_m^{-} \quad {}^{\mathrm{M}}\boldsymbol{t}_m^{-}\right] \tag{38}$$

のようになり，$4(2M+1)\times 4(2M+1)$ 元の対角化行列 $[\boldsymbol{T}]$ を求めることができる．

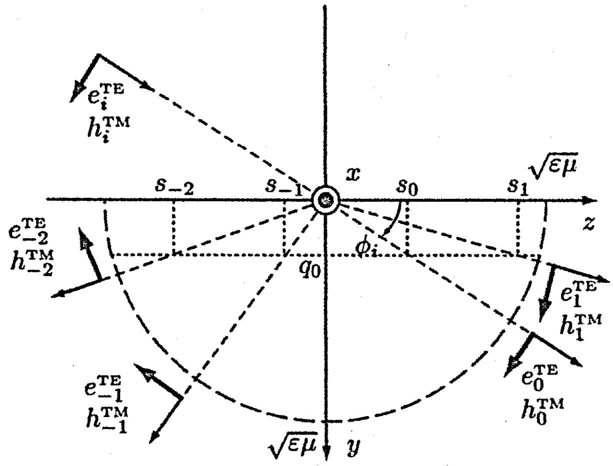


図 2 固有ベクトル $[\boldsymbol{t}_m]$ の向きの選択

表 1 固有ベクトル $[\boldsymbol{t}_m]$ の符号

	$\mathrm{TE}^{(+)}$	$\mathrm{TM}^{(+)}$	$\mathrm{TE}^{(-)}$	$\mathrm{TM}^{(-)}$
e_y	$+$	$-$	$+$	$+$
e_z	$-$	$-$	$-$	$+$
h_y	$+$	$+$	$-$	$+$
h_z	$+$	$-$	$-$	$-$

4.5　境界条件と回折効率

境界面 $x = x_k$ $(k = 1, 2)$ における電磁界の接線成分は連続であるから，

$$
\begin{aligned}
&[T_k]\begin{bmatrix} [1] & [0] \\ [0] & [\mathrm{EXP}_k^-(x_k - x_{k-1})] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_k^+(x_k) \\ \boldsymbol{a}_k^-(x_{k-1}) \end{bmatrix} \\
&= [T_{k+1}]\begin{bmatrix} [\mathrm{EXP}_{k+1}^+(x_k - x_{k+1})] & [0] \\ [0] & [1] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{k+1}^+(x_{k+1}) \\ \boldsymbol{a}_{k+1}^-(x_k) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{39}
$$

が得られる．但し，$x_0 = x_1 = d$，$x_2 = x_3 = 0$ である．領域 I の $\boldsymbol{a}_1^-$，領域 III の $\boldsymbol{a}_3^+$ は既知の定数ベクトルであり，それぞれ，入射波ベクトル，放射条件である．入射波の複素振幅を 1 とすれば，直線偏波，円偏波は次式のように与えられる．

$$
\boldsymbol{a}_1^- = \begin{cases} [0 \cdots 0 \ \cos\gamma \ 0 \cdots 0 \ \sin\gamma \ 0 \cdots 0]^t & (\text{直線偏波}) \\ [0 \cdots 0 \ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \cdots 0 \ \pm\dfrac{j}{\sqrt{2}} \ 0 \cdots 0]^t & (\text{円偏波}) \end{cases} \tag{40}
$$

但し，直線偏波において，$\gamma = 0$ deg. の場合は TE 波，$\gamma = 90$ deg. の場合は TM 波であり，円偏波において，$+$ 符号は右旋円偏波 (RC)，$-$ 符号は左旋円偏波 (LC) を示す．また，放射条件は，$\boldsymbol{a}_3^+ = [0 \cdots 0]$ である．従って，式 (39) の未知数 $\boldsymbol{a}_1^+(d)$，$\boldsymbol{a}_3^-(0)$ を求めれば，TE 波，TM 波，右旋円偏波，左旋円偏波成分に対する反射回折効率 ${}^{\rm E,M,R,L}\eta_m^{\rm r}$ 及び透過回折効率 ${}^{\rm E,M,R,L}\eta_m^{\rm t}$ は次式で与えられる．

$$
{}^{\rm E(M)}\eta_m^{\rm r} = \frac{\left|\mathrm{Re}\left\{\kappa_{1,m}^+\right\}\right| \left|{}^{\rm E(M)}a_{1,m}^+(d)\right|^2}{\left|\mathrm{Re}\left\{\kappa_{1,0}^-\right\}\right|} \tag{41}
$$

$$
{}^{\rm E(M)}\eta_m^{\rm t} = \frac{\left|\mathrm{Re}\left\{\kappa_{3,m}^-\right\}\right| \left|{}^{\rm E(M)}a_{3,m}^-(0)\right|^2}{\left|\mathrm{Re}\left\{\kappa_{1,0}^-\right\}\right|} \tag{42}
$$

$$
{}^{\rm R(L)}\eta_m^{\rm r} = \frac{\left|\mathrm{Re}\left\{\kappa_{1,m}^+\right\}\right| \left|{}^{\rm E}a_{1,m}^+(d) \mp j\ {}^{\rm M}a_{1,m}^+(d)\right|^2}{\left|2\,\mathrm{Re}\left\{\kappa_{1,0}^-\right\}\right|} \tag{43}
$$

$$
{}^{\rm R(L)}\eta_m^{\rm t} = \frac{\left|\mathrm{Re}\left\{\kappa_{3,m}^-\right\}\right| \left|{}^{\rm E}a_{3,m}^-(0) \pm j\ {}^{\rm M}a_{3,m}^-(0)\right|^2}{\left|2\,\mathrm{Re}\left\{\kappa_{1,0}^-\right\}\right|} \tag{44}
$$

ここで，添字 R，L はそれぞれ，右旋円偏波，左旋円偏波成分を示し，符号順に右旋，左旋成分を示す．

5　数値計算例

本節では，誘電率変調型格子において，格子周期が十分短い場合，実効比誘電率が有効であることを示す．誘電率分布は正弦波状分布とし，変調度は比較的大きい $\delta=0.8$ とした．計算パラメータは，$\mu=1$，$\varepsilon_1=1$，$\varepsilon_3=2.5$ とした．誘電率変調型格子に対する解析法において，Inverse Rule を適用すれば，展開次数を $M=0$ (1 項展開) とした場合，実効比誘電率 $(\varepsilon_\parallel,\varepsilon_\perp)$ の構造性複屈折近似による計算過程になり，展開次数を $M>0$ とした場合，誘電率変調型格子の散乱問題に対する計算過程に，自動的になる．

変調型格子の散乱問題に対する解析では，格子周期が短い場合，式 (33) の数値的に求めた TE 波，TM 波成分の 0 次の固有値 ${}^{\mathrm{E}}\kappa_0^{\pm}$，${}^{\mathrm{M}}\kappa_0^{\pm}$ は，実効比誘電率を用いて求めた固有値 ${}^{\mathrm{E}}\kappa^{\pm}$，${}^{\mathrm{M}}\kappa^{\pm}$ に十分一致する [5] ため，本報告で扱う斜め入射の場合では，次式のように表すことができる．

$$ {}^{\mathrm{E}}\kappa_0^{\pm}\approx{}^{\mathrm{E}}\kappa^{\pm}=\mp\sqrt{\varepsilon_\parallel\mu-q_0^2-s_0^2},\qquad {}^{\mathrm{M}}\kappa_0^{\pm}\approx{}^{\mathrm{M}}\kappa^{\pm}=\mp\sqrt{\varepsilon_\perp\mu-\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}s_0^2-q_0^2} \tag{45} $$

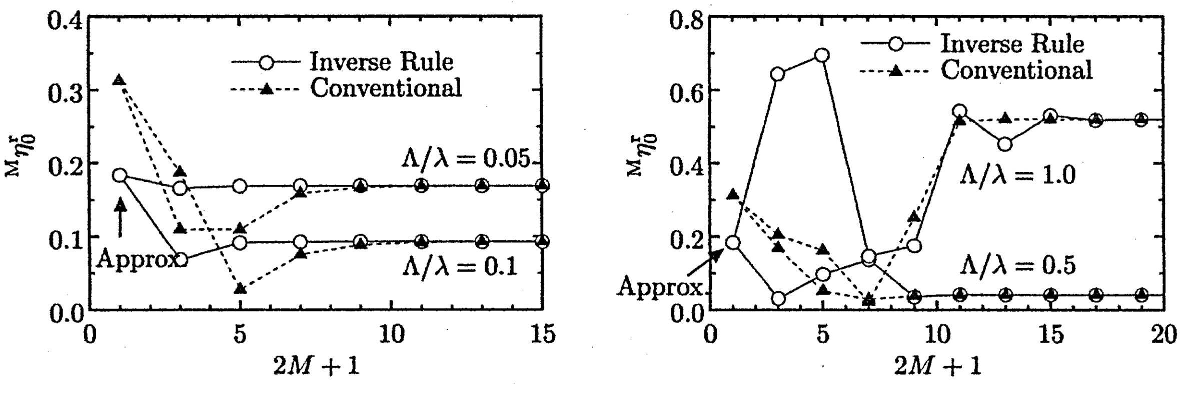
従って，格子の比誘電率に相当する値を格子の列方向に対して $\varepsilon_{g,\parallel}$，格子の周期方向に対して $\varepsilon_{g,\perp}$ とすれば，${}^{\mathrm{E}}\kappa_0^{\pm}$，${}^{\mathrm{M}}\kappa_0^{\pm}$ を用いて，次式のように求めることができる．

$$ \varepsilon_{g,\parallel}=\left({}^{\mathrm{E}}\kappa_0{}^{\pm}\right)^2+q_0^2+s_0^2,\qquad \varepsilon_{g,\perp}=\frac{\left({}^{\mathrm{M}}\kappa_0{}^{\pm}\right)^2+q_0^2}{1-\dfrac{s_0^2}{\varepsilon_{g,\parallel}}} \tag{46} $$

この比誘電率に相当する値と式 (3) で与えられる実効比誘電率の違いを調べれば，構造性複屈折近似式の有効範囲がわかる．そこで，実効誘電率を基準とした相対値 RD を次式のように設定する．

$$ RD_\parallel=\left|\frac{\varepsilon_{g,\parallel}-\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\parallel}\right|,\qquad RD_\perp=\left|\frac{\varepsilon_{g,\perp}-\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\perp}\right| \tag{47} $$

まず，誘電率変調型格子における Inverse Rule の有効性を調べるために，空間高調波の展開項数 $(2M+1)$ に対する 0 次の反射回折効率の変化を Inverse Rule による結果と従来法による結果を比較して，図 3 に示す．Inverse Rule の効果が大きいと考えられる方位角 $\phi_i=0$ deg.，TM 波入射とした．図 (a) の $\Lambda/\lambda=0.05$，0.1 の場合をみると，Inverse Rule が有効である様子がわかる．一方，図 (b) の $\Lambda/\lambda=0.5$，1.0 の場合をみると，Inverse Rule が有効であると言えない．特に $\Lambda/\lambda=1.0$ の場合は，従来法による計算結果のほうが，解の収束が速いことがわかる．



(a) $\Lambda/\lambda=0.05$，0.1 の場合　　(b) $\Lambda/\lambda=0.5$，1.0 の場合

図 3　展開項数に対する 0 次の反射回折効率

$\varepsilon_1=1$，$\varepsilon_3=2.5$，$\bar{\varepsilon}=10$，$\delta=0.8$，$\theta_i=45$ deg.，$\phi_i=0$ deg.，TM 波入射 $(\gamma=90$ deg.$)$

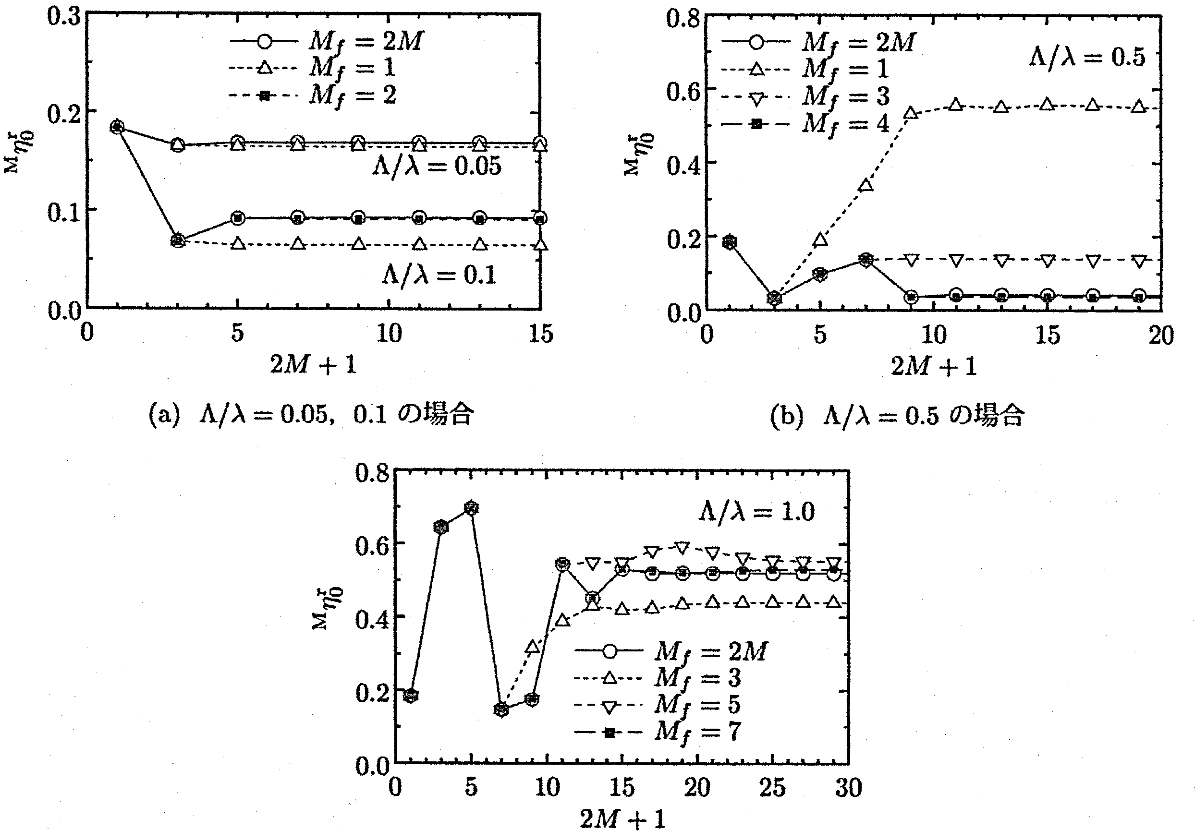
このことから，Inverse Rule はレリーフ型格子の場合では，格子周期 $\Lambda/\lambda=1.0$ でも有効であった [8] が，正弦波状分布の誘電率変調型格子の場合では，格子周期の短い場合に限って有効である．これは，正

弦波状分布においては，格子周期が短くなれば，誘電率変調型格子もレリーフ型格子と同様に，不連続性の影響が大きくなり，格子周期が長くなれば，不連続性の影響が小さくなるからである．また，$M=0$ の場合は，構造性複屈折近似による計算過程となり，$\Lambda/\lambda=0.05$ のように格子周期が十分短ければ，構造性複屈折近似がほぼ有効である様子がわかる．

次に，Inverse Rule が構造性複屈折近似の高次の展開を用いた方法であることを調べるために，フーリエ級数展開の打ち切り次数 M_f について，空間高調波の展開項数 $(2M+1)$ に対する 0 次の反射回折効率の変化を図 4 に示す．誘電率分布のフーリエ級数展開において，打ち切り次数を M_f とすると，

$$\frac{1}{\varepsilon_{zz}(z)}=\sum_{m=-M_f}^{M_f}\widetilde{\left(\frac{1}{\varepsilon_{zz}}\right)}_m \exp\left\{jm\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)z\right\} \tag{48}$$

で表される．図 (a) から，格子周期が十分短い $\Lambda/\lambda=0.05$ の場合，$M_f=1$ の 3 項のフーリエ級数展開近似で解の収束が十分速いことがわかる．格子周期が長くなるにつれて，高次の展開が必要になることがわかる．Inverse Rule が有効な $\Lambda/\lambda=0.05$ では，$M_f=2$ の 5 項でフーリエ級数展開近似すれば，十分であることがわかる．



(a) $\Lambda/\lambda=0.05$，0.1 の場合

(b) $\Lambda/\lambda=0.5$ の場合

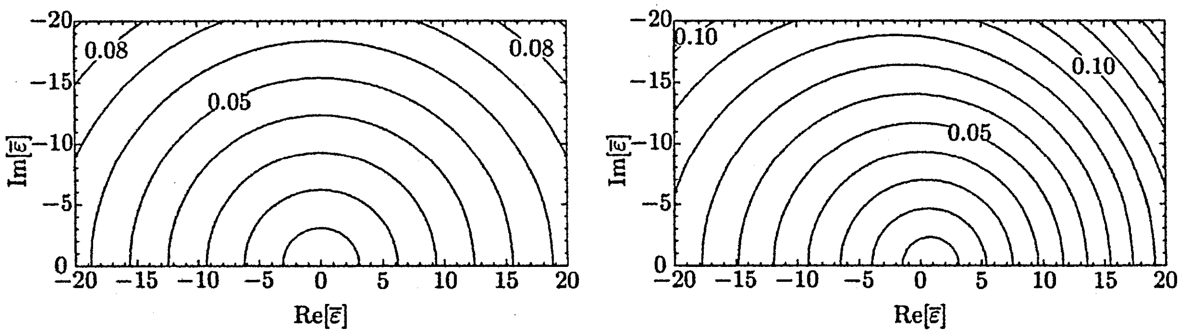
(c) $\Lambda/\lambda=1.0$ の場合

図 4 Inverse Rule による展開項数に対する 0 次の反射回折効率
$\varepsilon_1=1$，$\varepsilon_3=2.5$，$\overline{\varepsilon}=10$，$\delta=0.8$，$\theta_i=45$ deg.，$\phi_i=0$ deg.，TM 波入射 ($\gamma=90$ deg.)

さらに，斜め入射による誘電率変調型格子の回折問題において，構造性複屈折近似式の有効性を調べるために，図 5，6 に数値的に求めた格子の比誘電率の実効比誘電率に対する相対的な違い RD を示す．それぞれ，格子周期 $\Lambda/\lambda=0.1$，0.05 の場合である．入射面が格子の周期方向と一致した解析より一般的な場合として，TE 波と TM 波成分の合成で表される右旋円偏波入射を想定し，$\theta_i=\phi_i=45$ deg.

とした．これらの図から，変調型格子の複素比誘電率の平均値 $\bar{\varepsilon}$ によって，変調型格子の比誘電率に相当する値 $\varepsilon_{g,\parallel}$，$\varepsilon_{g,\perp}$ が実効誘電率 $\varepsilon_{\parallel}$，$\varepsilon_{\perp}$ に対して，どの程度，異なっているかを知ることができる．$RD_{\parallel}$ では，$(\mathrm{Re}[\bar{\varepsilon}], \mathrm{Im}[\bar{\varepsilon}]) = (0, 0)$ を中心とする同心半円状になっていることがわかる．また，格子周期 $\Lambda/\lambda = 0.1$，0.05 の場合を比較すると，0.05 のほうが，実効誘電率に対する違いが小さいことがわかる．

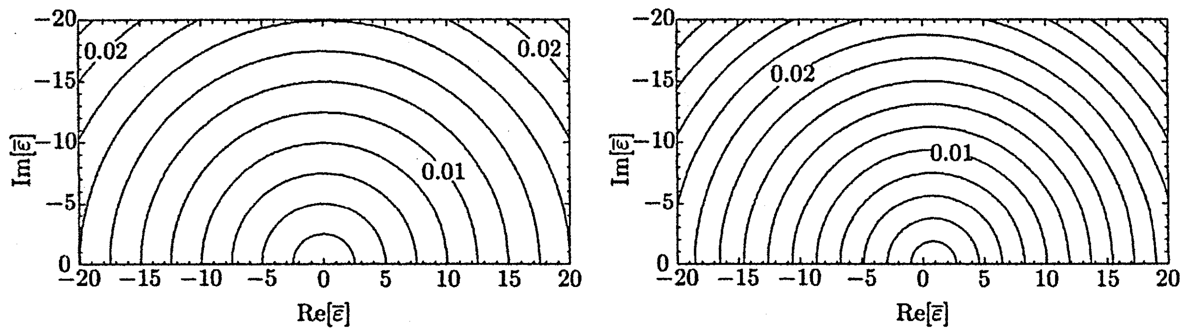
最後に，変調型格子の格子周期に対する右旋円偏波 (RC)，左旋円偏波 (LC) の 0 次の反射回折効率の変化を図 7 に示す．$\bar{\varepsilon} = 12$ とした．格子周期が短くなると，0 次回折効率は複屈折近似で表される一様媒質の結果に近づく様子がわかる．図 5，6 から，$RD_{\parallel}$ を比較すると，$\Lambda/\lambda = 0.1$，0.05 のとき，それぞれ，約 4 %，1 % である．0 次の反射回折効率の違いも $\Lambda/\lambda = 0.1$ のとき，大きくなっている．



(a) $RD_{\parallel}$　　(b) $RD_{\perp}$

図 5 RD の等値線図 ($\Lambda/\lambda = 0.1$)

$\varepsilon_1 = 1$，$\varepsilon_3 = 2.5$，$\delta = 0.8$，$\theta_i = \phi_i = 45$ deg.，右旋円偏波入射，$M = 40$



(a) $RD_{\parallel}$　　(b) $RD_{\perp}$

図 6 RD の等値線図 ($\Lambda/\lambda = 0.05$)

$\varepsilon_1 = 1$，$\varepsilon_3 = 2.5$，$\delta = 0.8$，$\theta_i = \phi_i = 45$ deg.，右旋円偏波入射，$M = 40$

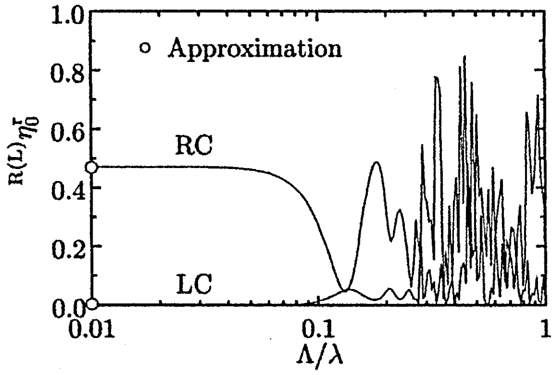


図 7 格子周期に対する 0 次の反射回折効率の変化

$\varepsilon_1 = 1$，$\varepsilon_3 = 2.5$，$\delta = 0.8$，$\bar{\varepsilon} = 12$，$\theta_i = \phi_i = 45$ deg.，右旋円偏波入射，$M = 40$

6　むすび

本報告では，斜め入射による誘電率変調型格子の散乱問題において，筆者らが提案してきた汎用的な構造性複屈折近似式の有効性を示した．誘電率変調型格子の厳密な解析法として，電磁界成分の空間高調波展開と周期的誘電率分布のフーリエ級数展開に，レリーフ型格子に有効な計算法として知られている Inverse Rule を適用した．Inverse Rule は構造性複屈折近似の高次の展開を用いた方法であることを，数式及び数値計算例により示した．三角波状誘電率分布は，誘電率が最大になる位置にかかわらず，同じ実効誘電率になることを示した．また，数学的性質に基づく Inverse Rule と物理的性質に基づく電磁束密度を展開する方法を比較し，数式の上で同じであることを示した．

Inverse Rule による方法において，1 項展開すれば，実効誘電率を表す汎用的な構造性複屈折近似による数値計算に自動的になることを示した．Inverse Rule による数値計算例を示し，正弦波状分布の誘電率変調型格子では，格子周期が短い場合に，不連続性の影響が大きくなるため，Inverse Rule が有効であることを従来法との比較により，示した．さらに，円偏波入射を想定し，実効誘電率と変調型格子の誘電率に相当する値を比較し，入射面が格子の周期方向と一致しない斜め入射においても，誘電率変調型格子の実効誘電率による構造性複屈折近似が有効であることを示した．

今後の課題は，他の誘電率分布，例えば，不連続部を有する非対称三角状等について，Inverse Rule を適用すること，汎用的な構造性複屈折式の数値的検討を行うことが挙げられる．

参考文献

(1) M. Born and E. Wolf, Principles of optics, 6th edition, Pergamon press, New York, pp. 705–708 (1980)

(2) 応用物理学会，日本光学会，光設計研究グループ監修，増補改訂版 回折光学素子入門，第 4 部，オプトロニクス社 (2006)

(3) 橋本修，電波吸収体入門，森北出版 (1997)

(4) 山崎恒樹，日向隆，細野俊夫，稲川讓二，誘電率変調型グレーティングの伝搬特性，電気学会研究会資料，電磁界理論，EMT-87-54, pp. 137–146 (1987)

(5) 菅野翔太，若林秀昭，稲井 寛，屈折率変調型格子の等価誘電率近似に関する検討，電気学会論文誌，基礎・材料・共通 (A) 部門誌，Vol. 127, No. 8, pp. 445–451 (2007)

(6) 山北次郎，六島 克，屈折率変調型格子による等価異方性効果，電子情報通信学会論文誌 (C-I), Vol. J73-C-I, No. 9, pp. 605–608 (1990)

(7) L. Li, Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 13, No. 9, pp. 870–876 (1996)

(8) 小松 実，若林秀昭，山北次郎，表面レリーフ型格子のコニカルマウントにおける誘電体格子の解析，電気学会論文誌，基礎・材料・共通 (A) 部門誌，Vol. 123, No. 3, pp. 246–252 (2003)

(9) M. Komatsu, H. Wakabayashi and J. Yamakita, Computational methods for surface relief gratings using electric and magnetic flux expansions, IEICE Transactions on Electronics, Vol. E88-C, No. 12, pp. 2192–2198 (2005)

(10) H. Wakabayashi and J. Yamakita, Analysis of thickness-profiled gratings for oblique incidence using approximate modeling by plane gratings with surface resistance, American Geophysical Union, Radio Science, Vol. 44, No. 5, RS5009, pp. 1–11 (2009)

輻射科学研究会資料
RS10-05

多重反射波を利用したUWB レーダによる影領域イメージング

Accurate Imaging with UWB Radar Using Indoor Multipath Echoes for Shadow Regions

藤田 修平 Shuhei Fujita
阪本 卓也 Takuya Sakamoto
佐藤 亨 Toru Sato

京都大学大学院情報学研究科
Graduate School of Informatics, Kyoto University

2010年7月1日
於　龍谷大学

概要

光学カメラを補完または代替する室内監視システムの開発に，高い距離分解能を有する UWB (Ultra Wide-Band) パルスレーダの利用が有望視されている．我々は壁面多重反射波を利用した単一アンテナによる点目標の位置推定手法を提案し，簡易で高性能な室内監視システムの実現を目指してきた．本稿ではより実践的な監視システムの実現を目指し，走査型単一アンテナによる多重反射波を利用した有限形状目標のイメージング手法を提案する．提案手法では，各壁面に対して想定される鏡像アンテナに対し干渉計法を適用することで目標のイメージングを行う．また時間逆転法を用いた虚像除去により，目標が影領域に存在する場合でも，高精度なイメージングを実現する．数値計算により提案手法の特性評価を行い，高精度なイメージングを実現することを示す．

1　はじめに

治安の悪化に伴ない，一般家庭やオフィスビルにおける侵入検知のための室内監視システムの需要が近年高まっている．現在これらの監視システムには，コストや水平解像度の観点から光学カメラが主に用いられている．しかし，一般に壁や設置物の死角となる場所が発生しないように複数のカメラの設置が必要となり，より簡易な監視システムが望まれている．これらの監視システムには電波を用いた手法が有効である．WLAN 基地局等の既存の電波発生源を利用することで，侵入者の場所や行動を探知する手法が開発されている [1, 2]．同手法は，光学カメラでは死角となり監視できない影領域においても目標の検出が可能であるが，目標の正確な形状推定を行うことは困難である．

目標の位置や形状の正確な情報を得るための手法として，解像度の観点から UWB パルスレーダが有望視されている．我々は既に，室内の多重散乱環境を利用した単一アンテナによる目標の位置推定手法を提案している [3, 4]．同手法は本来は虚像推定の要因となる壁面での多重反射波を利用することで，反射波が存在しない場合よりも高精度な位置推定を実現する．しかし目標の形状推定を想定する場合，十分な解像度が得られない．

本稿では走査型単一アンテナを想定し，壁面での多重反射波を利用した有限形状目標の形状推定手法を提案する．同手法は干渉計法及び時間逆転法を利用することで，目標が影領域に存在する場合においても高精度なイメージングを実現する．まずは UWB レーダを用いた従来手法について説明し，これらの手法では十分な推定が実現しないことを示す．次に提案手法の手順を説明し，数値計算によりその特性を評価する．

2　システムモデル

本稿で提案する室内監視システムの概観を図 1 に示す．多角形により構成される室内に走査型単一アンテナを設置し，目標の形状推定を行う．アンテナ位置及び壁面位置は既知とし，目標の位置及び形状は未知とする．

本稿では簡単のため二次元化されたモデルについて検討を行う．図 2 及び図 3 に本稿で想定するシステムモデルを示す．図 2 に示すモデルには，壁によりアンテナからの直達波が遮断される領域が存在する．本稿ではこれを影領域と呼ぶ．アンテナ及び目標の存在する空間を実空間と定義し，$\boldsymbol{r} = (x, y)$ で表す．目標及び壁面は完全導体より構成され，明瞭な境界を有する．$y > 0$ に 180° の均一な指向性を持つ送受信アンテナを x 軸方向に走査し，間隔 Δx でパルスの送受信を繰り返す．送信パルスはレイズドコサイン波形で変調し，中心周波数及び帯域幅はそれぞれ 79 GHz, 1.4 GHz とする．アンテナ位置 $(x, y) = (X, y_0)$ における受信信号から目標が存在しない場合に得られる受信信号を除

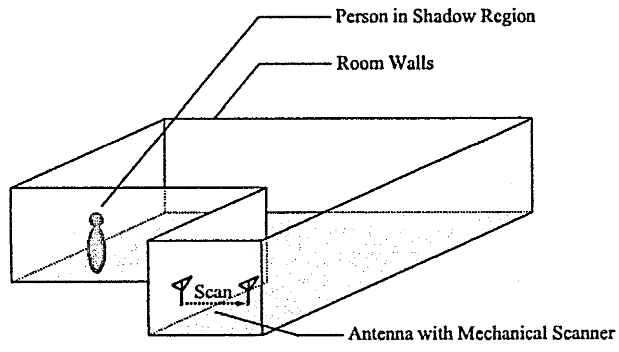


図 1　提案室内監視システムの概観

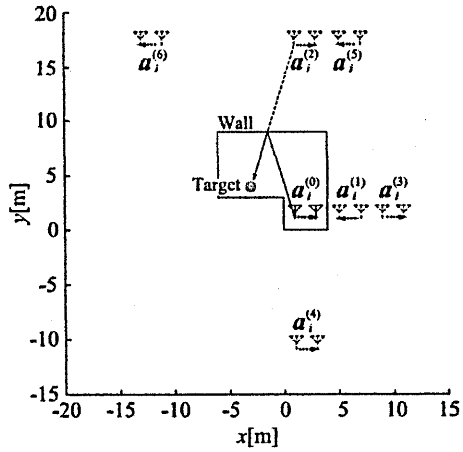


図 2　システムモデル A

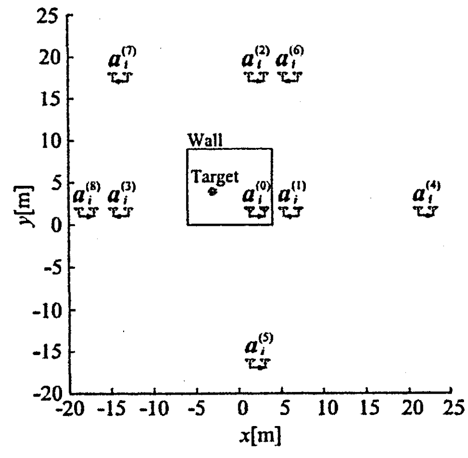


図 3　システムモデル B

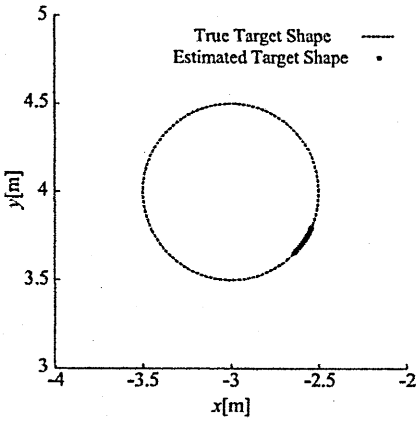


図 4　SEABED 法による推定像

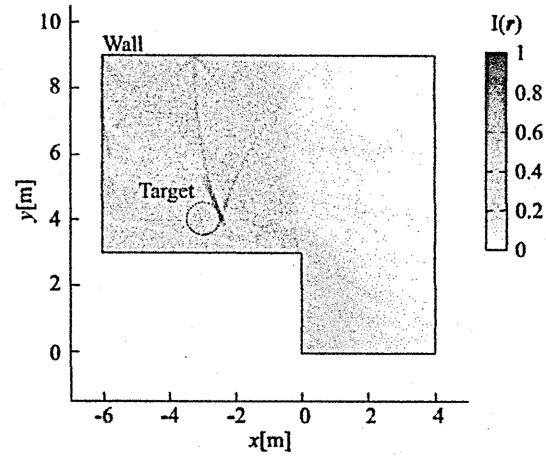


図 5　時間逆転法による推定像

去したものを $s'(X,Y)$ とする．ここで，$Y = ct$，c は電波伝搬速度，t は受信時間である．$s'(X,Y)$ に整合フィルタを適用し，得られる波形を $s(X,Y)$ とする．(X,Y) より表される空間をデータ空間と呼ぶ．

形状推定に壁面反射波を利用するにあたり，各壁面に対して鏡像アンテナを想定する．アンテナから目標までの多重反射波は，対応する鏡像アンテナから目標までの直達波とほぼ等価であると考えることができる．図 2 及び図 3 に本システムモデルで想定する鏡像アンテナを示す．アンテナ位置 $(x_i, y_i) = (i\Delta x + x_0, y_0)$ に対する鏡像アンテナ位置を $\boldsymbol{a}_i^{(j)} = (x_i^{(j)}, y_i^{(j)}) = (i\Delta x^{(j)} + x_0^{(j)}, y_0^{(j)})$ $(i = 0, \cdots, M; j = 0, \cdots, N)$ と表す．ここで，M はアンテナの送受信点数，N は想定する鏡像アンテナ数，$\Delta x^{(j)}$ は j 番アンテナのサンプリング間隔である．ただし，$j = 0$ のときは実アンテナを表すものとする．

3　従来手法

3.1　SEABED 法

SEABED 法 [6] は実空間上の点 (x,y) とデータ空間上の点 (X,Y') との間に成り立つ可逆変換を利用した高速イメージング手法である．ただし，$Y' = Y/2$ であり，(X,Y') は整合フィルタ通過後の波形 $s(X,Y)$ より抽出される．(X,Y') から (x,y) への逆境界散乱変換は次式で表される．

$$\begin{cases} x = X - Y'\mathrm{d}Y'/\mathrm{d}X & (1) \\ y = Y'\sqrt{1-(\mathrm{d}Y'/\mathrm{d}X)^2} & (2) \end{cases}$$

ただし，y は実数であるため，$|\mathrm{d}Y'/\mathrm{d}X| \leq 1$ が成り立つ．同手法は高精度なイメージングを実現することが知られているが，イメージングには目標からの直達波を用いるため，図 2 のように多重反射波の存在する環境下では利用できない．

図 3 に示すモデルに SEABED 法を適用して得られる推定像を図 4 に示す．半径 0.5 m，中心 $(-3.0\,\mathrm{m}, 4.0\,\mathrm{m})$ の円形目標を想定し，$(x_0, y_0) = (0.1\,\mathrm{m}, 1.0\,\mathrm{m})$，$\Delta x = 0.1\,\mathrm{m}$，$M = 38$ とする．図 4 より，目標境界が正しく推定されており，SEABED 法により高精度なイメージングを実現することが分かる．しかし，推定像は円の一部のみであり，十分な推定領域が確保できていないことが確認できる．

3.2　時間逆転法

時間逆転法 [7, 8] は受信アンテナで受信された波形を計算機で逆伝搬計算することにより，目標形状を推定する手法である．影領域イメージングに拡張された時間逆転法の推定像 $I(\boldsymbol{r})$ は次式で表される．

$$I(\boldsymbol{r}) = \sum_{i}\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} H(\boldsymbol{a}_i^{(p)}, \boldsymbol{a}_i^{(q)} \boldsymbol{r}) \left|s'\Bigl(X, \left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_i^{(p)}\right| + \left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_i^{(q)}\right|\Bigr)\right|^2 \quad (3)$$

ここで，$H(\boldsymbol{a}_i^{(p)}, \boldsymbol{a}_i^{(q)}, \boldsymbol{r})$ は次式で定義される関数である．

$$H(\boldsymbol{a}_i^{(p)}, \boldsymbol{a}_i^{(q)}, \boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{r} \notin \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{a}_i^{(p)}) \cup \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{a}_i^{(q)}) \\ 0 & (\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{a}_i^{(p)}) \cup \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{a}_i^{(q)}) \end{cases} \quad (4)$$

式 (4) において，$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{a}_i^{(p)})$ は鏡像アンテナ $\boldsymbol{a}_i^{(p)}$ の影領域を表す．式 (3) は推定像 $I(\boldsymbol{r})$ が各アンテナから距離 $\boldsymbol{r}$ だけシフトした受信信号の振幅の総和値で表されることを意味する．このとき，影領域に相当するアンテナからの寄与分は関数 $H(\boldsymbol{a}_i^{(p)}, \boldsymbol{a}_i^{(q)}, \boldsymbol{r})$ により除去される．

図 2 に示すモデルに時間逆転法を適用して得られる推定像を図 5 に示す．また，レイトレーシングにより得られる

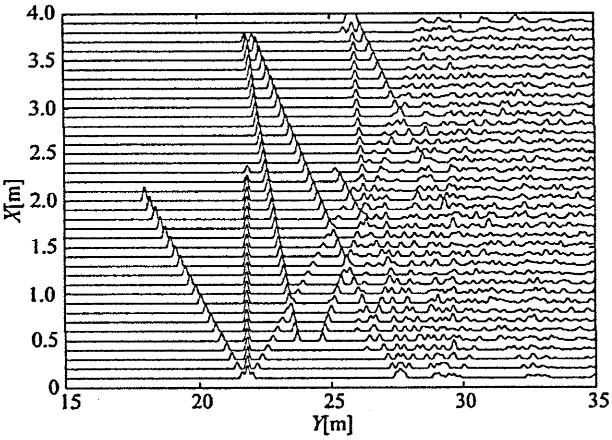


図 6　整合フィルタ適用後の受信波形

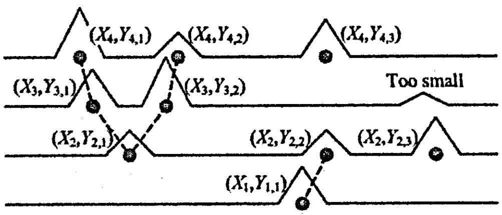


図 7　距離点抽出処理の例

受信波形を図 6 に示す．受信信号の観測時間は $0 \leq t \leq 150\,\mathrm{nsec}$ とする．使用する鏡像アンテナ数は $N = 6$ とし，これは壁面での反射回数が 3 回以下の反射波のみをイメージングに使用することに相当する．図 5 より，時間逆転法では目標の大まかな位置は推定できるが，目標形状の推定は困難であることが分かる．

4　提案手法

4.1　距離点抽出処理

本章では室内多重散乱環境を利用した影領域イメージング手法の手順を説明する．4.1 節では受信信号からの距離点抽出処理について説明する．信号 $s(X,Y)$ より次式を満たす距離点 $(X_i, Y_{i,k})$ を抽出する．

$$\delta\, s(X,Y)/\delta Y = 0 \tag{5}$$
$$s(X,Y) \geq \rho \max s(X,Y) \tag{6}$$

ここで，X_i は i 番目の送受信位置，$Y_{i,k}$ はアンテナ位置 (X_i, y_0) での受信信号の k 番目のピーク値である．$\rho > 0$ は経験的に定まるパラメータである．

次に，抽出した距離点を次式により距離点対として選択する．

$$|Y_{i,m} - Y_{i+1,n}| \leq T_0 \tag{7}$$

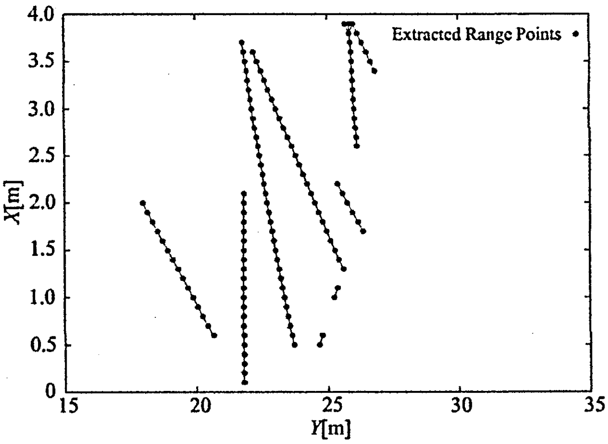


図 8　抽出距離点対

ここで，T_0 は送信パルスの空間長である．距離点抽出処理の例を図 7 に示す．同図に示す通り，振幅の条件式 (6) を満たさない弱い信号や式 (7) の条件を満たさない孤立点は抽出されない．図 6 より抽出した距離点対を図 8 に示す．ただし，本稿では帯域幅 1.4 GHz の信号を想定しているため，$T_0 = 0.2\,\mathrm{m}$ とし，$\rho = 0.5$ とする．

4.2　多重反射波を利用した干渉計法

4.2 節では，前節で抽出した距離点対を用いたイメージング手法について説明する．アンテナで受信された信号はモノスタティックレーダモデルとバイスタティックレーダモデルの 2 種類に分類することができる．図 9 に各モデルの例を示す．同左図のようにパルスの送信経路と受信経路が同一の場合，単一の鏡像アンテナによりパルスが送受信される等価的なモノスタティックシステムを構成していると考えることができる．一方，同右図のようにパルスの送信経路と受信経路が異なる場合，2 つの鏡像アンテナによりパルスが送受信される等価的なバイスタティックシステムを構成していると考えることができる．

以上の分類を元に，本稿では干渉計法 [5] を用いて目標のイメージングを行う．干渉計法は 2 素子以上のアンテナで受信された信号の位相差より到来方向推定を行う手法である．この原理をもとに，本稿では目標推定点 $\boldsymbol{r}_{i,(m,n)}^{(p,q)}$ を次の 2 つの楕円の交点により求める．

$$\begin{cases} \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_i^{(p)}\right| + \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_i^{(q)}\right| = Y_{i,m} & (8) \\ \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_{i+1}^{(p)}\right| + \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_{i+1}^{(q)}\right| = Y_{i+1,n} & (9) \end{cases}$$

同手法は受信信号の遅延時間差 (距離差) より到来方向推定を行うことと等価である．同手法の概念図を図 10 に示す．モノスタティックレーダモデルの場合，式 (8)，(9) は $p = q$

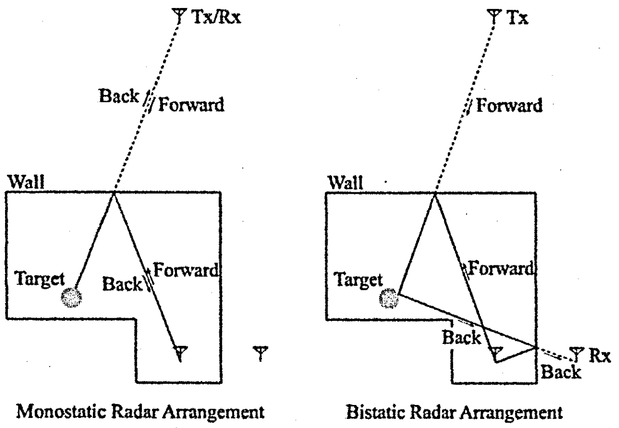


図 9　散乱経路による分類

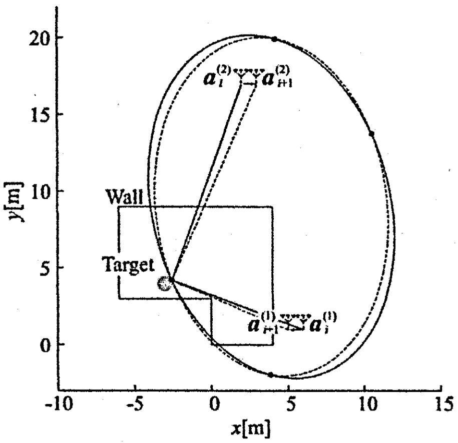


図 10　干渉計法の概念図

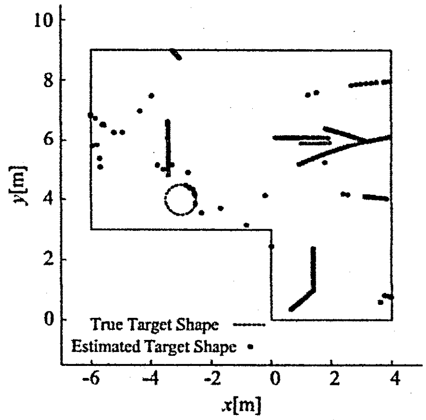


図 11　虚像除去手法適用前の推定像

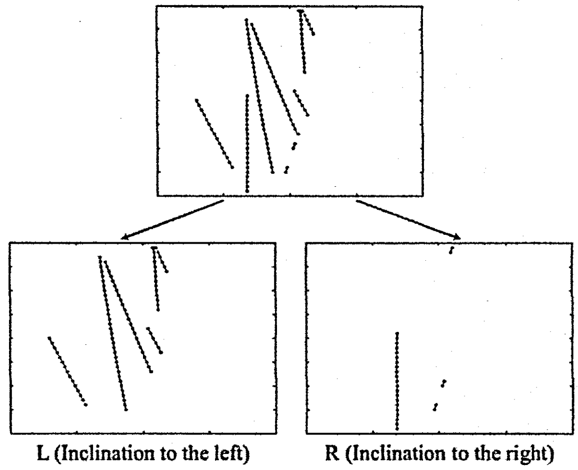


図 12　距離点対の分類

となり，推定点は円の交点により求められる．アンテナと距離点対の適切な組み合わせに対し，同手法を適用することで目標形状が推定できるが，これらの組み合わせを一意に決定することは困難である．本稿では同手法をアンテナと距離点対の想定しうる全ての組み合わせ (p, q) に対して適用する．室外に存在する推定点は虚像として除去する．

干渉計法により得られる推定像を図 11 に示す．同図より，目標境界は正しく推定されている一方で，室内全域に多数の虚像が推定されていることが分かる．これはアンテナと距離点対の誤った組み合わせに対しても干渉計法により推定像を求めることが原因である．

4.3　時間逆転法を用いた虚像除去手法

前節での問題を解決するため，本節では時間逆転法を用いた虚像除去手法を提案する．提案手法では，時間逆転法により目標の大まかな位置を推定し，各鏡像アンテナの走査方向より鏡像アンテナと距離点対の大まかな組み合わせを推定する．図 12 に示すように，距離点対はその傾きにより L 及び R のいずれかのグループに分類される．この分類をもとに，前節で示した干渉計法において以下の条件を付加する．

$$
\begin{cases}
Y_{i,m} \geq Y_{i+1,n} & \left(\left|\boldsymbol{r}_{\max} - \boldsymbol{a}_i^{(p)}\right| + \left|\boldsymbol{r}_{\max} - \boldsymbol{a}_i^{(q)}\right| \right. \\
& \left. \geq \left|\boldsymbol{r}_{\max} - \boldsymbol{a}_{i+1}^{(p)}\right| + \left|\boldsymbol{r}_{\max} - \boldsymbol{a}_{i+1}^{(q)}\right|\right) \quad (10) \\
Y_{i,m} < Y_{i+1,n} & \left(\left|\boldsymbol{r}_{\max} - \boldsymbol{a}_i^{(p)}\right| + \left|\boldsymbol{r}_{\max} - \boldsymbol{a}_i^{(q)}\right| \right. \\
& \left. < \left|\boldsymbol{r}_{\max} - \boldsymbol{a}_{i+1}^{(p)}\right| + \left|\boldsymbol{r}_{\max} - \boldsymbol{a}_{i+1}^{(q)}\right|\right) \quad (11)
\end{cases}
$$

ただし，$\boldsymbol{r}_{\max}$ は時間逆転法による推定位置であり，$\boldsymbol{r}_{\max} = \arg\max I(\boldsymbol{r})$ で表される．さらに，$|\boldsymbol{r}_{i,(m,n)}^{(p,q)} - \boldsymbol{r}_{\max}| < \mu$ を満たす推定点のみを真の推定点とみなし，その他の推定点を虚像として除去する．

以上の操作より得られる推定像を図 13 に示す．ただし，$\mu = 0.5$ は経験的に定め，図 5 より $\boldsymbol{r}_{\max} = (-2.40\,\mathrm{m}, 4.10\,\mathrm{m})$ である．図 13 より，室内の多数の虚像が除去され，目標境界が高精度に推定されていることが分かる．このときの RMS 誤差は 0.47 mm である．

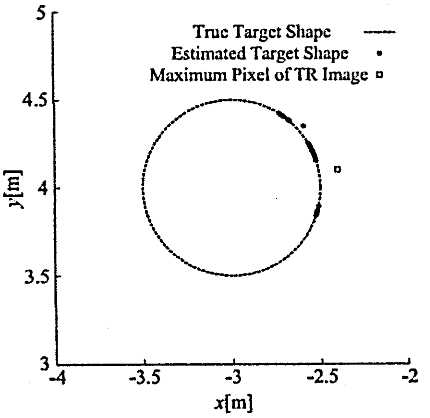


図 13　虚像除去後の推定像

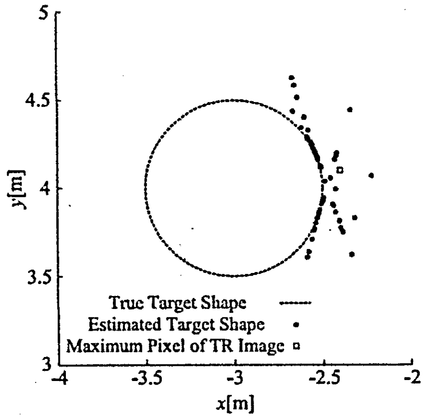


図 15　S/N=30.50 dB のときの推定像

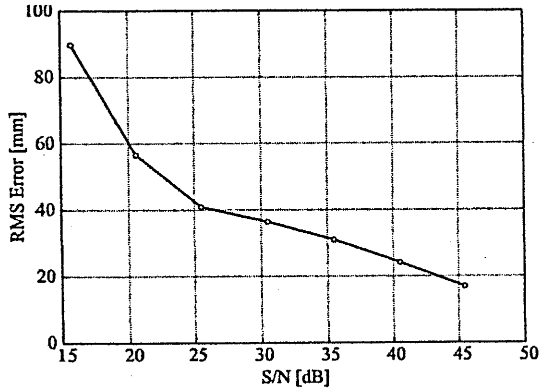


図 14　S/N に対する RMS 誤差特性

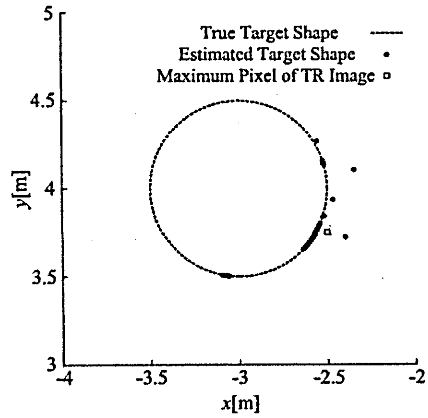


図 16　システムモデル B における推定像

5　提案手法の特性評価

5.1　雑音特性

5.1 節では雑音環境下での提案手法の特性評価を行う．本稿では，正規乱数によりモデル化した白色雑音を受信波形 $s'(X,Y)$ に加算することで雑音環境を実現する．S/N を整合フィルタ適用後の受信信号の最大ピーク電力値と整合フィルタ適用後の雑音の平均電力の比と定義する．S/N に対する推定像の RMS 誤差特性を図 14 に示す．同図より，$\mathrm{S/N} \leq 25.50\,\mathrm{dB}$ において RMS 誤差は 40 mm 程度となり，直径 1.0 m の円形目標に対し誤差は十分に小さいことが分かる．また，$\mathrm{S/N} \leq 15.73\,\mathrm{dB}$ において時間逆転法は正確な位置推定を実現するのに対し，干渉計法によるイメージングは $\mathrm{S/N} \leq 25.50\,\mathrm{dB}$ で急激に劣化する．以上より，提案手法による高精度なイメージングを実現するには，$\mathrm{S/N} \geq 25.50\,\mathrm{dB}$ である必要がある．$\mathrm{S/N} = 30.50\,\mathrm{dB}$ のときの推定像を図 15 に示す．同図より，多数の推定点が目標境界付近に存在し，目標の正確なイメージングが実現していることが分かる．

5.2　異なるモデルにおける特性

5.2 節では様々なモデルに対して提案手法を適用し，特性評価を行う．まず，図 3 に示すモデルに対し提案手法を適用する．得られる推定像は図 16 であり，図 4 と比較して，推定領域が拡大していることが分かる．これは SEABED 法が直達波のみを用いた推定を行うのに対し，提案手法では多重反射波を利用してイメージングを行うためである．このときの RMS 誤差は 1.78 mm である．

次に，図 17 に示すモデルに対し提案手法を適用する．同図は廊下の曲がり角のような死角の存在する通路をモデル化したものである．推定像を図 18 に示す．同図より，虚像が一部推定されている一方，目標の下部が正確に推定されていることが分かる．

最後に，図 2 に示すモデルに傾き 120° の楕円形目標を設置して提案手法を適用する．図 19 に得られる推定像を示す．このときの RMS 誤差は 0.02 mm であり，同図より，目標の一部が正しく推定されていることが分かる．また，大きさは等しく，傾き $60^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$ の楕円形目標に対して提

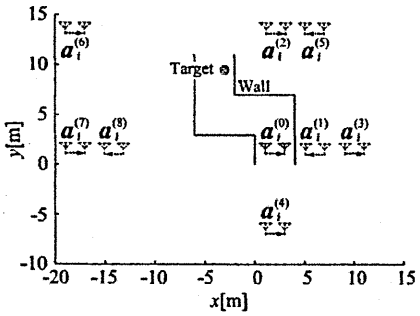


図 17 システムモデル C

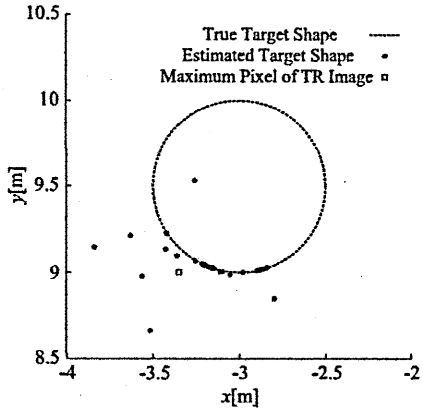


図 18 システムモデル C における推定像

案手法を適用する．このときの平均 RMS 誤差は 2.57 mm であり，楕円形目標に対しても高精度な推定を実現することが分かる．

6 まとめ

本稿では走査型単一アンテナを用いた影領域イメージング手法を提案した．まず，従来手法では影領域に存在する目標の十分な推定を実現しないことを示した．提案手法では，壁面に対して想定される鏡像アンテナに対し干渉計法を適用することで解像度の高い推定を実現した．同時に推定される虚像の除去手法として時間逆転法を用いた手法を提案し，室内の多数の虚像除去が可能であることを示した．また，雑音環境下における提案手法の特性評価を行い，S/N が 25 dB 以上であれば，高精度な推定が可能であることを示した．さらに，複数のモデルに対して提案手法を適用し，様々な状況下での提案手法の有効性を示した．

参考文献

[1] S. Ikeda, H. Tsuji, and T. Ohtsuki, "Indoor event detection with Eigenvector spanning signal subspace for home or office security," IEICE Trans. Commun.,

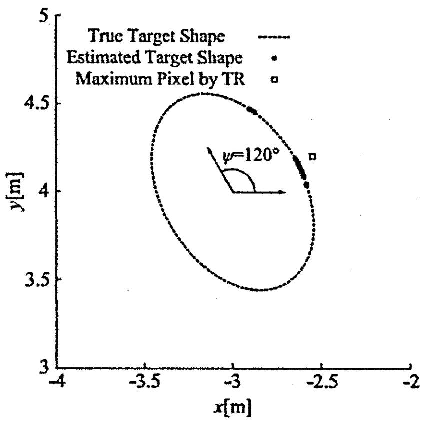


図 19 楕円形目標における推定像

vol. E92-B, pp. 2406–2412, 2009.

[2] K. Pahlavan, F. O. Akgul, M. Heidari, A. Hatami, J. M. Elwell, and R. D. Tingley, "Indoor geolocation in the absence of direct path," IEEE Wireless Communications, vol. 13, no. 6, pp. 50–58, 2006.

[3] T. Sakamoto and T. Sato, "A method of estimating a room shape with a single antenna in a multipath environment," 4th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP) 2010, pp. 12–16, 2010.

[4] 北村堯之, 阪本卓也, 佐藤亨, "凸形状壁面を持つ室内における単一アンテナによる UWB レーダイメージング," 電子情報通信学会総合大会, C-1-7, 2010.

[5] D. Massonet and K. L. Feigl, "Radar interferometry and its applications to changes in Earth's surface," Rev. Geophys., vol. 36, no. 4, pp. 441–500, 1998.

[6] T. Sakamoto, "A fast algorithm for 3-D imaging with UWB pulse radar systems," IEICE Trans. Commun., vol. E90-B, pp. 636–644, 2007.

[7] E. A. Marengo and F. K. Gruber, "Subspace-based localization and inverse scattering of multiple scattering point targets," EURASIP J. Appl. Signal Process., vol. 2007, pp. 192–192, 2007.

[8] Y. Jin and J. M. E. Moura, "Time-reversal detection using antenna arrays," IEEE Trans. Signal Process., vol. 57, pp. 1396–1414, 2009.

輻射科学研究会資料
RS10-06

共振器結合型ワイヤレス給電システムの
ＢＰＦ理論に基づく設計

Design of Resonator Coupled Wireless Power Transfer System Based on BPF Theory

粟井　郁雄　　小森琢也
Ikuo Awai　Takuya Komori

龍谷大学理工学部
〒520-2194　大津市瀬田大江町横谷 1-5

2010 年 7 月 1 日
於龍谷大学瀬田キャンパス

1. まえがき

MIT グループの発表したワイヤレス給電法は 1m 離れた場所に置かれた 100W の電球を点燈させて世界を驚かせた[1]が、それに関する理論ガ難解でその後の研究の展開を妨げているように思われた。しかし最近等価回路を用いた理論が発表され理論的展開が進み始めたが[2]、設計法が未だ示されていない。そこで我々はフィルタ理論を用いて同システムの設計法を構築、提案した[3]~[5]。しかしそれはフィルタの専門家以外にとっては難解であり、使う事はできても展開はもちろんの事直感的な理解も困難であるように思われる。

そこで今回は給電システムの設計・製作後に若干の調整が必要であるが、十分に実用に耐え、物理的にも理解し易く、その上応用範囲が広い設計法を御紹介したい。この方法は矢張り先に発表したものと同じフィルタ理論に基づき、給電システムを帯域通過フィルタ (BPF) として扱う。BPF は通常相互結合した共振器列が外部回路に適当な強さで結合した回路で構成されるがこの方法では、個々の共振器を特定して等価回路表示する事はなく共振器一般として扱う。そこで必要となるパラメータは各共振器の共振周波数、共振器間の結合係数、最外側の共振器が外部回路と結合する強さに関係する外部 Q の 3 種類である。

従ってこの方法は共振器が直接結合して BPF を構成している限りどのような共振器、どのような結合法であっても適用可能であり、極めて一般性が高いものである。但しこの論文では現在最も広く検討されている MIT 型の共振器直結システムを具体例として取り上げる。

なお MIT 型システムの呼称は、発表者が「” Magnetic resonance” を原理とする」と称したために「磁気共鳴型」とされる事が多いが、電気回路理論には電気結合、磁気結合はあっても電気共鳴、磁気共鳴はあり得ないので、彼らのシステムは「磁気結合型」と呼びたい。ただしこの報告は磁気・電気結合の違いを問わないので「共振器結合型」としている。

2. 簡易設計法

BPF の基本構造は図 1 に示す通りであって k_{ij} は共振器間の結合係数、Q_e は外部 Q と呼ばれる。結合係数とは文字通り 2 つの共振器間の結合の強さを表す量であり、次式で定義される[6]。

$$k = \frac{T_o}{T_m} \tag{1}$$

ここに T_o は個々の共振器の振動の周期であり、T_m は 2 つの共振器間のエネルギー交換の周期である。従ってエネルギー交換が早く行われるほど結合が強いと言うことができる。2 つの共振器は元々同じ共振周波数を持つと仮定しているが、結合によってその周波数は上下に分かれて f_2、f_1 となる。式(1)はこの周波数を用いて書き直すことができ

$$k = \frac{2(f_2 - f_1)}{f_2 + f_1} \tag{2}$$

と表わされる。この式は使い勝手が良く、シミュレーション、実験のどちらの方法によっても分裂した 2 つの共振周波数を容易に得る事ができるので結合係数を求めるために広く用いられている[7]。

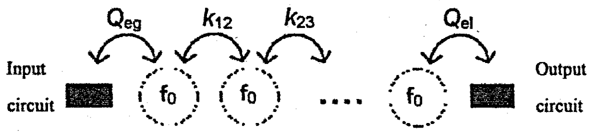


Fig. 1 Basic structure and necessary design parameter of BPF

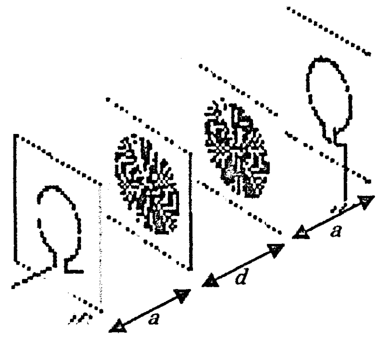


Fig. 2 MIT-type wireless power transfer system

さて MIT のシステムの構成は図 2 のようになっているので、中央部にある 2 つのスパイラルコイルが 2 個の共振器を構成して相互に結合し、ループプローブに接続された外部回路が外部 Q、Q_{eg}、Q_{el}を持って各スパイラルコイルに結合している。共振器は 2 個だけであるからこれは 2 段の BPF であると考え BPF 理論[5]から得られる関係式を示すと,

$$Q_{eg} = \frac{g_0 g_1}{w} \qquad Q_{el} = \frac{g_2 g_3}{w} \tag{3}$$

$$k = \frac{w}{\sqrt{g_1 g_2}} \tag{4}$$

となる。ここに g_0〜 g_3は原型低域通過フィルタの g 値と呼ばれ、フィルタの型式及び段数によって異なった値を持つ。又 w は BPF の比帯域であり、帯域幅を中心周波数で割った値である。更に、ここには明示されていないが, この理論に於いては 2 つの共振器が同じ共振周波数を持つことが前提となって居る。しかしそれがいくらかと言うことは問題としていないので式(３)、(４)の関係式はＢＰＦが外部回路と整合するための条件を表すに過ぎない。

システムの設計に際してフィルタの型式を決めねばならないがパワー伝送システムは帯域外特性を特に気にする必要なく、帯域内特性だけに着目すれば良いのでワグナー型(最平担型)を採用する事にすると次の値が決定される。

$$g_0 = g_3 = 1, g_1 = g_2 = \sqrt{2} \tag{5}$$

これらに加えてシステムの動作周波数を決めると、それは BPF の通過帯域中心周波数となる。更にシステムの動作帯域を決める必要があるが、後述するように帯域は広ければ広いほど伝送損失が減少するので望ましい。しかし帯域は式 (4)に示された通り 2 つのスパイラルコイル間の結合係数に比例するので任意に大きくする事はできず、むしろスパイラルコイルをどれだけ離したシステムが必要であるかがまず決められ、それによって結合係数、帯域という順番で数値が決まる事が多いものと予想される。いずれにしても帯域が与えられれば比帯域 wが求められ、式(3)によって入出力部の外部 Q が決められる。得られた外部 Q は結合係数が大きいほど小さい値が必要となり反比例の関係となる。しかしこの関係を直観的に理解するのは少々困難である。なぜなら外部 Q の物理的な意味が不明確だからである。ここで外部 Q の定義は

$$Q_e = \frac{\omega L}{R_e} = \frac{\text{共振器に蓄積されるエ　ネルギー}}{\text{共振器に接続された外　部回路で単位周期当り　消費されるエネルギー}} \tag{6}$$

で与えられるので、この逆数を取ると明らかに共振器と外部回路との結合の強さに比例する量となり物理的に明確な意味を持つ。そこで外部 Q の逆数を外部結合係数又は外部 k と称し、式(3)の逆数をとると,

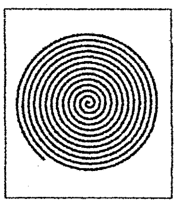
$$k_{eg} = \frac{w}{g_0 g_1} \qquad\qquad k_{el} = \frac{w}{g_2 g_3} \tag{7}$$

が得られる。式(4)と(7)を合わせて考えると「共振器同士の結合の強さに比例して外部回路との結合も強くする事によってBPFとしての整合が取れる」という事が理解できる。たまたま選んだワグナー型2段BPFに対しては式(5)が成り立つので

$$k = k_{eg} = k_{el} = \frac{w}{\sqrt{2}} \tag{8}$$

となりますます好都合である。

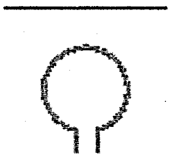
3. 共振周波数



spiral length :5.5m
spiral diameter :25.5cm
line gap :1cm
number of turns :13
diameter of line :1mm

Fig.3 Spiral coil

図2中に示されているスパイラルコイルは自己インダクタンスと自己容量によって共振するので共振器として用いることが出来る。しかしこのような巻き方においては巻線間のインダクタンス及び容量が小さいため、共振周波数はほぼコイル巻線の全長を半波長とする両端開放共振器のそれに等しい。図3のようなスパイラル共振器の共振周波数を図4に示されたループプローブを介して測定したところ、図5のような結果が得られた。図5にはスパイラルを直線状に伸ばした単なる半波長共振器の共振周波数も合わせて記入してある。



loop length :55cm
line diameter :1mm
loop diameter :17.5cm
end line gap :6mm

Fig. 4 Loop coil

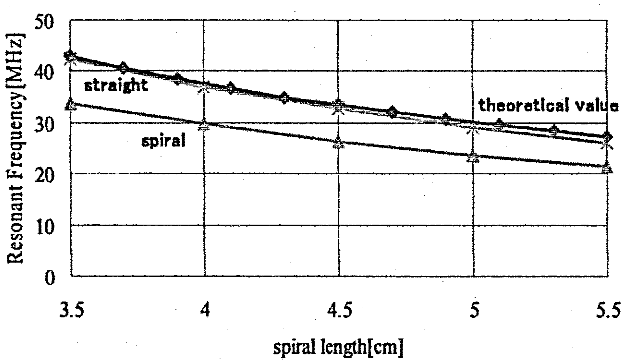


Fig. 5 Experimental resonant frequency of spiral coil and straight line as functions of line length

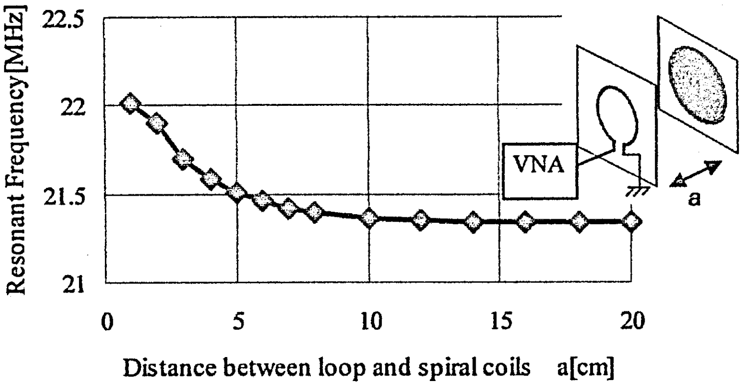


Fig. 6 Variation of resonant frequency of spiral coil due to coupling with loop coil

次に上記のスパイラルとループ間距離の変化に対してその共振周波数の測定値を示すと図 6 の結果が得られた。それはループコイルとスパイラルコイル間の距離を変えながらループコイル両端の S_{11} を VNA （ベクトルネットワークアナライザ） で測定し共振ピークの周波数を読みとる事によって行った。a が大きい所でスパイラル共振器に対するループプローブの影響がほぼ無視できるようになるのでその周波数を共振周波数と考える。なお図 5 の測定はループ/スパイラル間距離を 15cm と十分大きく取って行っている。

4． 結合係数の共振器間距離依存性

前節で決めたスパイラル共振器に対して図 4 のようなループプローブの中心軸をそろえて図 7 の挿入図のように置く。同じセットを 2 組作り、スパイラル共振器間距離を変えながら結合によって分裂した共振周波数 f_1、f_2を測り、式(2)を用いて計算した結合係数を図 7 に示す。この時ループ/スパイラル間の結合が強くなり過ぎないように(言いかえれば$|S_{21}|$の測定時における共振ピーク値が-20dB 以下となるように)両者の距離をある程度離しておかねばならない。今回、距離 $_a$ は 5cm とした。

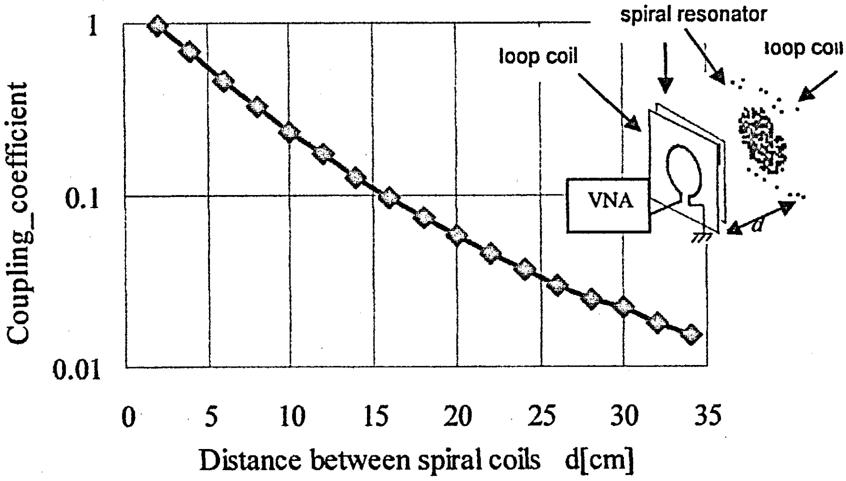


Fig. 7 Coupling coefficient between two spiral coils as functions of their mutual distance

図 7 を見るとスパイラルコイル間の結合係数は距離に対してほぼ指数関数的に減少していく事がわかるが、若干それよりも緩くなっているのは、スパイラルコイルの反対側に置かれたループプローブの影響がまだ残っているのではないかと考えられる。

5．外部 k 及び無負荷 Q の測定

3 種類のループプローブを用いて、スパイラルコイル共振器との間の外部 Q 及び共振器自身の無負荷 Q を 2 端子法[8]によって測定した。 外部 Q の測定結果は図 8 の通りであるが、その逆数を取って外部 k に変更し

たものを同図に重ね書きしてある。横軸は図 7 と異なってループ／スパイラル間距離であるが、k_eは距離に対して指数関数的に減少するという傾向は全く同様である。ループ直径がスパイラルに近いほど結合が強いことも納得できる結果である。

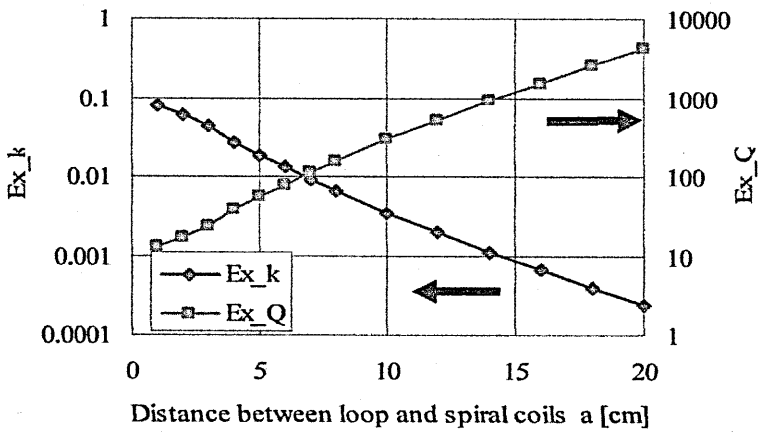


Fig. 8 External Q and external k between loop and spiral coils as functions of their mutual distance

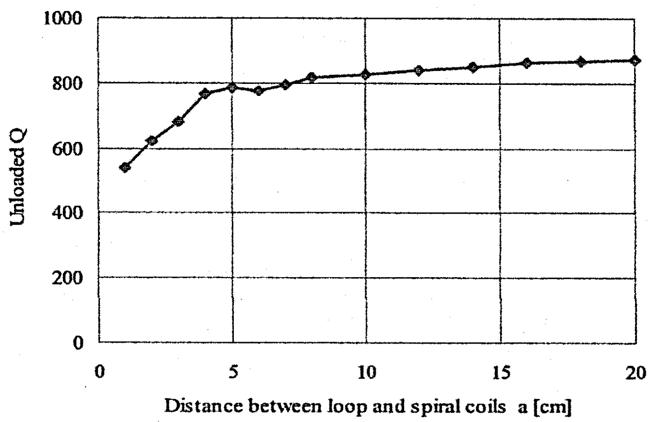


Fig. 9 Unloaded Q of spiral coil as functions of distance between spiral and loop coils

一方無負荷 Q は図 9 のようにループプローブとスパイラルコイルとの距離によって変化する。しかし両者の距離を大きくするにつれてループがスパイラルに及ぼす影響は低下するために本来スパイラル自身の持っている無負荷 Q が現れると考えるのは自然であろう。従ってこの例ではスパイラルコイルの無負荷 Q は約 800 とする事ができる。

ループ／スパイラル間距離が小さい場合に Q_u が大きく下がる現象が特にループ直径の小さい場合顕著に見られるが、これは将来深刻な問題になるかも知れない。現時点で断言はできないが、放射 Q が低下している、言いかえれば放射損失が増大している可能性があり、EMC の観点から、今後詳細に検討する必要があると考える。

6． 設計と実験

以上の結果を用いてシステムの設計を行う．但しここで問題としているのは与えられた条件で回路の整合を取ることが中心である。システムの仕様をどのように与えるかによって設計の方法が異なるが、一番簡単な場合から始めよう。

(1) 仕様 1

電源抵抗； 50Ω　　負荷抵抗； 50Ω
スパイラル寸法；図 3 の通り
ループ寸法；図 4 の通り
スパイラル間距離；d = 16cm

この仕様であれば上に求めたデータを用いて設計が可能である。図7によって d=15cm に対しては k=0.1 なので式 (8) から n=0.141 を得る. 同じく式 (8) から k_{cg}= k_{cl}=0.1 であるから図8を用いて a=1cm となる. これらの値となるように2つのループ/スパイラルコイルのセットを並べて測定したところ図10のような結果が得られ, うまく整合が取れたと言うことが出来る。

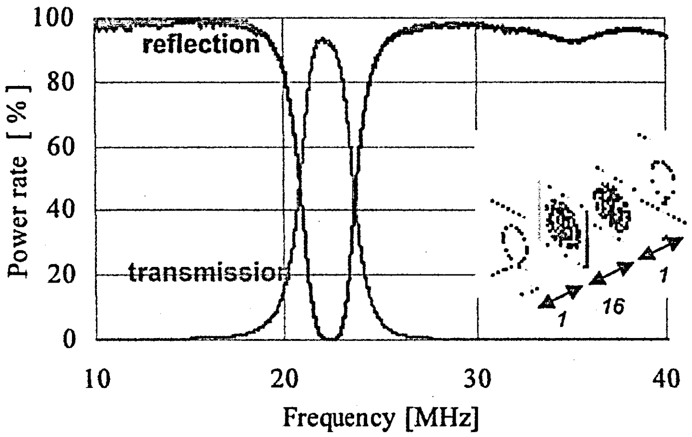


Fig. 10 Measured frequency response for symmetric configuration

(2) 仕様2

(1) と同じ内容でスパイラル間結合係数を 0.02 とする

この時も図 7 を用いることが出来、k=0.02 は d=31cm に対応することが分かる。更に図 8 に於いて k_{cg}= k_{cl}=0.02 に対応する a=5cm を選びシステムを構成する。実験結果は図11の通りでありこれもうまく整合している。スパイラルコイル間の結合係数の変化に対してはスパイラル/ループ間の距離の変更で対応できることが分かる。しかしこの例より k を更に大幅に変えると中心周波数のずれが生じるため、必要に応じて周波数調整をしなければならない。それには3つの方法が考えられる。

まず第1はスパイラルコイルの巻き直しである。線間距離を縮めて巻けば共振周波数は下降し, 広げれば上昇する. 第2にはコイルの端からワイヤを切断して短くすれば上昇、ワイヤを継ぎ足して長くすれば下降する. 更に第3には, スパイラル巻き線間を容量または細線でブリッジすることによって周波数は下降又は上昇する。

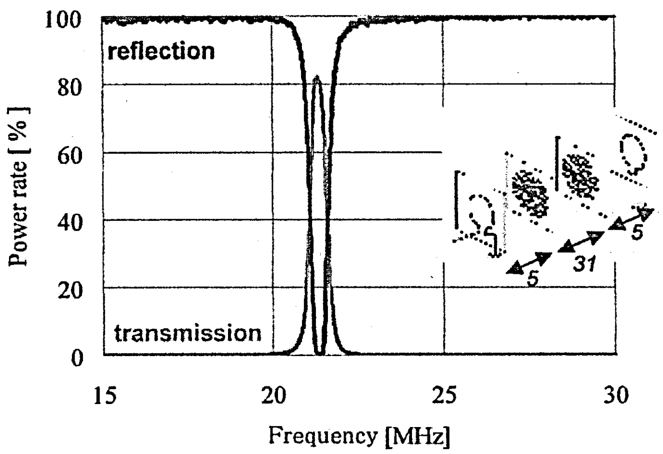


Fig. 11 Measured frequency response for weaker coupling coefficient

(3) 仕様3

(2) と同じ内容で負荷抵抗のみ 29Ω とする

これによって図 2 の回路の対称性が崩れてしまう。その結果としてループコイルを通した終端抵抗のスパイラルコイルに対する摂動が異なってくるため、2 つのスパイラルコイルの共振周波数が異なる値となる。

しかし「同一周波数」という設計の前提条件のこのほころびを回復する方法はこの理論には内蔵されていないので他に求めることとし、ループコイルが果たしている変成器としての役割を利用する。

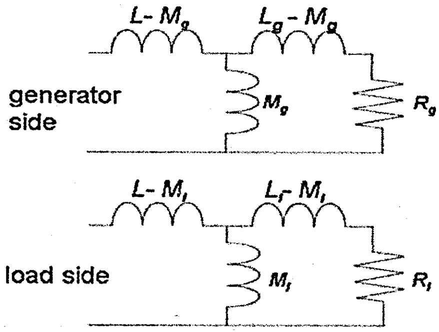


Fig. 12 Equivalent circuits for generator and load end including loop coil

ループコイルと終端抵抗を接続した回路は電源側と負荷側でそれぞれ図 12 のように書くことが出来るので各入力インピーダンス Z_g、Z_lが等しいという条件を課すと多少の数式演算の後、

$$\frac{L_\ell}{L_g}=\frac{R_\ell}{R_g} \qquad \frac{M_\ell}{M_g}=\sqrt{\frac{R_\ell}{R_g}} \tag{9}$$

と言う極めて単純な関係式が得られる。つまり負荷側と電源側ループコイルの自己インダクタンスの比を両終端抵抗の比に等しくなるよう調整して、次にループ・スパイラル間距離を式(9)のような関係が成り立つように負荷側ループを動かせばよいと言うことである。ループの自己インダクタンスはほぼその長さ（又は直径）に比例するので、この例では電源側は全く変えずに負荷抵抗比 0. 58 と同じ割合で負荷側ループの直径を小さくする必要がある。その結果ループ直径は 10cm となる。一方ループ/スパイラル間距離は図 8 に対応する D=10cm のデータを取り（図 13）、その曲線において k_e=0. 02x0. 59 となる a=4. 0cm に設定する。

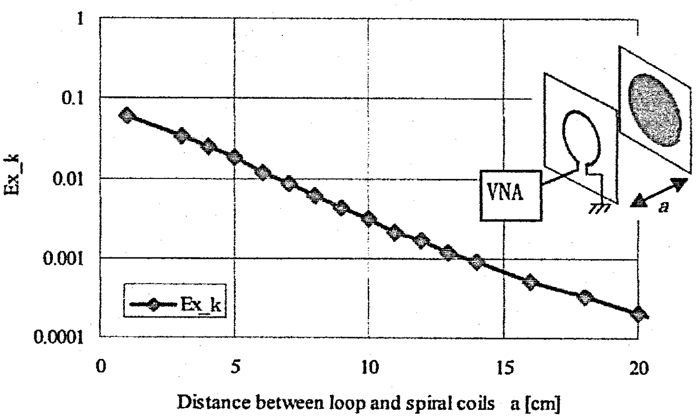


Fig.13 External k for a smaller loop and original spiral resonator (D=10cm)

ここで重要なことは式(9)を満たすループを用意することによって負荷側、電源側の対称性が再び回復された点である。つまりループコイルはトランスとしての役割を果たしていると言うことが分かる。第 2 章式（3）～（5）に示されたごとくこの 2 段 BPF 回路は電気的に左右対称でなければならない（形状的に対称である必要はない）ので、これさえ確保しておけば他の調整、即ちスパイラル間結合係数や動作中心周波数の調整などは比較的容易である。実際に上記のようにコイルを設定し測定した結果を図 14 に示す。VNA の入出力インピーダンスが 50Ωで有るため出力側のデータ S_{21} は取れないが入力側反射係数 S_{11} は良好な回路整合を示している。

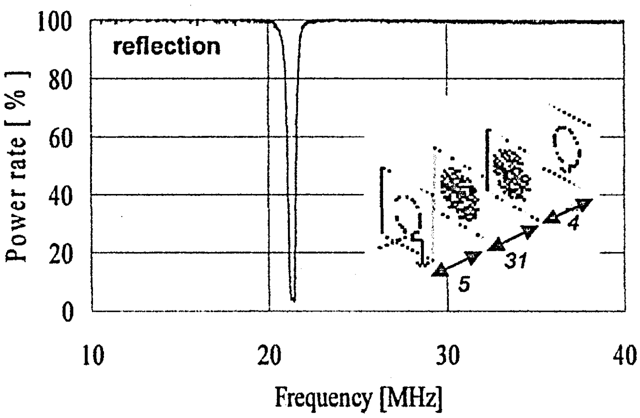


Fig.14 Measured frequency response for unbalanced load resistance

7.まとめ

共振器結合型ワイヤレス給電システムの設計法を示した．一例としてＭＩＴの提唱した磁気結合型コイル共振器システムを取り上げて説明したが，この方法は結合が磁気的であるか電気的であるかに関係せず，又共振器の種類をも問わないので適用範囲は非常に広いという特徴を持つ。即ち、「共振器の３つのパラメータである共振周波数、結合係数、外部Ｑ（外部 k）を適切な値に設定する」という設計ルールの中には共振器の個性を要求するものは何も含まれていないからである。しかしその反面設計理論が自己完結的でないという欠陥もある．６章３節にあるように整合条件を満たすための操作により２つの共振周波数がずれてしまい、全体として整合条件を満たさなくなるという自己矛盾の起こることがあり，逐次的にそれを修復する必要がある。これらの利点欠点をうまく制御してワイヤレス給電システムの設計に利用できれば有意義であると考えている。

文献

(1) A. Kurs, A. Karalis, R. Moffatt, J.D. Joannopoulos, P. Fisher, M. Soljacic, “Wireless Power Transfer via Strongly Coupled Magnetic Resonances”, Science vol.317, pp.83-86, (2007-6)

(2)居村岳広、岡部浩之、内田利之、堀洋一：「等価回路から見た非接触電力伝送の磁界結合と電界結合に関する研究ー共振次の電磁界結合を利用したワイヤレス電力伝送ー」電学論 D, 130, 1, pp.84-92 (2010-1)

(3)粟井郁雄：「共鳴型ワイヤレス給電のＢＰＦ理論による解析」，信学技報，vol.AP2009-169, pp.81-86, (2009-12).

(4)粟井郁雄：「共鳴型ワイヤレス電力伝送の新しい理論」、電学論 C, 130, 6, pp.966-971 (2010-6)

(5)粟井郁雄：「MIT 型ワイヤレス給電システムの精密な設計法」平成 22 年電子情報通信学会総合全国大会予稿集 BS-9-6, (2010-3)

(6) I. Awai, “New Expressions for Coupling Coefficient between Resonators” IEIEC Trans. Electron., E88-C, No.12, pp.2295-2301, (2005-12)

(7) G. Matthaei, L. Young and E. M. T. Jones, “Microwave Filters, Impedance-Matching Networks and Coupling Structures”, Artech House Inc. Norwood MA, 1980

(8)小林禧夫：「マイクロ波共振器の測定技術」、MWE2000

ダイジェスト pp.431-442, (2000-11).

輻射科学研究会資料
RS10-07

移動式ワイヤレス給電システムの開発

役野　茂生　　浪越　和紀　　粟井　郁雄
Shigeo YAKUNO　Kazuki NAMIKOSHI　Ikuo Awai

龍谷大学理工学部
〒520-2194　大津市瀬田大江町横谷 1-5

2010 年 7 月 1 日

於龍谷大学瀬田キャンパス

1. まえがき

移動式ワイヤレス電力伝送の技術は走行中の電気自動車への給電及び路面電車からのパンダグラフの除去など様々な応用が可能である。我々は、それを方向性結合器及び方向性フィルタの概念を用いて実現することを提案した[1]~[3]。これら2つの方式をそれぞれ線路結合方式、線路/共振器結合方式と呼んでいる。

今までのところ我々の研究で明らかになっていることは､線路/共振器結合方式で2dBの結合度でワイヤレス電力伝送可能であるということである。しかし、それは送受電間に空間がない状態であり、円滑に電力線に沿って移動させるためには送受電体間に空間が必要である。従ってこの論文では空間を設けた上で、それをできるだけ大きくし、不整合の解消を試みた。

方向性結合器のような一軸対称の4端子対回路ではそれぞれのポートで必ず整合可能であることが回路理論から導かれている[4]。従って整合の確かな手段は分からないが、試行錯誤の中で複数の回路素子を組み合わせて取り付けることで何とか不整合を解消できないかと考えた。一旦線路結合方式で最適な回路素子の組み合わせが分かると､線路/共振器結合方式の2つの結合部分でも同様の方法で不整合の解消が可能である。つまり線路/共振器結合方式のリング共振器を半分に分割し、2組の線路結合方式を作る。そしてそれぞれについて回路素子を付加して不整合を解消し、最後に回路素子を取り付けたまま2組の回路を接続して線路/共振器結合方式に戻し、不整合を解消しようと試みた。

2. 線路結合方式

図1は線路結合方式の概念図である。線路1を電力供給線とし、線路2を受電線とした。我々はこのように改造した方向性結合器タイプの給電システムを線路結合方式と呼ぶ。通常の方向性結合器は共通の接地面をもったエッジ結合構造である。我々が考える線路結合方式は図2のように結合を強めるためにブロードサイド結合と変更し、電力線に沿って受電体を移動可能とするために送受電体間に空間を設けた。

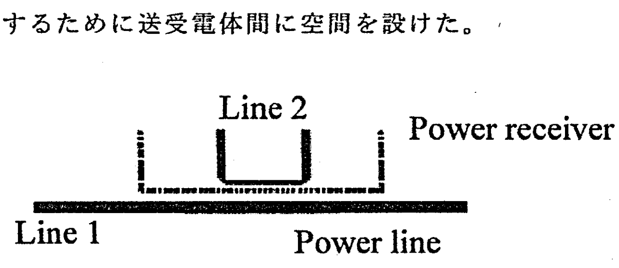


図1,線路結合方式の概念図

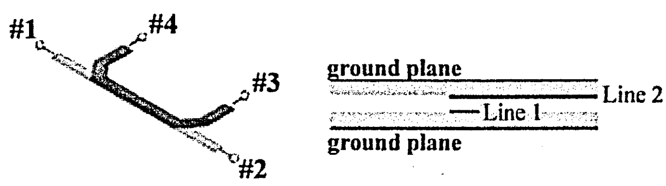
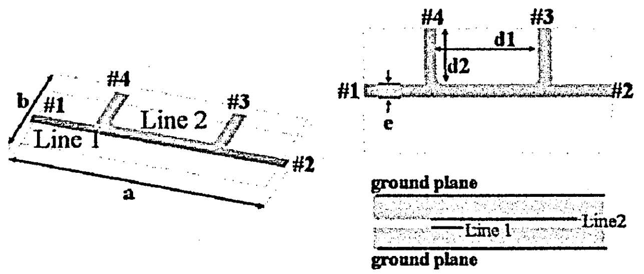


図2,線路結合方式の基本構造

移動式ワイヤレス電力伝送を可能するために電力線を一様な線路にしなければならない。しかし、通常の方向性結合器は結合部分とそうでない部分では線路幅が異なる構造をとる。従って線路を一様化すると結合部分に不整合が生じてしまう。我々はこの生じた不整合を回路素子の付加によって改善しようと試みた。

図3は回路素子を一切取り付けていない場合の線路結合方式の構造図である。そのときのシミュレーション結果を図4に示す。図4より透過($|S_{41}|$)の特性が動作周波数2.45GHzで非常に低い値であることが分かる。



a=40, b=20, c=3.3, d1=16.5, d2=9 e=2.4,

Gap between Line1 and line2 = 0.5 unit[mm]

図3.シミュレーション構造

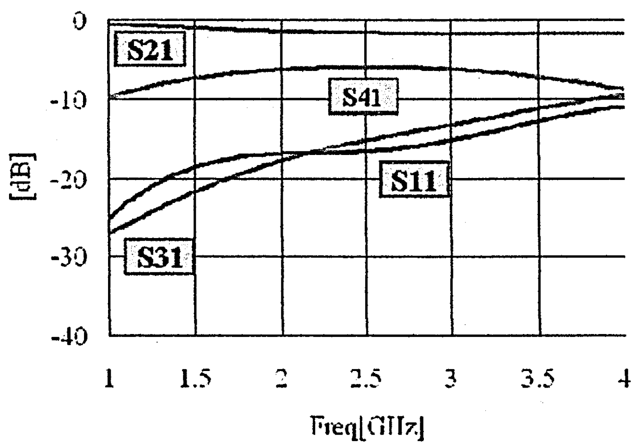
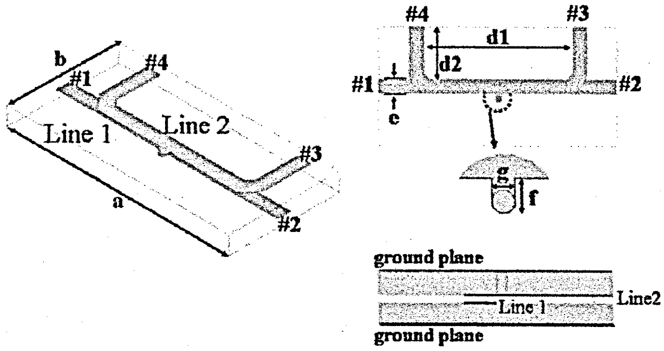


図4.シミュレーション結果

図3の回路パターンに並列のインダクタンス素子を取り付けた。取り付け方は図5のように線路2の中央

に付加した。シミュレーション結果を図6に示す。図4と比較するとインダクタンスの素子を付加することで透過(|S_{41}|)の特性が大幅に改善されたことが分かる。しかしまだ十分でない。



a=40, b=20, c=3.3, d1=25, d2=9 e=2.4, f=1.5, g=1

Gap between Line1 and line2 = 0.5　unit[mm]

図 5.シミュレーション構造

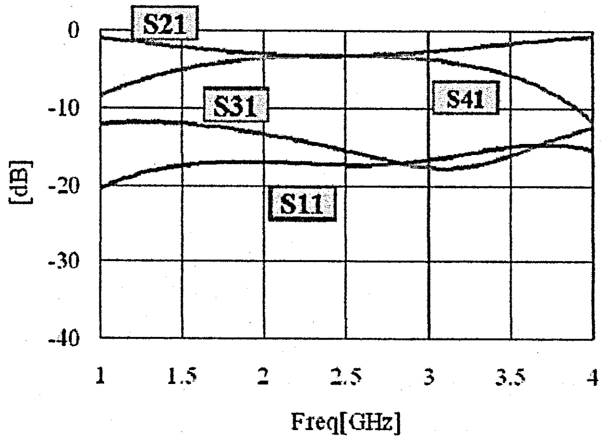
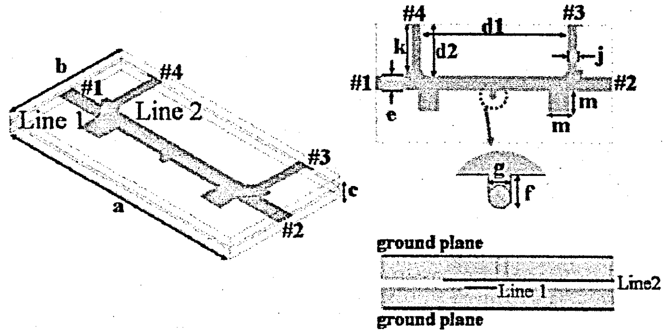


図 6.シミュレーション結果

さらなる特性の改善を行うために図 7 のように直列のインダクタンス素子、並列のキャパシタンス素子を取り付けた。そのシミュレーション結果は図8である。図8から透過(|S_{41}|)は図4の素子を付加していない場合より高い値をとることが分かる。図7の実験結果を図9に示す。実験結果から不整合は解消されたことが分かるが、動作周波数が 2GHz まで下がるという結果になっていしまった。この原因として2本の線路が互いに独立な接地面を持っているということが考えられる。この周波数のズレを解消することは今後の課題である。



a=40, b=20, c=3.3, d1=25.5, d2=8.8, e=2.4

f=1.5, g=1, j=1, k=7.5, m=3.5

Gap between Line1 and Line2 = 0.5　unit[mm]

図 7.シミュレーション構造

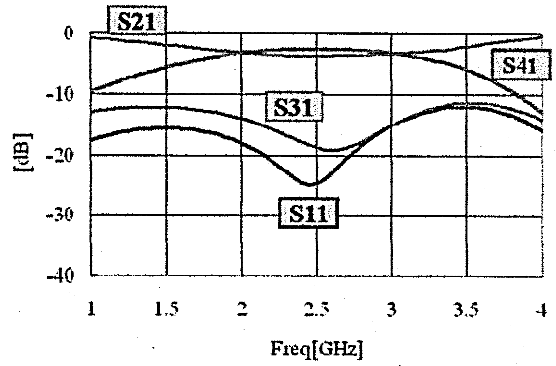


図 8、シミュレーション結果

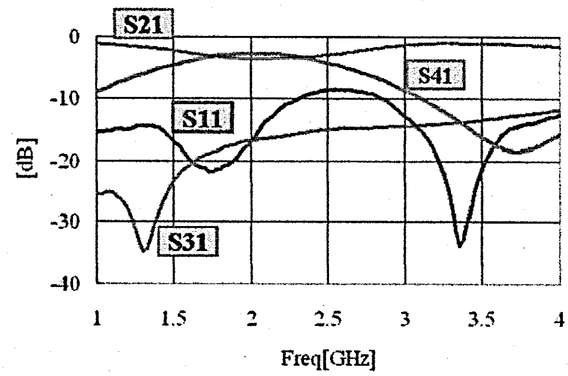


図 9、実験結果

3.線路/共振器結合方式

方向性フィルタとは2本の線路間にリング共振器をいくつか挿入したものを指す。しかし電力伝送においては、動作周波数での特性が重要であり、帯域外特性を考える必要がないためリング共振器は1ヶだけ用いる。また移動式ワイヤレス電力伝送を可能にするためには線路は一様でなければならないので図 10 のような回路が基本型となり受電体をリング共振器と線路 2 とし、線路1は電力供給線とした。このように方向性

フィルタを改造した構造を線路/共振器結合方式と呼ぶ。

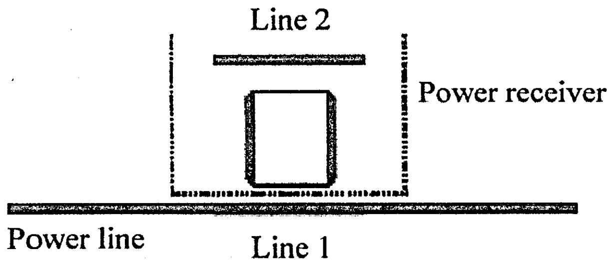
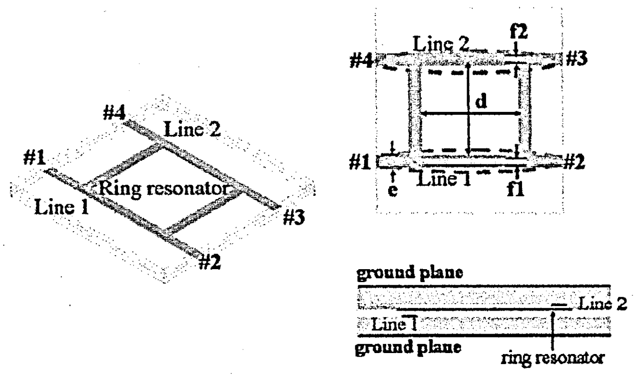


図 10,線路/共振器結合方式の概念図

線路結合方式と同様の改造を施した。つまりそれは結合を強めるためのブロードサイド結合化、線路の一様化、送受電間の空間配置を行った。そしてその結果生じる線路 1 と受電体との間での不整合を解消しなければならない。

図 11 は以前我々がシミュレーションしていた構造である。結合線路幅を調節することで不整合を解消しようとした。しかし図 12 のシミュレーション結果のように反射($|S_{11}|$)の谷が 2.45GHZ からかなり離れてしまうという結果になった。又結合度も目標とする 0dB には遠いものであった。そのためこの方法での整合には限界があると判断し新しい方法として線路結合方式と同様に回路素子を付加することで不整合の解消を考えた。



a=36,b=44,c=3.5,d=18.4,e=2.4,f1=1.1,f2=1.5

Gap of Line1 to ring resonator = 0.5

Gap of Line2 to ring resonator = 0.2　　unit[mm]

図 11、以前行っていたシミュレーション構造

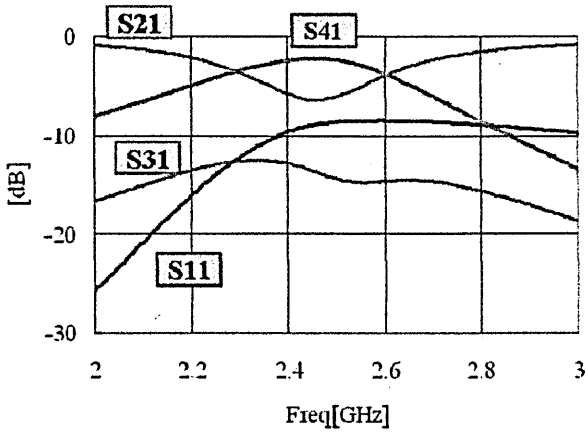


図 12、シミュレーション結果

シミュレーションを簡単にするために図 13 のようにリング共振器を半分に分けた。それぞれは図 7 の線路結合方式と基本的に同じであるので我々は線路 1 及び線路 2 と対面するリング共振器の結合部分で不整合の解消を試みた。その後不整合を解消した構造のままそれぞれを再びつなげて線路/共振器結合方式に戻す。

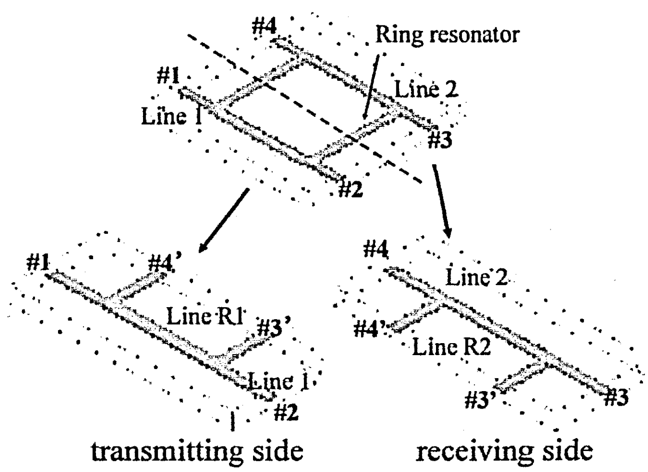
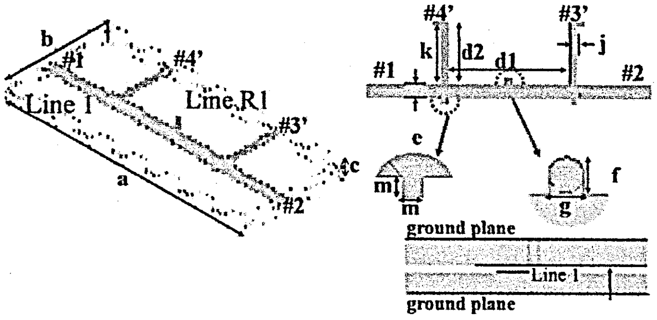


図 13. シミュレーションを簡便にするための線路/共振器結合の分割

線路 1 と線路 R1 での不整合の解消方法は図 7 と同じである。しかし、より良い整合を目指すために図 7 の構造から図 14 の素子値へと回路パターンを変更した。即ち並列インダクタンス、直列インダクタンス、並列キャパシタンスのサイズを調節した。図 15 から m=4[mm]が最も反射($|S_{11}|$)が少ない値であるということが分かった。



a=40, b=25c=3.5, d1=20.7, d2=10.35, e=2.4,

f=1.1, g=1, j=1.2, k=10

Gap between Line1 and Line R2 = 0.5 unit[mm]

図 14 送電側のシミュレーション構造

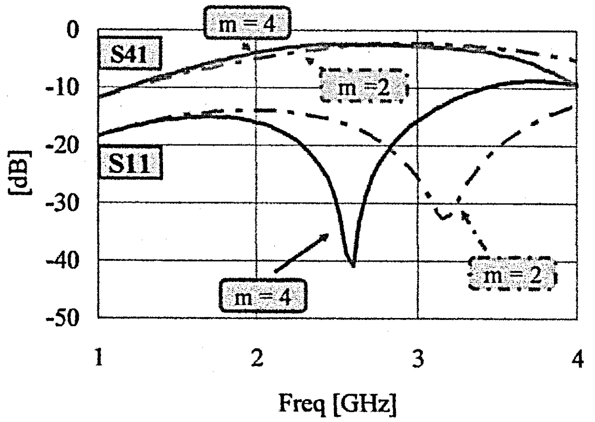
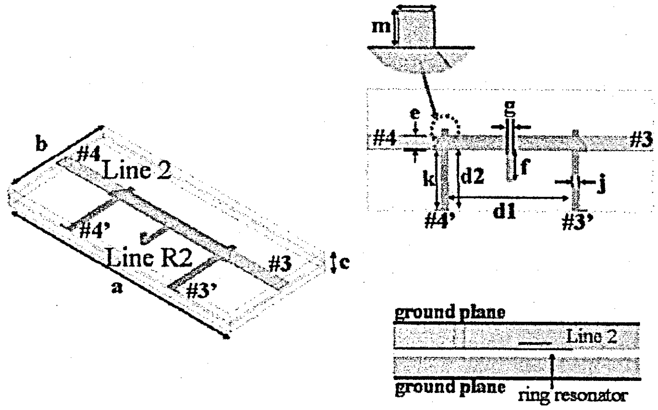


図 15. シミュレーション結果

図 13 において受電側は送電側とではかなりの点で異なっている。それは図 13 に示すように線路 R2 は誘電体（BT-Resin）上に配置されており、線路 2 は誘電体の中に埋められているという点である。しかし我々は送電側と同じような複数の回路素子を取り付けて不整合を解消する。並列のインダクタンスは送電側と異なり非常に長い線路になる。直列のインダクタンス、並列のキャパシタンスを再び取り付け図 16 のような構造となった。並列のキャパシタンスのサイズを変更したときの周波数特性を図 17 に示す。そして図 14、図 16 の構造をつなげた線路/共振器結合方式での特性を調べたが、良い結果は得られなかった。そのため図 18 の構造のように若干の変更を施した。そのときのシミュレーション結果を図 19 に示す。シミュレーション結果から反射($|S_{11}|$)が-26dB 程と非常少ないことが分かる。シミュレーションの設定では導体の損失を考慮していないが、線路 1 から線路 2 までほとんど損失がない。



a=40, b=25, c=3.5, d1=20.7, d2=10.35, e=2.4

f=5.5, g=1, j=1.2, k=10

Gap between Line2 and ring resonator = 0.2 unit[mm]

図 16. 受電側のシミュレーション構造

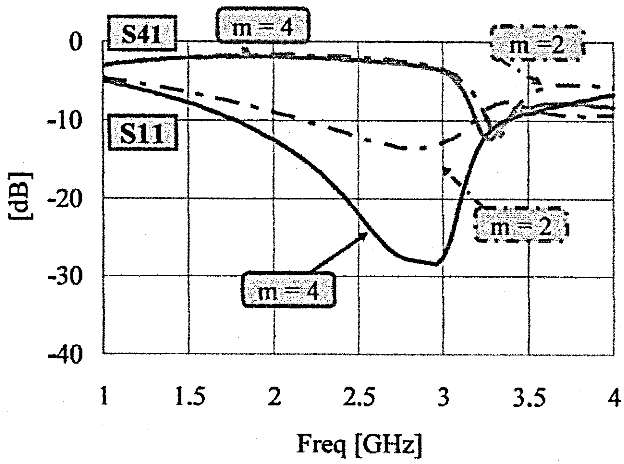
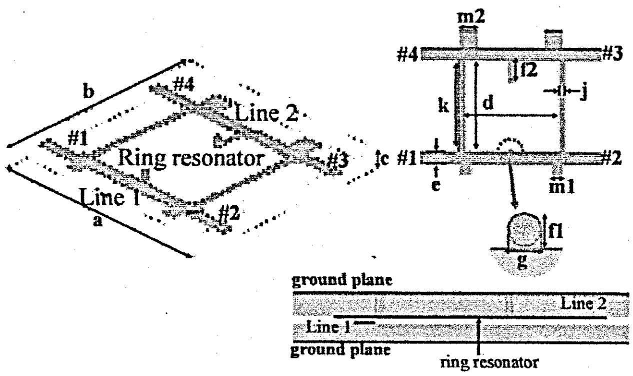


図 17.シミュレーション結果



a=40, b=40, c=3.5, d=21.4, e=2.4, f1=1.1

f2=5.5, g=1, j=1.2, k=20.4, m1=2.6, m2=4

Gap of Line1 to ring resonator = 0.5

Gap of Line2 to ring resonator = 0.2 unit[mm]

図 18. シミュレーション構造

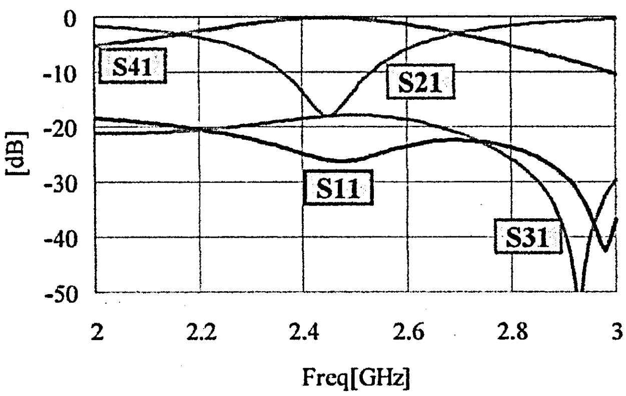


図 19. シミュレーション結果

実験結果を図 20 に示す。動作周波数が再び移動したが 2.37GHz において反射が-20dB、透過は-0.5dB と非常に良い結果が得られた。

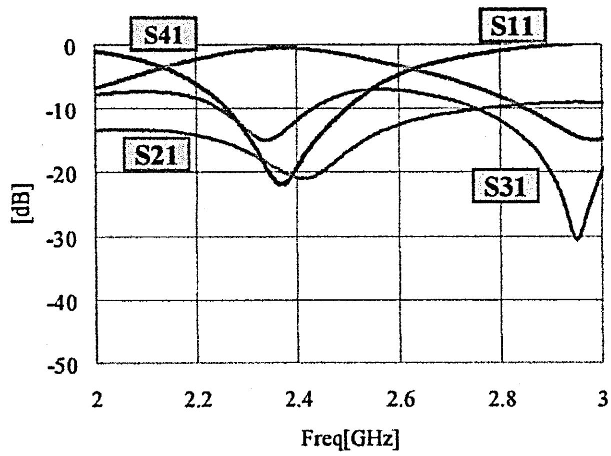


図 20 実験結果

4.まとめ

移動式ワイヤレス電力伝送において 2 つのタイプについて回路素子の付加による不整合の解消を実現した。方向性フィルタ及び結合器タイプついて以下に示す改造を行った。

1)結合を強めるためにブロードサイド結合とした
2)移動していても常に一定の電力を得るために電力線のストレート化を施した。
3) 円滑な移動を可能とするために送受電間に空間を設けた
4) 上記の改造を施した結果生じる不整合を複数の回路素子を取り付けることによって解消した。しかし実験結果は改良の余地があり、今後の課題である。

参考文献

[1] 粟井郁雄、堀邦仁、役野茂生、浪越和紀 "方向性結合器を用いた移動式ワイヤレス電力伝送", 信学技報, M.W 2009-147, pp.23-28, 2009 年 12 月.
[2] 浪越和紀、役野茂生、堀邦仁、粟井郁雄 "方向性フィルタを用いた移動式ワイヤレス電力伝送", 信学技報, M.W 2009-179, pp.1－6, 2010 年 3 月.
[3] 役野茂生、浪越和紀、粟井郁雄 "線路結合型ワイヤレス電力伝送の特性改善", 信学技報, M.W 2010-22, pp.45-55, 2009 年 5 月.
[4] 太田 勲 "方向性結合器/3dB ハイブリッド設計の基本的な考え方",信学技報, MW2007-184, pp. 85-90, 2008 年 2 月.

輻射科学研究会資料 RS10-08

1/4 波長マイクロストリップ共振器 BPF の
スプリアス抑圧

白井 高徳　　鈴木暁雄　　粟井郁雄

龍谷大学理工学部

2010 年 7 月 1 日

於龍谷大学 瀬田キャンパス

要約―我々は線路結合型 1/4 波長マイクロストリップ共振器 BPF に新しいスプリアス抑圧法を適用する。共振器を適当な長さで折り曲げ高次モードを抑圧する方法を用いた。しかし、共振器を折り曲げても最低次モードは適度な結合係数を取るようにする。通常、1/4 波長共振器では初めのスプリアスのパスバンドは最低次のパスバンドの3倍に現れる。そこで、提案した方法を用いることによって BPF は最高5倍までスプリアス抑圧の範囲を広げることができた。

1. はじめに

BPF のスプリアス抑圧法の総合的な方法は例としてマルチストリップ共振器 BPF について、現在の著者の1人によって1年前に発表された[1][2]。スプリアスは共振周波数、結合係数、外部 Q の 3 つのパラメータをコントロールすることによって抑えることができる。今回使用する共振器は非常にシンプルな構造のため結合係数だけを用いて抑圧することを考える。基本的な方針は最低次モードを設計した比帯域幅に必要な値と一致させつつ、高次モードの値をできるだけ小さくすることである。1/4 波長共振器に沿った電磁界分布はモード(最低次モード（1/4 波長共振）と2次モード（3/4 波長共振）)によって異なる。それはそれぞれの結合係数を独立に制御できることを示す。共振器を折り曲げることによって2つのモードの結合係数をコントロールした。今回用いた 1/4 波長共振器には4つの結合のパターンが考えられる。まず、共振器をコムラインまたはインターディジタルに配置することができる。次は結合部分にヴィアを配置するかしないかである。これらの構造でスプリアスの抑圧ができることを示す。

2. 結合係数の制御

金属片で構成される2枚の共振器間の結合はそれぞれの共振器の重なり積分によって決定される[3]。

$$k = k_m - k_e \tag{1}$$

上の式で k は結合係数 、k_m は磁界の重なり積分、 k_e は電界の重なり積分を示す。1/4 波長共振器に沿った電磁界分布は図1に示すように正弦波なので図2のような構造を用いる場合、重なり積分が簡単に計算できる。開放端は計算において便宜のため正に荷電するとした。

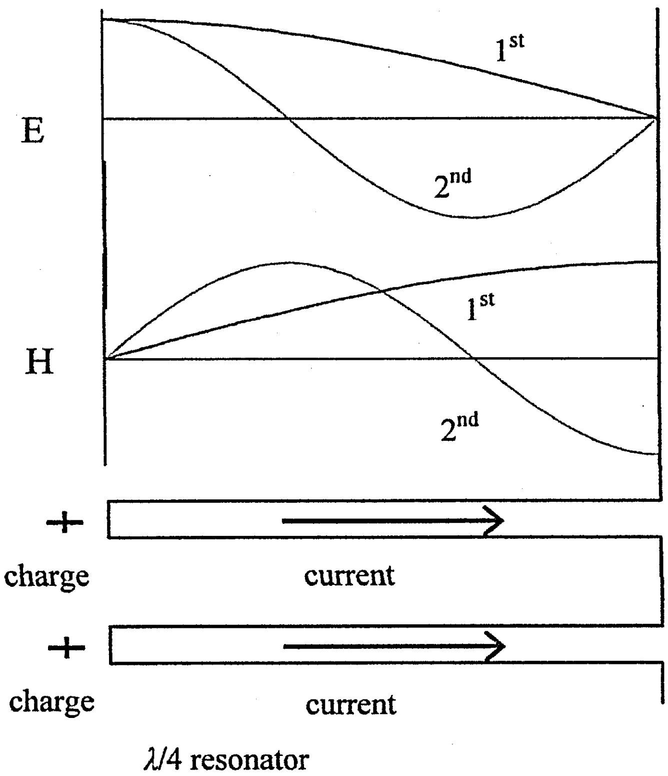


図. 1 1/4 波長共振器に沿った電磁界分布

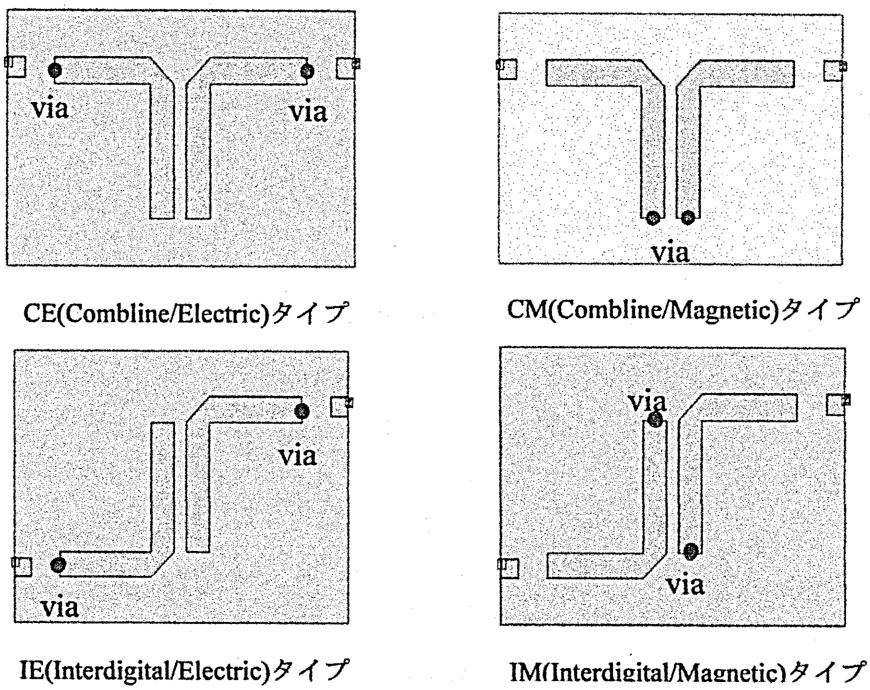


図. 2 構造の４つのタイプ

まず、理論の例証として CE (Combline/Electric)タイプを用いる。最低次モードと２次モード結合係数を独立に制御するために図３で示す結合長 a と共振器間隔 d を調整する。電界の重なり積分は以下のように書くことができる。

$$k_e = A_e \int_0^a \cos^2 \beta x dx = \frac{A_e}{4\beta}(2\beta a + \sin 2\beta a) \tag{2}$$

その時の磁界の重なり積分は以下のようになる。

$$k_m = A_m \int_0^a \sin^2 \beta x dx = \frac{A_m}{4\beta}(2\beta a - \sin 2\beta a) \tag{3}$$

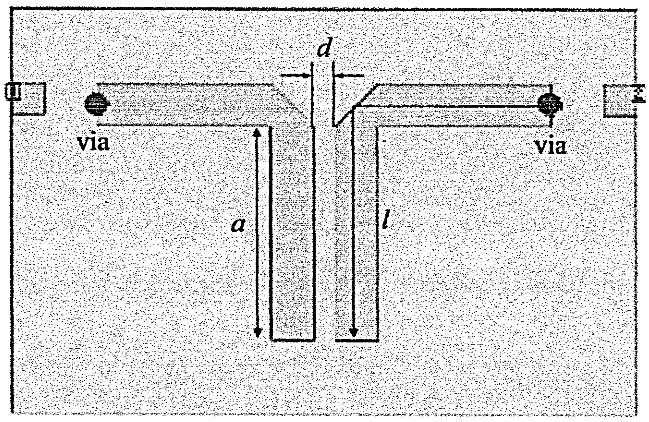


図. 3 共振器の寸法

そして、A_e=0.7 と A_m=1.0 を与えることによって k_e と k_m は２つのカーブで表すことができる。最低次モードのグラフを図４の(a)に示す。伝搬定数βは以下のようになる。λ_0は最低次モードの波長、lは共振器の全長を表す。

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\pi}{2l} \tag{4}$$

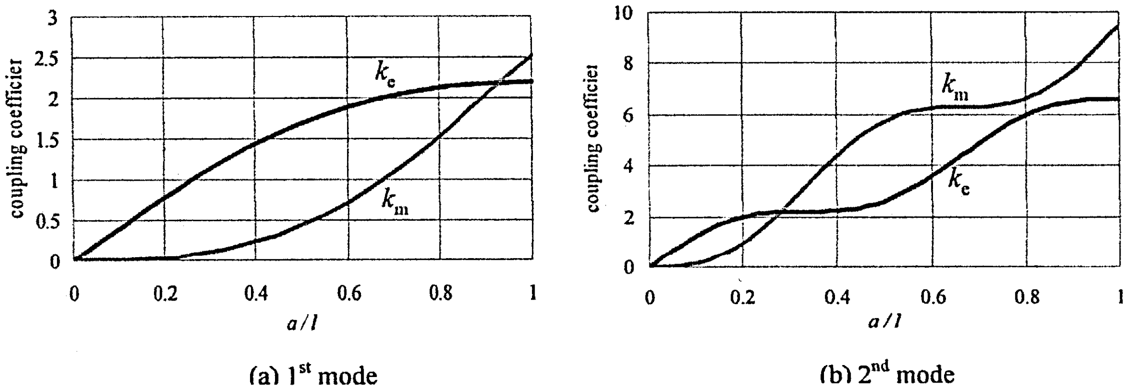


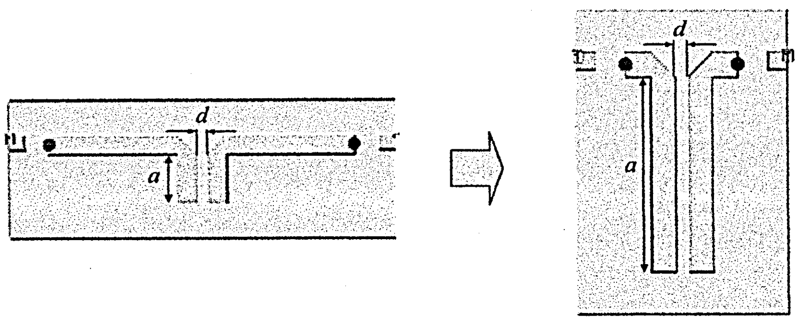
図. 4 最低次モードと２次モードの電磁界の重なり積分

グラフの二つのカーブの交点は、式(1)より最低次モードのゼロカップリングを表す。その交点はa=0.9l.付近である。次に、２次モード（スプリアスモード）の k_m と k_e を図４の(b)に示す。共振器は２次モードでは3/4 波長共振器として扱われるため伝搬定数は以下のようになる。

$$\beta = \frac{3\pi}{2l} \tag{5}$$

２つのカーブは一度交差し、更に一度接近する。結合係数は式(1)のように表されるので２次モードは a=0.3l 付近でゼロカップリングとなる。

次に図５の構造を用いて２次モードが最も小さくなるような結合係数の独立した制御についての例を示す。Sonnet®を用いて d=0.2mm の時の結合係数を算出した。結果を図６に示す。最低次モードのゼロカップリングは a=16mm、２次モードは a=5.2mm であることがわかる。この結果は上記で示した結果とほぼ一致していると言える。この２次モードのゼロカップリングはスプリアス抑圧にうまく利用する事ができる。



a = 2 ~ 17 [mm]

d =0.2 ~ 1.5 [mm]

図. 5　異なった結合長 a による構造の変化

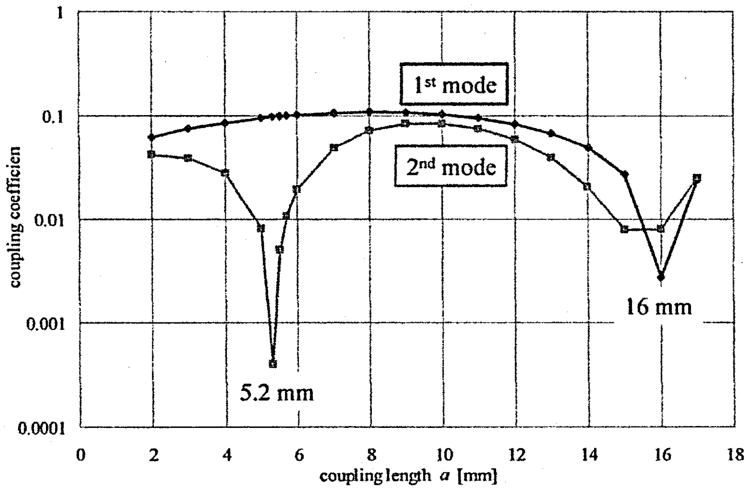


図. 6 解析で求めた結合係数

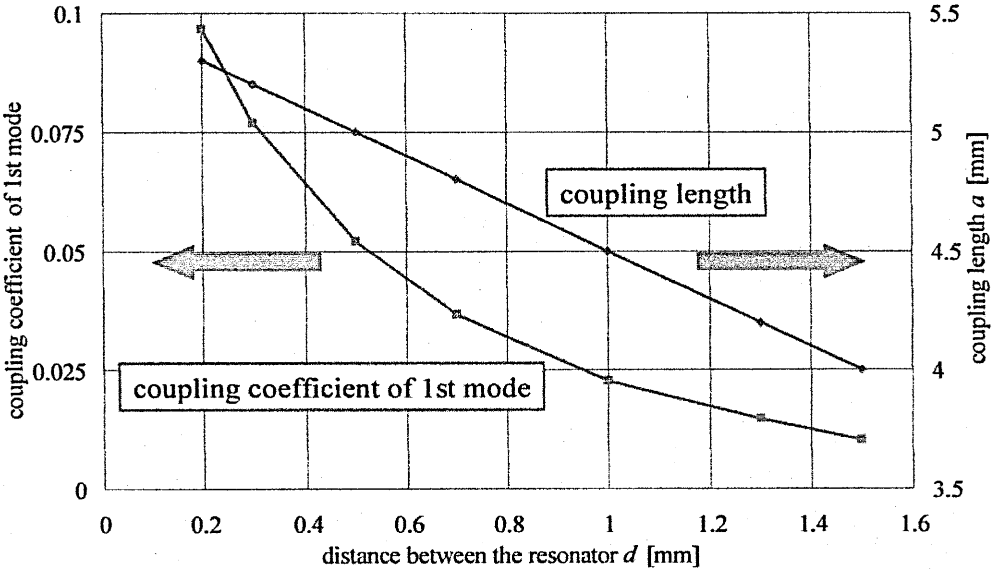


図. 7　２次モードがゼロカップリングする結合長とその時の最低次モードの結合係数

さまざまな共振器間隔 d で同じ解析をした結果から図７の結果を得た。グラフの１つのカーブは共振器間隔を変化させることによって最低次モードの結合係数が 0.1 から 0.01 までの値を取るということを示し、もう一つのカーブは結合長を選ぶことにより２次モードの結合係数が最低次モードの結合係数の 1/10 以下に抑えられるということを示す。同じような研究は他の３つの構造でも行った。結果は最低次モードの結合係数が 10 倍の変化を取る間、２次モードの結合係数はゼロカップリングを示していた。

３. BPF 設計

最も単純な２段の BPF を設計する。以下の式から結合係数と外部 Q が与えられる。

$$\left.\begin{aligned} k_{1,2} &= \frac{w}{\sqrt{g_1 g_2}} \\ Q_e &= \frac{g_0 g}{w} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

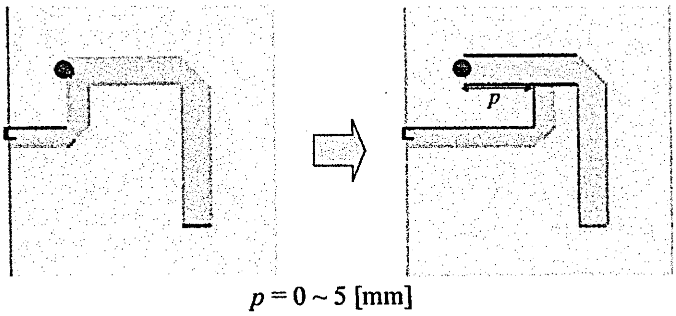
k_{12}は２つの共振器間の結合係数、Q_eは入出力の外部 Q を表す。g_nはプロトタイププローパスフィルターの g 値を表す。直感的な理解を得るためにこれから外部 Q ではなく外部 k (外部回路との結合係数)を使う事とする。２つの量はを以下に示すように逆数関係となる。外部 Q は共振器が外部回路にエネルギーを消費される度合いを表すものであったが外部 k は共振器と外部回路との結合の強さを表すものと位置づけられる。

$$k_x = \frac{1}{Q_e}\left(= \frac{w}{g_0 g_1} = \frac{w}{g_2 g_3}\right) \tag{7}$$

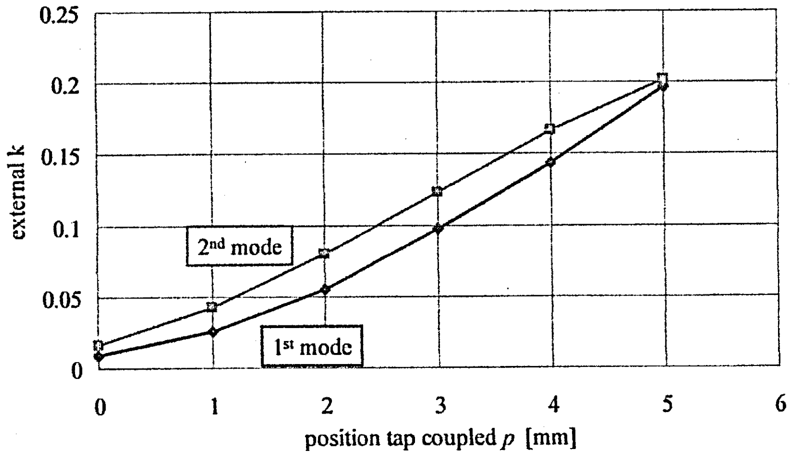
CE 構造において結合係数のデータをすでに得ているのでそれを用いた２段のワグナー型 BPF を設計していく。それに必要な g 値は以下の通りである。

$$g_0 = g_3 = 1, g_1 = g_2 = \sqrt{2} \tag{8}$$

まず、フィルタ設計に必要な外部 k を求めなくてはならない。Sonnet®を用いてビアのついた開放端を p=0 とし横に外部線路をスライドさせながら外部 k を求めた。外部 k はタップ位置をずらすにつれて増加していく傾向が見られた。２次モードの外部 k が最低次モードの外部 k よりも大きくなっているが、２次モードの結合係数が 0.001 以下であるため２次モードはミスマッチングになる。それは良い抑圧ができるということである。



図．8　外部 k を変化させるためのタップ位置の変更

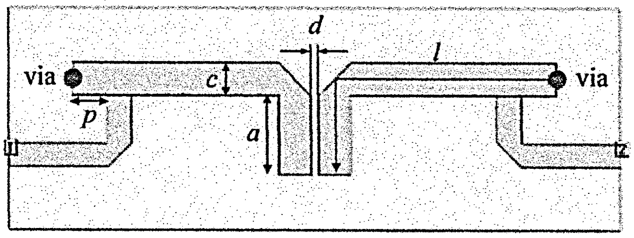


図．9　タップ位置による外部 k

設計手順は以下の通りである
(1) 比帯域 w を選択する
(2) 式(6)をから k_{12} を計算する.
(3) 図７を用いて共振器間隔 d と結合長 a を見つける
(4) 式(7)から k_x を計算する
(5) 図９の最低次モードのカーブを用いてタップ位置 p を見つける

4．実験結果

図１０に示すように比帯域の異なった３つの BPF を設計した。前のセクションで得たそれぞれの比帯域の d、a、p を図１０の下に示す。 解析と実験から得た結果を図１１から図１３に示す。解析においてはいずれの BPF も十分にスプリアスを抑圧することができた。しかし、図１３の実験結果においてスプリアスが十分に抑圧できなかった理由は製作段階の寸法の正確さが影響したと考えている。



substrate	BT_resin	substrate thickness	0.7 [mm]
electric permittivity	3.37	conductor	copper
dielectric loss	$\tan\delta = 0.0036$		

$c = 2\text{mm}, l = 20\text{mm}$

$w = 0.14 \quad \Rightarrow d = 0.2\text{mm}, a = 5.3\text{mm}, p = 3.4\text{mm}$

$w = 0.06 \quad \Rightarrow d = 0.5\text{mm}, a = 5.0\text{mm}, p = 2.2\text{mm}$

$w = 0.014 \quad \Rightarrow d = 1.5\text{mm}, a = 4.0\text{mm}, p = 0.4\text{mm}$

図. １０　設計した構造

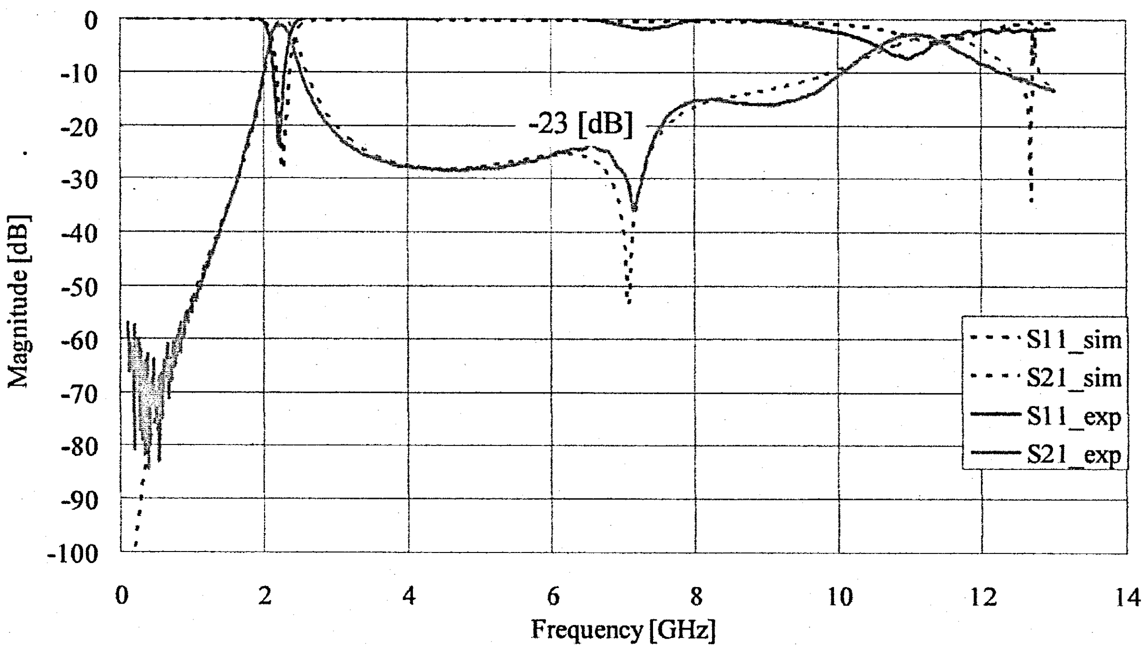


図. １１　w=0. 14 の結果

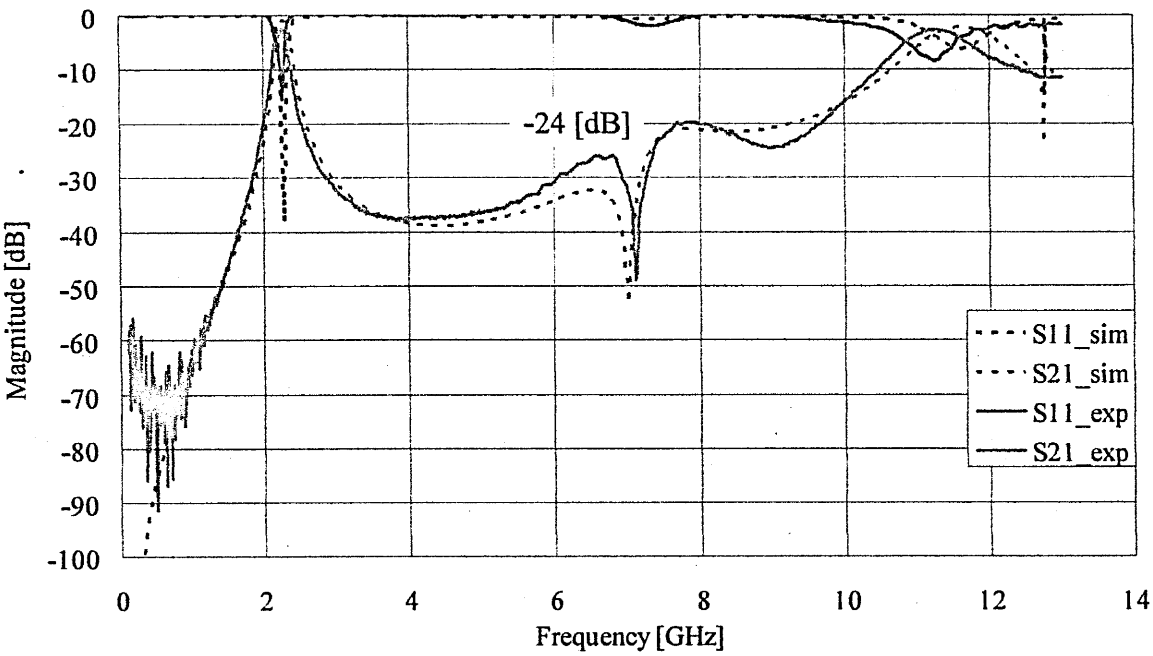


図. １２　w=0.06 の結果

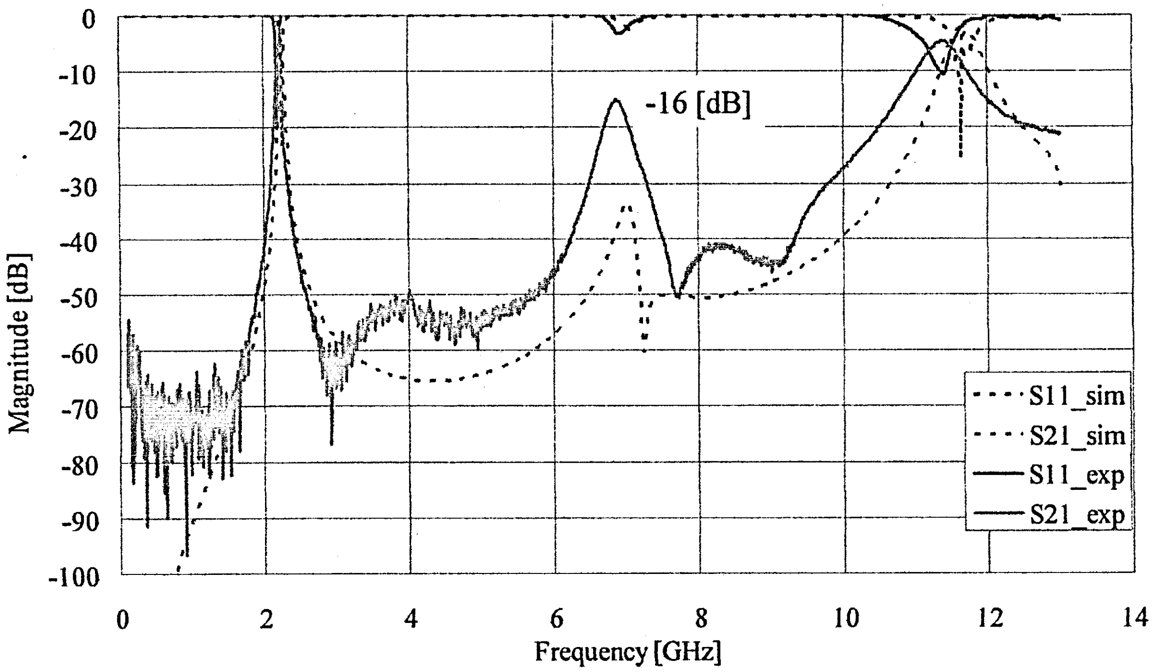


図. １３　w=0.014 の結果

5.まとめ

今回、新しいスプリアス抑圧法によって 1/4 波長マイクロストリップ共振器フィルタの帯域外特性を改善した。共振器を折り曲げることによってそれぞれのモードの結合係数を独立して制御することができ、最低次モードの結合係数が高い値を保ったまま２次モードの結合係数だけを抑えることができた。いくつかの例からその結合係数を用いることによってスプリアスを抑圧したBPF が設計できることが示せたと考える。

参考文献

[1] I.Awai, T.Ishitani, M.Fujimoto, " Multi-strip Resonator BPF with Extended Spurious Suppression in LTCC Structure - Proposal of New Concept to Suppress Spurious Response in BPF - " , Proc. APMC2009, WE1C-4, Dec., 2009

[2] Ikuo Awai, " Wide Band Spurious Suppressin of Multi-Strip Resonator BPF – Comprehensive Way to Suppress Spurious Responses in BPFs- " , IEICE Trans, Electron, Vol.E93-C, No.7, July 2010, to be published.

[3] Ikuo Awai and Yangjun Zhang, " Coupling Coefficient of Resonators – An Intuitive Way of its Understanding- ", IEICE Trans, Electron, (Japanese Edition), Vol. J89-C, No.12, pp. 962-968, Dec., 2006.

輻射科学研究会資料
RS10-09

関西国際空港における諸技術の概要及び今後の課題について

An Overview of Technologies in the Kansai International Airport

廣橋 直人（関西国際空港株式会社計画技術部）

Naoto Hirohashi

Kansai International Airport Co., Ltd

[内容概要]
例会において、関西国際空港の全体構造、立地環境、経営・運営状況の詳細に関する御説明をいただいた後、空港内の通信システム、旅客手荷物処理装置・コンピュータ制御システム、空港全体の平面性を保つためのジャッキアップシステムといった空港業務を支える諸技術に関する具体的かつ詳細な解説をいただいた。また、これらの内容に関する実地視察を経て活発な質疑応答が行われた。

大変興味深い御講演を賜り、また実地視察において大変懇切丁寧な御案内・御説明をいただきました。関西国際空港株式会社、廣橋様はじめ関係者の皆様に厚く御礼申し上げます（以上、文責：浅居）。

以上。

平成 22 年 11 月 12 日（金）
於：関西国際空港株式会社

輻射科学研究会資料
RS10-10

メタマテリアルにおける
第二次高調波の発生

金澤哲夫
玉山泰宏, 中西俊博, 北野正雄
京都大学大学院工学研究科

平成22年12月20日
於 近畿大学東大阪キャンパス

概要

メタマテリアルにおける第二次高調波の発生について解析的，実験的に研究を行った．まず，従来より実験的検討がなされている単一共振メタマテリアルにおける第二次高調波の発生に関して集中定数回路モデルを立て，解析を行った．実験結果と回路解析とを比較し，集中定数回路モデルの妥当性を示した．そして，第二次高調波の発生効率を向上させるために，二倍周波数の電源に対するインピーダンスに着目し，基本波だけではなく，第二次高調波に対しても共振する二重共振メタマテリアルを提案した．二重共振メタマテリアルにより得られた第二次高調波の発生効率を，単一共振メタマテリアルと比べ5倍強くすることができた．

1　はじめに

メタマテリアルとは電磁波や光の波長に対して十分小さい人工構造の集合体をさす．この様な人工構造体は連続媒質として見なすことができ，誘電率，透磁率，旋光性など材質によって一意に定められていた媒質パラメータを自由に変化させることができるとして盛んに研究がなされている [1, 2, 3]．またこれらの媒質パラメータを自由に変化させることができると透明マント [4]，負の屈折率 [5] など従来の光学では考えられなかった現象も実現することができる．

Pendry らは人工磁性媒質 [1] を提案する際に，この人工媒質の共振周波数付近の電磁波を入射すると，人工媒質中の小さな領域にエネルギーが集中することを示した．この領域に非線形性媒質を配置すると媒質の非線形性を効率的に発現させることができる．現在メタマテリアルを用いた第二次高調波の発生に関して，マイクロ波，赤外領域など幅広い周波数帯域で研究がなされている [6, 7, 8]．しかしどの研究においても Pendry らが提案した基本波に対する共振現象を利用したものである．さらにその解析に関しても，基本波に対する共振を利用した第二次高調波の発生，と述べるにとどまり，共振と第二次高調波の関係に対する解析，特にどのような第二次高調波のスペクトルが得られるかは十分に解析されていない．本研究では，この共振現象を利用した単一共振構造における非線形性の増大について回路モデルを用いた解析，実験を行い，両者の比較を行った．さらにこの回路解析から基本波に対するインピーダンスに加え，第二次高調波にインピーダンスの重要性も導きだされた．そこで，単一共振構造の共振周波数の二倍周波数付近で共振する共振回路を結合させた二重共振回路を提案した．この回路を解析し第二次高調波の発生効率の上昇に関して述べる．さらにこの回路で表されるメタマテリアルを提案し，第二次高調波の発生に関する電磁界計算と実証実験を行った．

2　単一共振メタマテリアルによる第二次高調波の発生

2.1　集中定数回路によるモデル化

非線形性について考慮する前に共振型メタマテリアルの回路モデルについて考える．本論文では共振型メタマテリアルとして電磁波の電場に対して応答する図 1(a) のような I 型の金属構造 [9] を考える．この構造は直線金属部のインダクタンス L と隣り合うセル間の

キャパシタンス C により図 1(b) に示すような LC 直列共振回路でモデル化できる．この回路方程式とその定常解は次式のように表される:

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}=V\cos\omega t, \tag{1}$$

$$q=\frac{CV}{\sqrt{\left(1-\omega^2LC\right)^2+\omega^2C^2R^2}}\cos\left(\omega t+\varphi\right). \tag{2}$$

式 (2) から共振条件 $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ を満たす，もしくは V を大きくする (ハイパワーの電磁波を入射する) ことで大きな電荷の振動振幅を得ることが可能となることが分かる．

この共振回路に非線形性を有するキャパシタ $C(q)$ を挿入した場合 (図 2(a)) をその等価回路モデル (図 2(b)) で考える．このとき式 (1) は次の式で書き直すことができる:

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}+\alpha q^2=V\cos\omega t. \tag{3}$$

ここで非線形キャパシタによる電圧降下 v_C を $v_C=q/C(q)=q/C+\alpha q^2$ と二次の項まで展開した．展開係数に関しては $\alpha=\mathrm{d}\left(1/C(q)\right)/\mathrm{d}q\,|_{q=0}$ の関係がある．式 (2) から $\omega=\omega_0$ の共振条件で電荷の振動振幅が大きくなることから，共振条件を満たせば非線形項 αq^2 の項の寄与が大きくなることが分かる．よって入射電磁波の電力に制限があるときでも共振条件を満たすことによって非線形性を増強できることが分かる．

非線形方程式 (3) を非線形係数 α を摂動として摂動法により具体的に解を求める [10]．ここで解として次の解を仮定する:

$$q=q^{(1)}+q^{(2)}\quad\left(q^{(1)}\gg q^{(2)}\right). \tag{4}$$

ここで $q^{(1)}$ は無摂動の解であり，$q^{(2)}$ は摂動解である．これを式 (3) に代入すると次式を得る:

$$L\frac{\mathrm{d}^2\left(q^{(1)}+q^{(2)}\right)}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}\left(q^{(1)}+q^{(2)}\right)}{\mathrm{d}t}+\frac{\left(q^{(1)}+q^{(2)}\right)}{C}+\alpha\left(q^{(1)}+q^{(2)}\right)^2=V\cos\omega t. \tag{5}$$

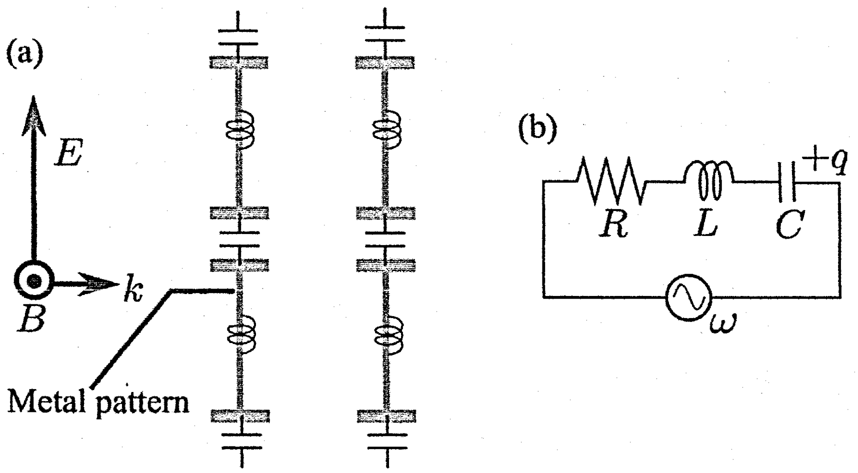


図 1: (a) 電気的共振型メタマテリアル．(b) 等価回路モデル．

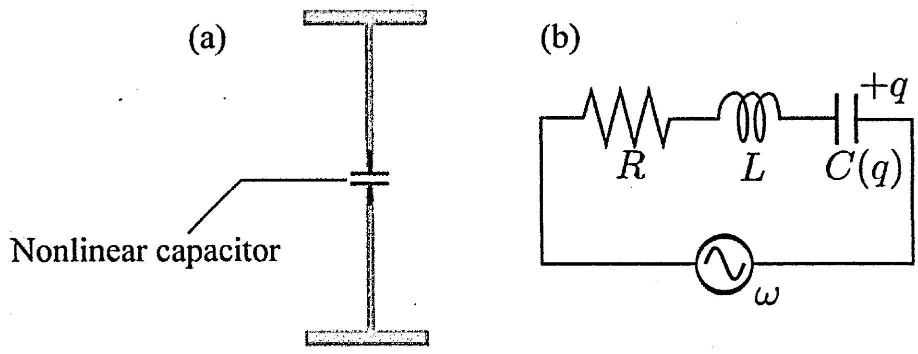


図 2: 負荷として非線形容量を接続した (a) I 型のメタマテリアルと，(b) その等価回路モデル．

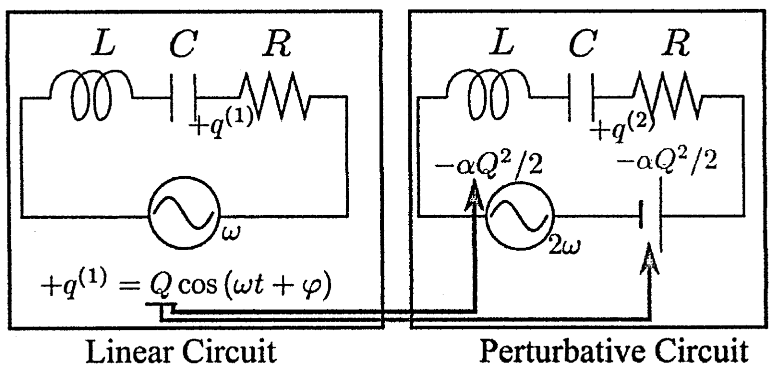


図 3: 摂動法により分解された回路．線形回路の電荷の振動振幅が摂動回路の電圧源の起源になっている．

ここで非線形定数 α と $q^{(2)}$ を一次の微少量とすると式 (5) はそれぞれ無摂動の量，1 次の微少量における関係式で次の 2 式が導かれる:

$$L\frac{\mathrm{d}^2q^{(1)}}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q^{(1)}}{\mathrm{d}t}+\frac{q^{(1)}}{C}=V\cos\omega t, \tag{6}$$

$$L\frac{\mathrm{d}^2q^{(2)}}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q^{(2)}}{\mathrm{d}t}+\frac{q^{(2)}}{C}=-\alpha\left[q^{(1)}\right]^2. \tag{7}$$

式 (6) は線形の LC 直列共振回路の回路方程式であり，式 (7) は線形 LC 直列共振回路に $-\alpha\left[q^{(1)}\right]^2$ の電圧源が接続された形になっている．式 (6) の解は $q^{(1)}=Q\cos(\omega t+\varphi)$ の形をしているため，$-\alpha\left[q^{(1)}\right]^2$ の項が二倍周波数の電源となっていることが分かる．摂動法により得られた式 (6), (7) を回路で表現すると図 3 のようになる．この回路方程式を解いて得られる二倍周波数の電流振幅は次のように表される:

$$|I(2\omega)|=\frac{|\alpha|\,V^2}{\omega^2\,|Z(2\omega)Z(\omega)^2|}. \tag{8}$$

ここで周波数 ω における線形回路の入力インピーダンスとして $Z(\omega)=R-\mathrm{i}\left[\omega L-1/(\omega C)\right]$ とした．インピーダンス $Z(\omega)$ は共振周波数 ω_0 において小さな値をとるので二倍周波数の電流は電源の周波数が共振周波数となるときに大きな値をとる．

実際に得られる第二次高調波はこの共振回路に流れる二倍周波数の電流が放射する電磁波である．よって基本波がこの構造の共振周波数となる際に第二次高調波強度が最大とな

る．得られる第二次高調波の強度 $P(2\omega)$ は $P(2\omega) \propto |I(2\omega)|^2$ という関係がある．よってこの共振構造を用いれば共振周波数 ω_0 において大きな第二次高調波を得ることが可能となる．

2.2 単一共振メタマテリアルにおける第二次高調波の発生

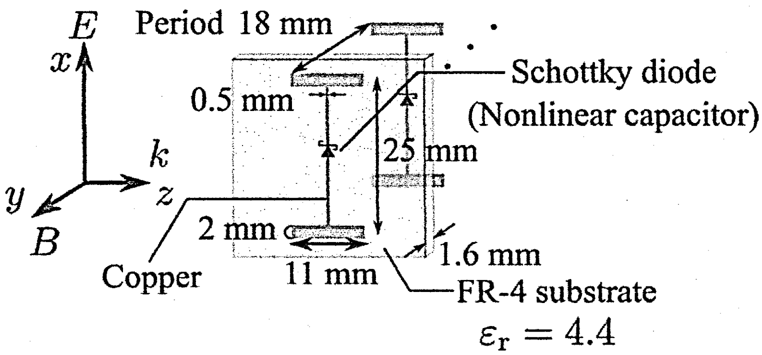


図 4: 実験で用いた単一共振メタマテリアル．

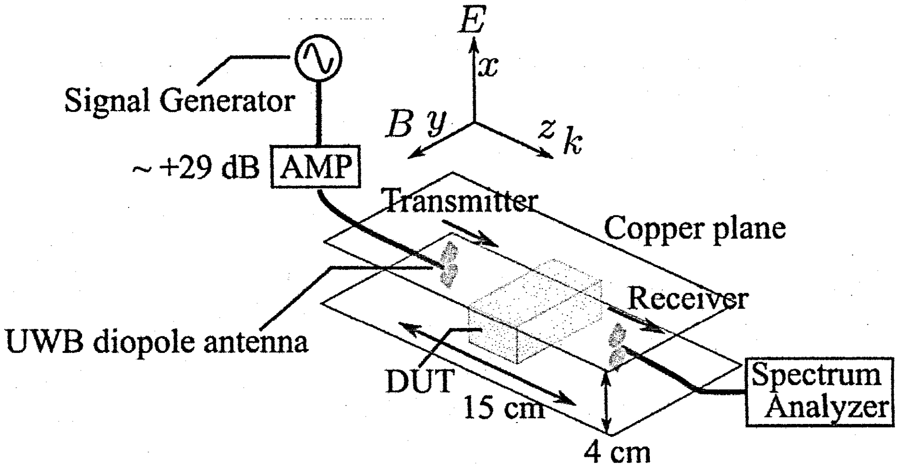


図 5: 第二次高調波を測るために用いた実験系．

本研究では単一共振メタマテリアルとして図 4 に示す I 型のパターンを用いた．この構造は FR-4 基板 (厚さ 1.6 mm) 上に 35 μm の厚さの銅箔で形成されている．非線形容量をもつ素子としてはショットキーダイオード (Rohm RB886G) を用いた．メタマテリアルの測定には図 5 に示す実験系を用いた．測定系は yz 平面に平行な 2 枚の銅板により平行平板導波路をなしている．この導波路では電界は x 方向を向く．送信，受信アンテナは基本波，第二次高調波に対して平坦な特性を得るために Lule らが提案した Diamond dipole antenna を用いた [11]．測定対象物は平行平板導波路中に配置し，単一周波数の電磁波をメタマテリアルに照射し，透過波の基本波，第二次高調波成分の強度を測定した．基本波の透過率に対してはネットワークアナライザを用いて測定を行い，第二次高調波の強度については別にスペクトルアナライザを用いて測定した．

この実験により得られた第二次高調波強度と基本波の透過率を図 6 に示す．図 6 の破線で示されるのが基本波の透過率であり，実線で示されるのが第二次高調波の強度である．基

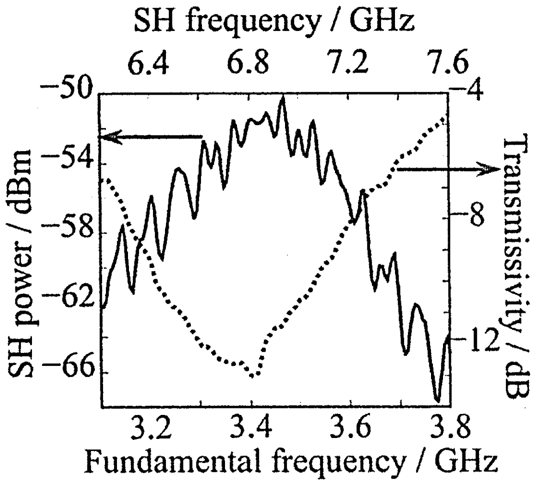


図 6: 単一共振構造の第二次高調波強度 (実線) と基本波の透過率 (破線).

本波の透過率が最小になっている周波数 3.4 GHz は共振周波数であり，その共振周波数付近で第二次高調波が最大となっていることが確認される.

2.3 回路モデルの検証

実験により得られた透過率と第二次高調波の強度を解析するためにここでは媒質パラメータを用いた解析を行い，実験によって得られた第二次高調波と比較する.

まず回路解析で示したようにこのメタマテリアルの電荷振幅の線形特性はローレンツ型である. よってこのメタマテリアルの複素電気感受率 χ_e はローレンツ型となり，この媒質の実効的な比誘電率は次のように表すことができる [9]:

$$\varepsilon_\mathrm{r}(f) = 1 + \chi_\mathrm{e} + \chi_\mathrm{other} = 1 - \frac{F}{f^2 - f_0^2 + \mathrm{i}\Gamma f} + \chi_\mathrm{other}. \tag{9}$$

ここで FR-4 基板の影響を考慮に入れるため周波数に対して変化しない複素電気感受率 χ_other を導入した. ここで屈折率 n, 波動インピーダンス Z, に関しては次の関係が成り立つ:

$$n = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}x}}, \tag{10}$$

$$Z = Z_0\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}x}}}. \tag{11}$$

ここで Z_0 は真空中での電磁波の波動インピーダンスである. 比透磁率に関しては 1 とした. この系に対する透過係数 S_{21} は次のように求まる [12]:

$$S_{21} = \frac{-4Z_0Z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0d}\left\{(Z_0 - Z)^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nk_0d} - (Z_0 + Z)^2\,\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}nk_0d)}\right\}}. \tag{12}$$

ここで d はメタマテリアルの進行方向に対する長さ，k_0 は真空中での電磁波の波数である. この式から得られる電力透過係数 $|S_{21}|^2$ を実験により得られた透過係数にフィッティングする. z 方向に一層のみのメタマテリアルの厚さ d を決定することは難しいが，ここでは I 型のパターンの z 方向の長さを用いて $d = 11\,\mathrm{mm}$ とした. 得られたフィッティング曲線と実験

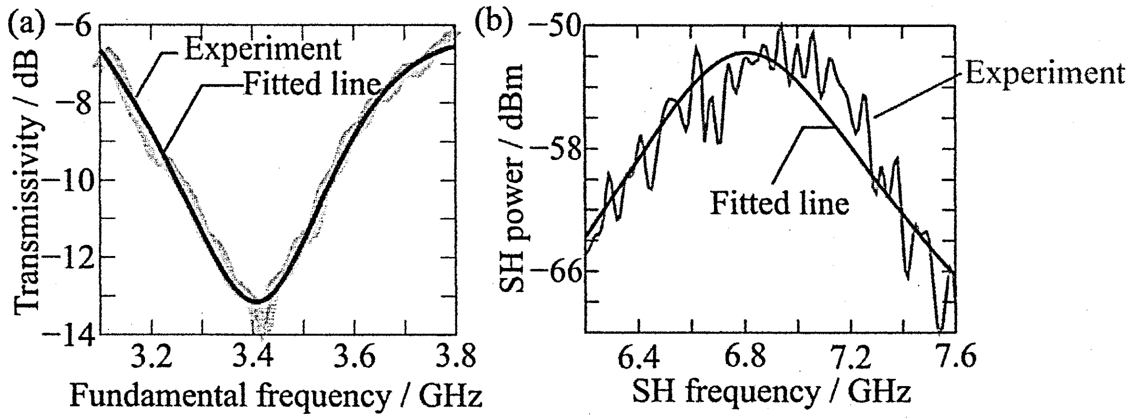


図 7: (a) 基本波の透過率に対するフィッティング．(b) 第二次高調波の強度に関するフィッティング．

データを図 7(a) に示す．図 7 よりフィッティング曲線と実験値がほぼ一致していることが確認された．フィッティングにより得られた値は $f_0 = 3.43\,\mathrm{GHz}, \Gamma = 0.35\,\mathrm{GHz}, F = 12.7\,(\mathrm{GHz})^2$ となった．

得られた結果から第二次高調波の強度を推定する．まず基本波に対する電荷の振動振幅 $Q(\omega)$ に対しては電荷間の長さをかけることで電気双極子をなすので，電気感受率 χ_e と比例関係 $Q(\omega) \propto |\chi_e|$ がある．この電荷振幅の二乗が二倍周波数の電源をつくっていたことから，二倍波のインピーダンスが一定だと仮定すると，二倍周波数の電流振幅 $I(2\omega)$ は $I(2\omega) \propto Q(\omega)^2$ の関係がある．第二次高調波の強度 $P(2\omega)$ は $P(2\omega) \propto I(2\omega)^2$ という関係があるため，結果的に第二次高調波強度は次の様な比例関係がある:

$$P(2\omega) \propto \frac{1}{|f^2 - f_0^2 + \mathrm{i}\Gamma f|^4}. \tag{13}$$

式 (13) により第二次高調波の強度は透過測定へのフィッティングで得られた f_0, Γ と比例係数で決定される．透過測定により得られた f_0, Γ を用い，比例係数のみをフィッティングパラメータとしてフィッティングした結果を図 7(b) に示す．これを見ると第二次高調波の強度とフィッティング曲線はほぼ一致しており，本研究の集中定数モデルで現象を説明できることが確認された．理論曲線と実験によって得られた第二次高調波の強度には 3 dB 程度ずれている周波数もあるが，この大きさはアンテナの特性が完全に平坦ではないことに起因している．

3 二重共振メタマテリアルにおける第二次高調波の発生効率の向上

式 (8) より入射波に対するインピーダンス $|Z(\omega)|$ を低くすることで第二次高調波が効率的に発生することが分かった．しかし，式 (8) から明らかなように，第二次高調波の電流は基本波に対するインピーダンスだけではなく，二倍波に対するインピーダンス $Z(2\omega)$ にも依存している．つまり $|Z(\omega)|$ と同時に $|Z(2\omega)|$ も小さくすることで，より高効率に第二次高調波を得ることが可能となる．本説では，まずこの点に着目して二重共振回路につい

て解析する．この回路を解析し，二重共振構造における第二次高調波の発生効率の増強率に対して述べる．次にこの回路解析の結果を受けて二重共振メタマテリアルの構造を提案する．提案する構造に対して電磁界計算，実証実験を行い単一共振メタマテリアルより高効率に第二次高調波を発生できることができた．

3.1 二重共振メタマテリアルの回路モデル

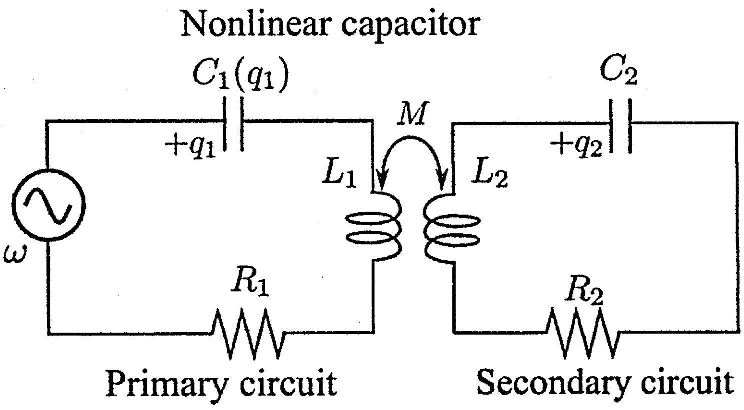


図 8: 提案する二重共振回路.

基本波，二倍波で共振する構造として，本研究では図 8 に示される二重共振回路について考える．この回路は基本波に対して共振する一次側共振回路と二倍周波数付近で共振する二次側共振回路とで構成されている．二つの共振回路は相互インダクタンスで結合されており，その回路方程式は次のように表される:

$$
\begin{cases}
L_1\dfrac{\mathrm{d}^2q_1}{\mathrm{d}t^2}+R_1\dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}+\dfrac{q_1}{C_1}+\alpha q_1^2-M\dfrac{\mathrm{d}^2q_2}{\mathrm{d}t^2} = V\cos\omega t, \\
L_2\dfrac{\mathrm{d}^2q_2}{\mathrm{d}t^2}+R_2\dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}+\dfrac{q_2}{C_2}-M\dfrac{\mathrm{d}^2q_1}{\mathrm{d}t^2} = 0.
\end{cases}
\tag{14}
$$

この二重共振回路を摂動法を用いて解く．ここで摂動解として次の様な解を仮定する:

$$
q_i = q_i^{(1)} + q_i^{(2)} \left(q_i^{(1)} \gg q_i^{(2)}, i=1,2\right).
\tag{15}
$$

単一共振構造と同様に，式 (15) を用いて式 (14) を無摂動の量，1 次の微少量で分解すると次のようになる:

$$
\begin{cases}
L_1\dfrac{\mathrm{d}^2q_1^{(1)}}{\mathrm{d}t^2}+R_1\dfrac{\mathrm{d}q_1^{(1)}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{q_1^{(1)}}{C_1}-M\dfrac{\mathrm{d}^2q_2^{(1)}}{\mathrm{d}t^2} = V\cos\omega t, \\
L_2\dfrac{\mathrm{d}^2q_2^{(1)}}{\mathrm{d}t^2}+R_2\dfrac{\mathrm{d}q_2^{(1)}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{q_2^{(1)}}{C_2}-M\dfrac{\mathrm{d}^2q_1^{(1)}}{\mathrm{d}t^2} = 0,
\end{cases}
\tag{16}
$$

$$
\begin{cases}
L_1\dfrac{\mathrm{d}^2q_1^{(2)}}{\mathrm{d}t^2}+R_1\dfrac{\mathrm{d}q_1^{(2)}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{q_1^{(2)}}{C_1}-M\dfrac{\mathrm{d}^2q_2^{(2)}}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\left\{q_1^{(1)}\right\}^2, \\
L_2\dfrac{\mathrm{d}^2q_2^{(2)}}{\mathrm{d}t^2}+R_2\dfrac{\mathrm{d}q_2^{(2)}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{q_2^{(2)}}{C_2}-M\dfrac{\mathrm{d}^2q_1^{(2)}}{\mathrm{d}t^2} = 0.
\end{cases}
\tag{17}
$$

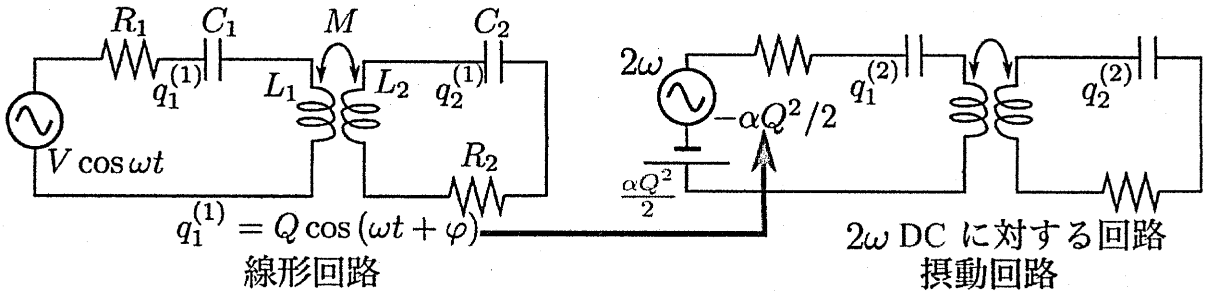


図 9: 摂動法による二重共振回路の分解.

式 (16), (17) はそれぞれ図 9 における線形回路，摂動回路に対応している．基本波に対する回路では単一共振回路と同様に基本波に対する共振で一次側の電荷振幅 Q を大きくすることになる．摂動回路では二倍波の電源に対して小さなインピーダンスをとれば大きな二倍周波数の電流が得られる．二重共振構造では新たに二倍周波数に対して共振する構造を用いているので，この摂動回路におけるインピーダンスを小さくすることができ，大きな二倍周波数の電流が得られる．これらの式を解くことによって得られる二倍周波数の電流はそれぞれ次のように与えられる:

$$\begin{cases} |I_1(2\omega)| &= \dfrac{|\alpha|\,V^2}{\omega^2\,|Z_1(2\omega)+4\omega^2M^2/Z_2(2\omega)|\,|Z_1(\omega)+\omega^2M^2/Z_2(\omega)|^2}, \\ |I_2(2\omega)| &= \dfrac{|\alpha M|\,V^2}{\omega\,|Z_1(2\omega)Z_2(2\omega)+4\omega^2M^2|\,|Z_1(\omega)+\omega^2M^2/Z_2(\omega)|^2}. \end{cases} \tag{18}$$

ここで一次側共振器のインピーダンスとして $Z_1(\omega) = R_1 - \mathrm{i}\left[\omega L_1 - 1/(\omega C_1)\right]$，二次側共振器のインピーダンスとして $Z_2(\omega) = R_2 - \mathrm{i}\left[\omega L_2 - 1/(\omega C_2)\right]$ とおいた．ここで弱結合近似 $|Z_1(\omega)Z_2(\omega)| \gg \omega^2M^2, |Z_1(2\omega)Z_2(2\omega)| \gg 4\omega^2M^2$ を用いると式 (18) は次式のように簡単化することができる:

$$\begin{cases} |I_1(2\omega)| &= \dfrac{|\alpha|\,V^2}{\omega^2\,|Z_1(2\omega)Z_1(\omega)^2|}, \\ |I_2(2\omega)| &= \dfrac{|\alpha M|\,V^2}{\omega\,|Z_1(2\omega)Z_2(2\omega)Z_1(\omega)^2|}. \end{cases} \tag{19}$$

式 (19) では一次側共振器に流れる電流は相互インダクタンス M に依存せず単一共振構造における二倍周波数の電流 (式 (8)) と一致している．二次側共振器に流れる二倍周波数の電流は M に比例している．

ここで実際に得られる第二次高調波について考える．二次側共振器に流れる二倍周波数の電流が一次側共振器に流れる電流に比べ十分大きい場合には第二次高調波の放射強度はほぼ $I_2(2\omega)$ によって決定される．この場合，二重共振構造によって得られる電磁波の強度は $|I_2(2\omega)|^2$ に比例し，単一共振構造と比べおよそ $|\omega M/Z_2(2\omega)|^2$ 倍の第二次高調波強度が得られる．

3.2 二重共振メタマテリアルの構造

同様の等価回路モデルをもつ二重共振メタマテリアルとして本研究では図 10 に示す構造を用いることとする．I 型の構造は単一共振メタマテリアルと同じ構造を用い，これを一

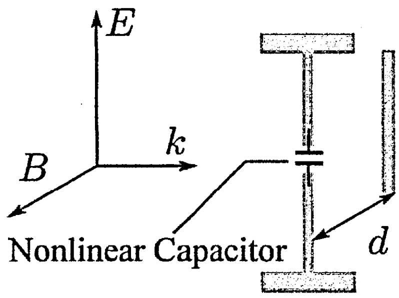


図 10: 提案する二重共振メタマテリアル.

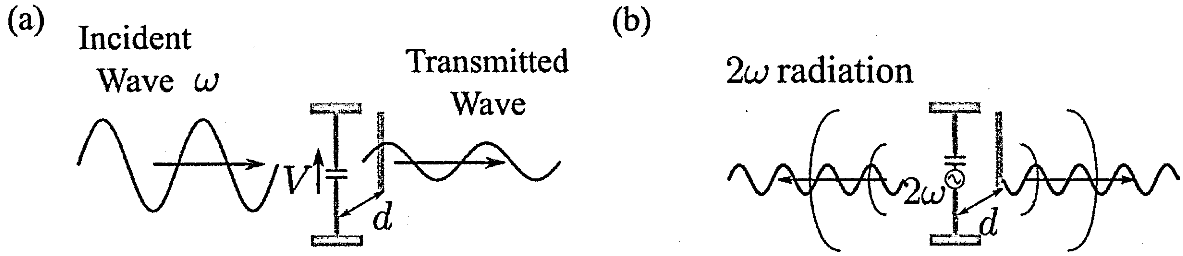


図 11: 摂動法により第二次高調波発生過程を (a)(b) の二つの電磁界問題に分解する. (a) 基本波に対する電磁界解析系. (b) 第二次高調波に対応する電磁界解析系.

次側共振器とする. 二次側共振器としては棒状のパターンを用いる. これは単一共振構造と同様の原理で共振し, その共振周波数は一次側共振器のほぼ2倍になるように設計する. 電場は両方の共振器を同時に励振することができるが, 基本波に対する二次側共振器からの入力インピーダンスは大きいため二次側共振器からの励振は無視することができる.

3.3 二重共振メタマテリアルにおける第二次高調波発生効率の数値解析

二重共振メタマテリアルによる第二次高調波の発生効率について CST 社の Microwave Studio の Transient solver を用いて電磁界計算を行った. 非線形性に関する問題では, 直接非線形性を考慮した電磁界計算を行うと安定性の問題や, 高調波の振る舞いが理解しにくいことから本研究では摂動法を用いて第二次高調波発生の問題を分割し, その電磁界解析を行った. 基本波に対しては図 11(a) のように, 基本波を入射した際キャパシタの部分に印加される電圧と基本波の透過率を解析した. 一次側共振器のみの場合は共振周波数において一次側共振器のキャパシタに大きな電圧が印加されるが, 本研究ではさらに二次側共振器を用いているため二次側共振器の影響も考えられる. そこで二次側共振器と一次側共振器との共振器間距離 d を変化させながら透過率, キャパシタにかかる電圧を計算する. 第二次高調波に対しては, 非線形キャパシタの部分から二倍波の電圧源が生成されることから, 図 11(b) に示したように二倍波に対する電圧源をキャパシタと直列に接続し, 放射する電磁界強度を計算した.

3.3.1 基本波に対する電磁界解析

基本波に対する解析系を図 12(a) に示す. 用いたメタマテリアルの一次側共振器の構成を

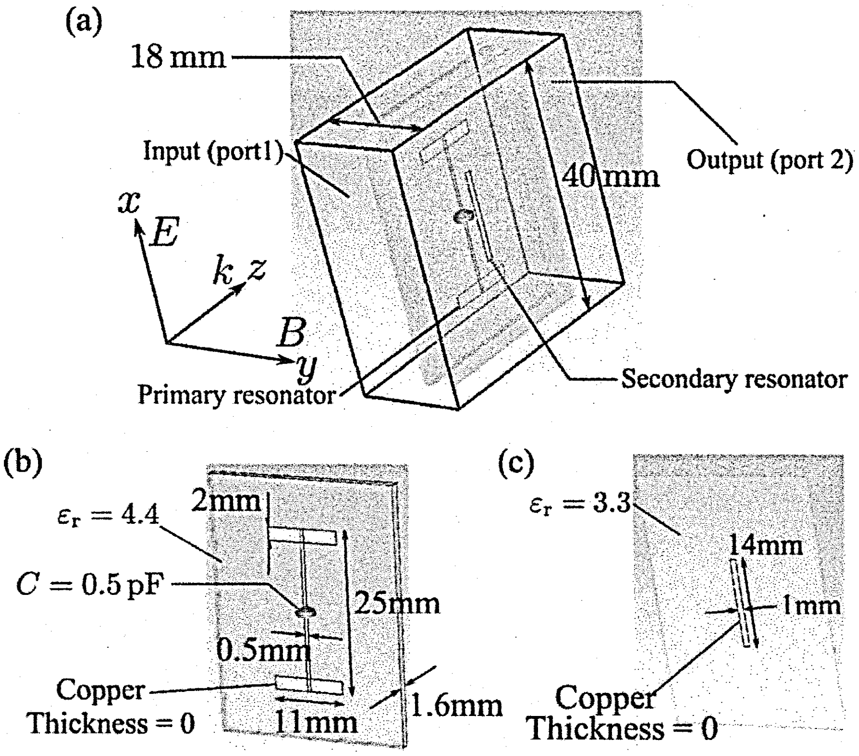


図 12: 基本波に対する (a) 解析系，(b) 一次側共振器，(c) 二次側共振器．解析系に対して x 方向には電気境界条件，y 方向には磁気境界条件を用いている．

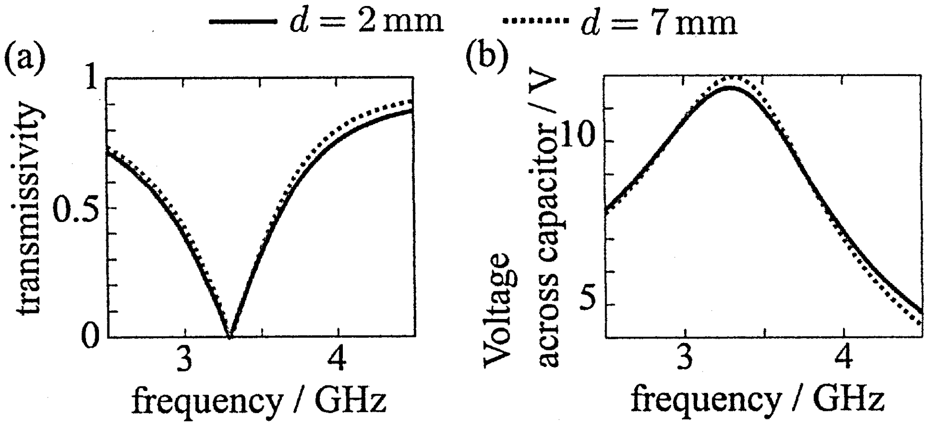


図 13: 基本波に関する電磁界計算の結果．共振器間距離 d に対する (a) 透過率，(b) キャパシタに印加される電圧．

図 12(b) に，二次側共振器の構成を図 12(c) に示す．一次側共振器は銅 (導電率 5.8×10^{7} S/m) による I 型の構造に負荷として集中定数的に線形容量 (0.5 pF) を接続している．また二次側共振器は銅による棒状の構造を用いた．それぞれのパターンには実験で用いる基板を考慮し比誘電率 4.4 と 3.3 の誘電体基板を用い，それぞれのパターンが向かい合う様に配置する．Port1 から電磁波を入射し，Port2 へ透過する電磁波を計算する．さらにキャパシタにどれだけの電圧が印加されるかを計算する．

基本波の透過率とキャパシタに印加された電圧を図 13 に示す．図 13 を見ると一次側共振器のみで構成される場合と同様に透過率が最も小さくなる周波数においてキャパシタに印加される電圧が大きくなっていることが確認された．また共振器間距離 d を小さくしても透過特性，キャパシタに印加される電圧はさほど変化しないことが確認された．これは二次側共振器のインピーダンスが基本波に対しては大きく，二次側の影響は小さいことにより説明される．

3.3.2 第二次高調波に対する電磁界解析

第二次高調波に対する電磁界解析については図 14(a) に示した系で解析を行った．解析系は基本波に対する電磁界解析とほとんど変わっていないが，Port1, 2 の境界は吸収境界を用いている．一次側共振器の構成を図 14(b) に示した．一次側共振器は基本波で用いたものと同じパターンを用いているが，集中定数のキャパシタの部分をキャパシタと二倍周波数付近の電圧源で置き換えている．二次の摂動回路 (図 9) において非線形容量成分が二倍波の電圧源になることからこのような系を用いた．二次側共振器は基本波の電磁界解析で用いたものと同じものを用いている．この構造において Port1 で観測される信号強度 $S(\omega)$ を励振源での信号強度 $U(\omega)$ で割った S/U を放射効率として計算した．

第二次高調波付近の周波数に対する放射効率の解析結果を図 15 に示す．二次側共振器がない場合を実線で示しており，二次側共振器がある場合は破線で示した．図 15 では d が大きい領域では二次側共振器がない場合よりも放射効率が小さいが，d を小さくすると放射効率が上昇し，放射効率は二次側共振器がない場合よりも大きくなっている．

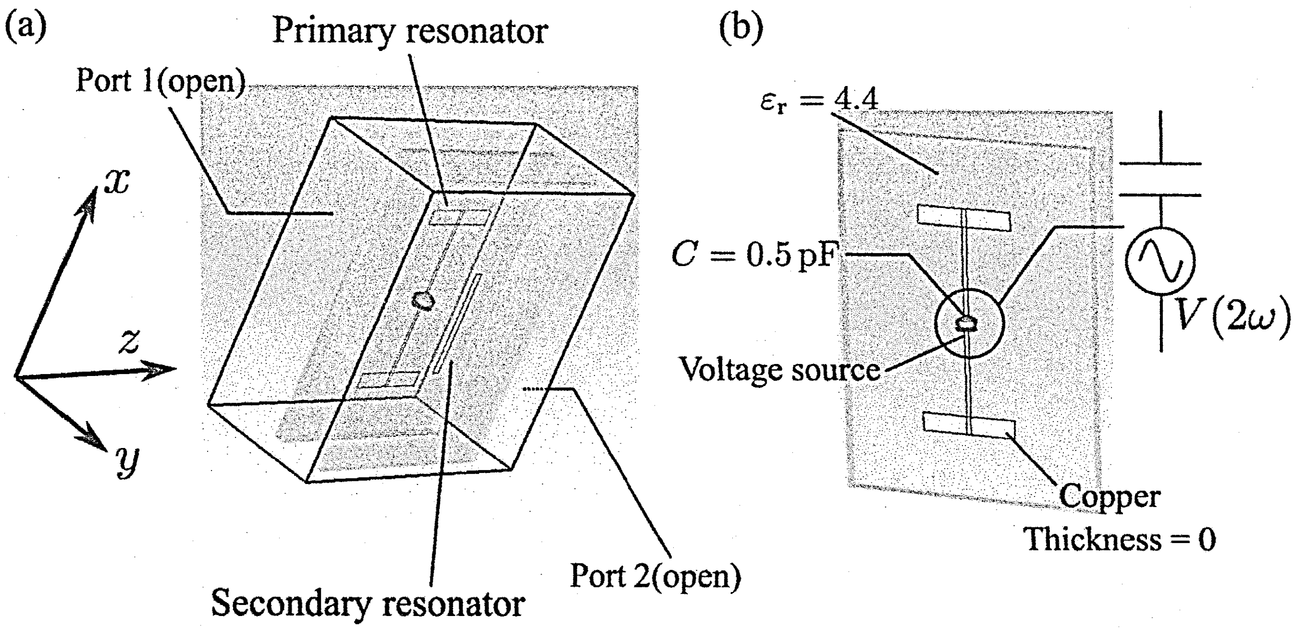


図 14: 第二次高調波に対する電磁界解析．(a) 解析系，(b) 一次側共振器．

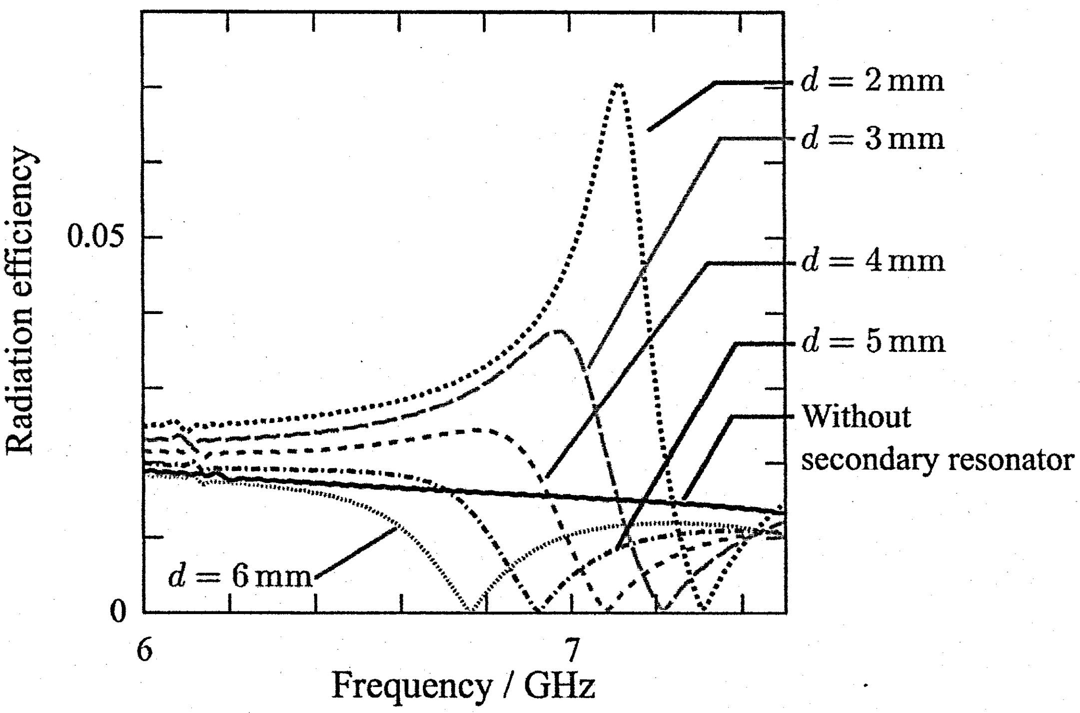


図 15: 第二次高調波に対する電磁界解析の結果．実線が二次側共振器がない場合，その他が二次側共振器がある場合の放射効率を示している．

3.4　二重共振メタマテリアルにおける第二次高調波の発生

実験に用いた構成を図 16(a) に，それぞれの共振器の構造については図 16(b) に示す．一次側共振器は 2.2 節で用いた単一共振構造を用いた．二次側共振器は Polyphenylene Ether (PPE) 基板上につくられた棒状のパターンである．PPE 基板は誘電損が小さい素材であり，二次側共振器の損失を低減し，第二次高調波の発生効率を上げるために用いている．

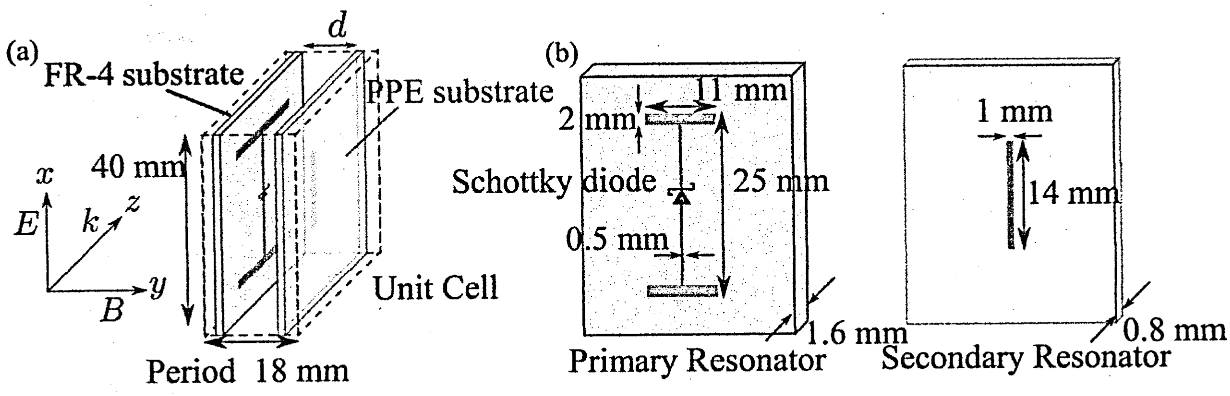


図 16: 二重共振構造の構成．(a) 二重共振構造の配置と単位ユニットセル．(b) 各共振器の構成．

図 17(a) に実験により得られた第二次高調波の強度を示す．図 17(a) の実線は二次側共振器がない場合，つまり 2.2 節で示した単一共振メタマテリアルの第二次高調波の強度を示している．この構造は基本波に対してのみ共振するので 3.4 GHz 付近に第二次高調波のピークが観測されている．二次側共振器がある場合は $d = 1.0\,\mathrm{mm}, 3.0\,\mathrm{mm}, 7.5\,\mathrm{mm}$ の場合を示している．一次側共振器の共振周波数である 3.4 GHz 付近の周波数に着目すると，二重共振メタマテリアルの場合は共振器間距離を小さくすればするほど第二次高調波の強度は強くなっている．$d = 1.0\,\mathrm{mm}$ の場合には得られた第二次高調波の強度は単一共振メタマテリアルの 5 倍程度の第二次高調波が観測された．

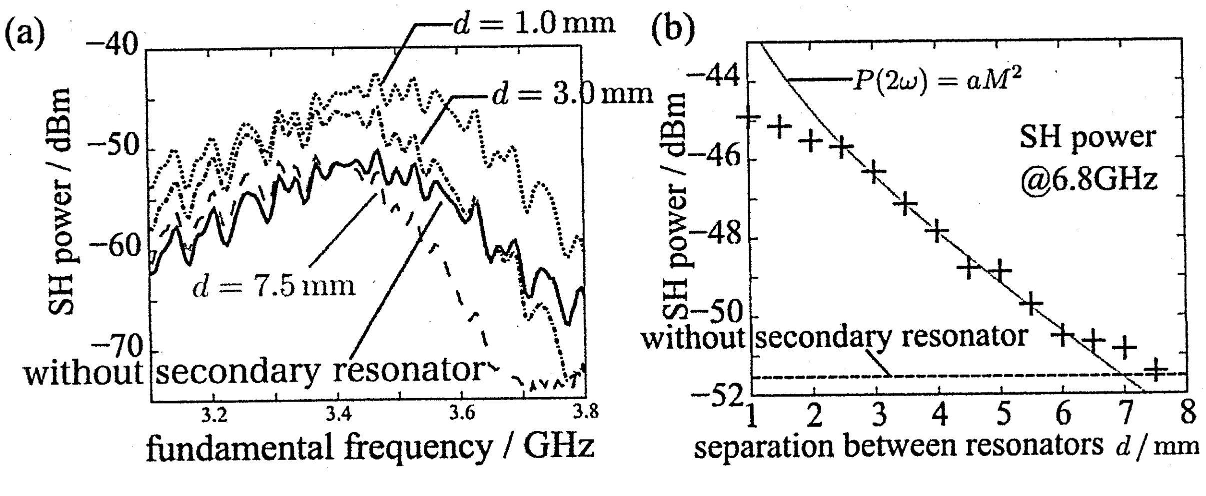


図 17: 二重共振メタマテリアルにより得られた第二次高調波の強度．(a) 共振器間距離を変化させたときに得られた第二次高調波の強度．(b) 共振器間距離を変化させた時に得られた 6.8 GHz における第二次高調波強度とフィッティング曲線．

3.5 回路モデルとの比較

二重共振メタマテリアルに対し，回路解析により得られた結果と第二次高調波の強度を比較する．まず第二次高調波の放射強度は式 (19) により次のように M^2 に比例する形で表すことができる:

$$P(2\omega) = aM^2 \propto |I_2(2\omega)|^2 . \tag{20}$$

ここで式 (20) で二次側共振器に流れる二倍周波数の電流は一次側に流れる二倍周波数より十分大きいと仮定し，一次側共振器からの放射は無視した．相互インダクタンス M については Neumann の定理により次のように求まる [13]:

$$M(d) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}(l_1 + l_2)\ln\frac{l_1 + l_2}{d}. \tag{21}$$

ここで $l_1 (l_2)$ は一次側共振器 (二次側共振器) の x 方向の長さである．式 (21) では共振器中の電流分布は一様であり，共振器長さが共振器間距離 d より長いという仮定を用いた．式 (20) から，実験より得られた第二次高調波のパワーを $l_1 + l_2$，a をフィッティングパラメータとして $d = 2.5 \sim 6.5\,\mathrm{mm}$ の領域においてフィッティングを行った．得られた結果が図 17(b) である．図 17(b) ではフィッティング曲線と実験により得られた第二次高調波がフィッティング領域において良く一致していることが確かめられる．よってこの結果から二次側共振器により第二次高調波が増強されていることが分かる．$d < 2\,\mathrm{mm}$ の領域では M が大きくなり，弱結合近似を用いた式 (19) が成立してないためフィッティングとのずれが生じている．また $d > 7\,\mathrm{mm}$ では二次側共振器に流れる電流が一次側共振器よりさほど大きくないため式 (20) が成立せず，フィッティングとのずれが観測されていると考えられる．

4 まとめ

本稿では非線形素子を用いたメタマテリアルにおける第二次高調波の発生に関して解析的，実験的に研究を行った．単一共振メタマテリアルでは実験と理論とを比較することで集中定数回路モデルによって現象を上手く説明できていることを示した．さらに第二次高調波の発生効率を上げるために二倍波に対する共振条件を考察し，二重共振構造を提案した．二重共振構造を用いることにより単一共振構造と比べ第二次高調波の発生効率を 5 倍増強することができた．

参考文献

[1] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **47**, 2075 (1999).

[2] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, and I. R. Youngs, Phys. Rev. Lett. **76**, 4773 (1996).

[3] M. Decker, M. W. Klein, M. Wegener, and S. Linden, Opt. Lett. **32**, 856 (2007).

[4] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr, and D. R. Smith, Science **314**, 977 (2006).

[5] R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, Science **292**, 77 (2001).

[6] I. V. Shadrivov, A. B. Kozyrev, D. W. van der Weide, and Y. S. Kivshar, Appl. Phys. Lett. **93**, 161903 (2008).

[7] M. W. Klein, C. Enkrich, M. Wegener, and S. Linden, Science **313**, 502 (2006).

[8] E. Kim, F. Wang, W. Wu, Z. Yu, and Y. Shen, Phys. Rev. B **78**, 16 (2008).

[9] R. Ziolkowski, IEEE Trans. Antenn. Propag. **51**, 1516 (2003).

[10] E. Poutrina, D. Huang, and D. R. Smith, New. J. Phys. **12**, 093010 (2010).

[11] E. Lule, T. Babi, and K. Siwiak, Microw. Opt. Tech. Lett. **46**, 536 (2005).

[12] D. Smith, S. Schultz, P. Markos, and C. Soukoulis, Phys. Rev. B **65**, 195104 (2002).

[13] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (McGrow-Hill, 1941).

輻射科学研究会資料
RS10-11

Wavelength and Polarization Dependences of Fused Fiber Couplers Caused by Their Waist Profiles

溶融形光ファイバカプラのくびれ部断面形状に起因する波長依存性と偏光依存性

Katsumi MORISHITA and Kazunori YAMAZAKI
森下克己　　山﨑一徳
Osaka Electro-Communication University
大阪電気通信大学

大阪電気通信大学　情報通信工学部　光・エレクトロニクス学科
〒572-8530　大阪府寝屋川市初町 18-8
e-mail: morisita@isc.osakac.ac.jp

2010 年 12 月 20 日
於　近畿大学

Wavelength and Polarization Dependences of Fused Fiber Couplers Caused by Their Waist Profiles

溶融形光ファイバカプラのくびれ部断面形状に起因する波長依存性と偏光依存性

Katsumi MORISHITA and Kazunori YAMAZAKI

森下　克己　　　山﨑　一徳

Osaka Electro-Communication University

大阪電気通信大学

概要　断面形状を制御して溶融形光ファイバカプラの製作を行い，カプラくびれ部の断面形状に対するカプラの波長依存性及び偏光依存性を実験的に調べた．融着部の大きな眼鏡形から円形断面にかけての強溶融形カプラの場合，コアの楕円変形により x 偏光に対する結合は y 偏光より少し強くなり，融着が強くなるほど実効結合器長は短くなるが，結合の波長依存性は大きくなった．融着部の小さい眼鏡形断面の弱溶融形カプラの場合は，融着が弱くなるほど実効結合器長が長くなるために波長依存性と偏光依存性は急激に大きくなり，y 偏光に対する波長依存性と結合は x 偏光に対するよりもさらに大きくなった．融着部の小さい眼鏡形断面で，縦横比が 1.94 付近において，結合の波長依存性は最も小さくなった．

1. Introduction

Fused fiber couplers are widely used in many sensor and communication applications because of temperature stable, low loss, high directivity, and high return loss. They are employed as optical power splitters, optical filters, optical reflectors, wavelength-selective and polarization-selective couplers, and components in optical devices. There is a great interest in increasing or decreasing the wavelength and/or the polarization dependences of fused fiber couplers to improve their properties and produce new fiber-based devices. Since the coupler properties are greatly influenced by the cross sectional shape at the coupler waist, precise control of the coupler waist profile is essential to tailor the wavelength and the polarization responses of the fused fiber couplers. It is necessary to investigate the wavelength and the polarization responses induced by the coupler waist profile.

The polarization properties of fiber couplers were investigated theoretically [1]–[4] and experimentally [5]. As far as we know, however, the wavelength response of the coupling properties has not been reported yet. In this paper, we studied the wavelength and the polarization dependences of fused fiber couplers experimentally by changing their waist profiles.

K. Morishita is with Osaka Electro-Communication University, 18-8, Hatsu-cho, Neyagawa, Osaka 572-8530 Japan (e-mail: morisita@isc.osakac.ac.jp).

K. Yamazaki was with Osaka Electro-Communication University, Neyagawa, Osaka, 572-8530 Japan. He is currently with NTT Neomate, 2-2-5 Uchihonmachi, Cyuou-ku, Osaka, 540-0026 Japan (e-mail: bra05752@nifty.com).

2. Wavelength and Polarization Dependences

2.1. Estimating Coupling Properties of Fused Fiber Couplers

We fabricated fused fiber couplers by fusing and tapering a pair of conventional single-mode fibers (SFW9A, Mitsubishi Cable Industries, Tokyo, Japan) with a ceramic heater (NTT Advanced Technology, Tokyo, Japan) while monitoring the output power. Although fabrication of fused fiber couplers is commonplace, it is difficult to adjust the coupler waist profile precisely. The precise control of the waist profile can be achieved by using the ceramic heater.

For a fused fiber coupler formed of two identical single-mode fibers, the x- and the y-polarized output powers of the throughput and the coupled ports, P_{1x}, P_{1y} and P_{2x}, P_{2y}, are expressed by using the coupled mode theory as follows:

$$P_{1x}(\lambda) = P_{0x}\cos^2 C_x(\lambda)L_{eff} \tag{1}$$

$$P_{2x}(\lambda) = P_{0x}\sin^2 C_x(\lambda)L_{eff} \tag{2}$$

$$P_{1y}(\lambda) = P_{0y}\cos^2 C_y(\lambda)L_{eff} \tag{3}$$

$$P_{2y}(\lambda) = P_{0y}\sin^2 C_y(\lambda)L_{eff} \tag{4}$$

where P_{0x} and P_{0y} are the x- and the y-polarized input powers, C_x and C_y are the coupling coefficients for the x- and the y-polarized first modes, and L_{eff} is the effective coupler length.

To estimate the wavelength and the polarization dependences of a fused coupler, we assume that the coupling coefficients increase linearly with wavelength [6] as

$$C_x(\lambda)L_{eff} = \frac{\pi}{2} + K_x(\lambda - \lambda_{0x}) \qquad (5)$$

$$C_y(\lambda)L_{eff} = \frac{\pi}{2} + K_y(\lambda - \lambda_{0y}) \qquad (6)$$

where K_x and K_y are constant rates of wavelength change of the coupling for the x- and the y-polarized modes, i.e. $\frac{d}{d\lambda}\left(C_x L_{eff}\right)$ and $\frac{d}{d\lambda}\left(C_y L_{eff}\right)$, and λ_{0x} and λ_{0y} are the wavelengths where the x- and the y-polarized input powers are transferred completely to the other fiber, respectively. We measured the output powers, P_1 and P_2, for the unpolarized, the x- and the y-polarized input lights using a tungsten halogen lamp and an optical spectrum analyzer, and the splitting ratio between the coupled and the throughput powers, P_2/P_1, was obtained for the lights. The polarized lights were launched into the input fiber through a polarizer with extinction ratio of 50 dB. The coupling coefficients were estimated so that the calculated splitting ratios properly fitted the measured ones by adjusting K_x, K_y, λ_{0x}, and λ_{0y}.

2.2. Fabricated Fused Fiber Couplers

Fig. 1 shows the throughput and the coupled powers, P_1 and P_2, through a fiber coupler under fabrication as a function of processing time and elongation length. The two identical fibers constructing the coupler were heated and fused at 1300 °C, and began to be elongated at speed of 60 μm/s from 550 second. A laser diode operating at 1.31-μm wavelength was used to observe the transmitted powers. We stopped elongation and fusion at the first maximum coupling. The excess loss was 0.08 dB at 1.31-μm wavelength. The elongation length and the effective coupler length were L = 24.97 mm and L_{eff} = 8.13mm, respectively. The effective coupler length L_{eff} is defined as the elongation length after the coupled power reaches 0.1 % of the input power.

Fig. 2 shows the splitting ratios of the weakly fused coupler fabricated at 1300 °C for the unpolarized, the x- and the y-polarized lights. The black solid, dotted, and broken lines are the measured splitting ratios for the unpolarized, the x- and the y-polarized lights, respectively. The gray lines are calculated by using (1) to (4) together with the adjusted K_x, K_y, λ_{0x}, and λ_{0y}. The calculated splitting ratios agree approximately with the measured ones. However their differences are relatively large around the splitting ratio of > 15 dB and < –15 dB, because the input polarization state is changed a little during propagating the fiber from the input end to the coupling region [5]. The

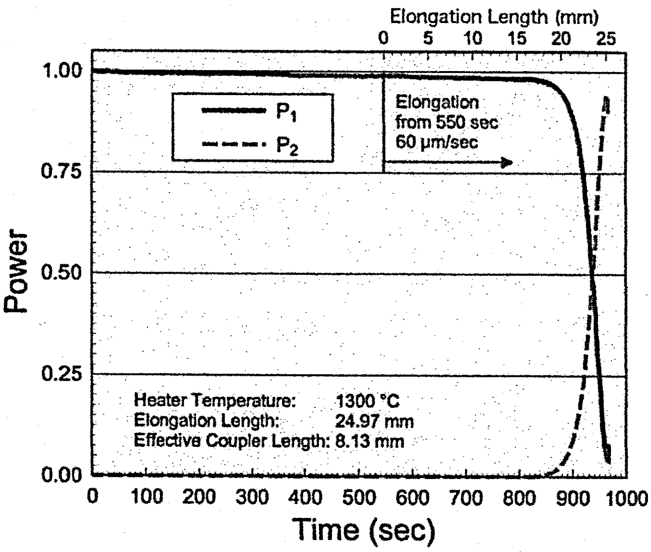


Fig. 1. The throughput and the coupled powers, P_1 and P_2, through a fused fiber coupler under fabrication as a function of processing time and elongation length. The fibers constructing the coupler were heated and tapered at 1300 °C.

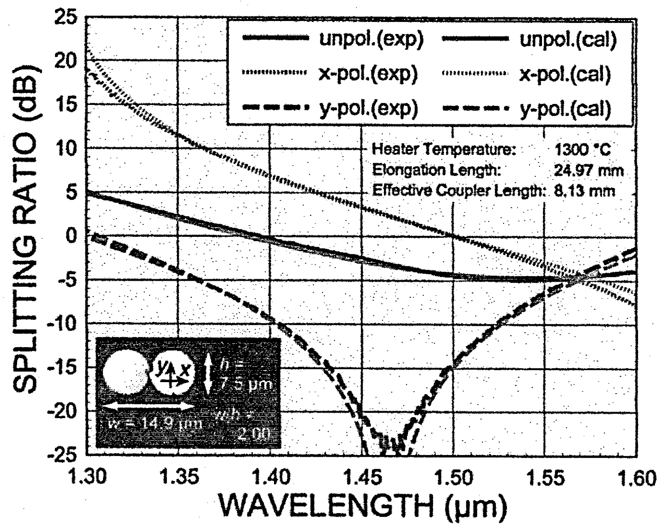


Fig. 2. Splitting ratios of the fused coupler fabricated at 1300 °C for the unpolarized, the x- and the y-polarized lights. The inset photo shows the cross-sectional shape at the coupler waist.

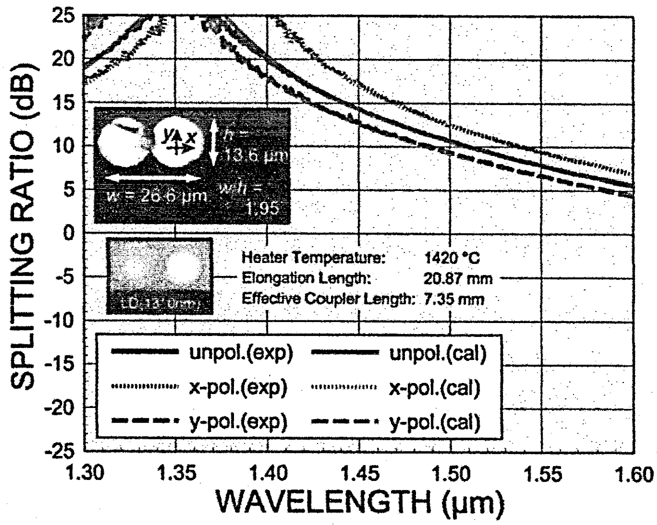


Fig. 3. Splitting ratios of the fused coupler fabricated at 1420 °C for the unpolarized, the x- and the y-polarized lights. The inset photos are the coupler waist profile and the optical intensity distribution at 1.31-μm wavelength.

coupling coefficients assume to depend linearly on wavelength as shown in (5) and (6), and the assumption causes a small difference between the measured and the calculated splitting ratios. We can estimate the wavelength and the polarization dependences by (5) and (6). The wavelength change rates of the coupling are evaluated at K_x = 3.46 rad/μm and K_y = 4.98 rad/μm, and the polarization difference is $(C_x - C_y)L_{eff}$ = −0.973 rad at 1.50 μm and −1.049 rad at 1.55 μm. The wavelength change rate and the coupling coefficient for the *x*-polarized light, K_x and C_x, are smaller than K_y and C_y for the *y*-polarized light, respectively. The inset photo presents the cross section at the coupler waist, and the height and the width of the profile are h = 7.5 μm and w = 14.9 μm, respectively. The aspect ratio is w/h = 2.00, and the neck of the waist profile is very narrow.

Fig. 3 shows the splitting ratios of the fused coupler fabricated at 1420 °C for the unpolarized, the *x*- and the *y*-polarized lights. The excess loss was less than 0.01 dB at 1.31 μm. The elongation and the effective coupler lengths were L = 20.87 mm and L_{eff} = 7.35 mm, respectively. The wavelength change rates are evaluated at K_x = 1.87 rad/μm and K_y = 2.05 rad/μm, and the polarization difference is $(C_x - C_y)L_{eff}$ = −0.098 rad at 1.50 μm and −0.107 rad at 1.55 μm. The coupling coefficient for the *x*-polarized light C_x is still smaller than C_y. The wavelength change rates and the polarization dependence become smaller than those for the coupler fabricated at 1300 °C. The inset photos show the coupler waist profile and the optical intensity distribution at 1.31-μm wavelength. The aspect ratio is w/h = 1.95, and the neck of the waist profile becomes a little thicker. We can see that the first mode turns to the cladding mode at the coupler waist at 1.31 μm and the input power is transferred to the other fiber. The cladding mode is defined as the propagation mode whose field spreads over the cladding.

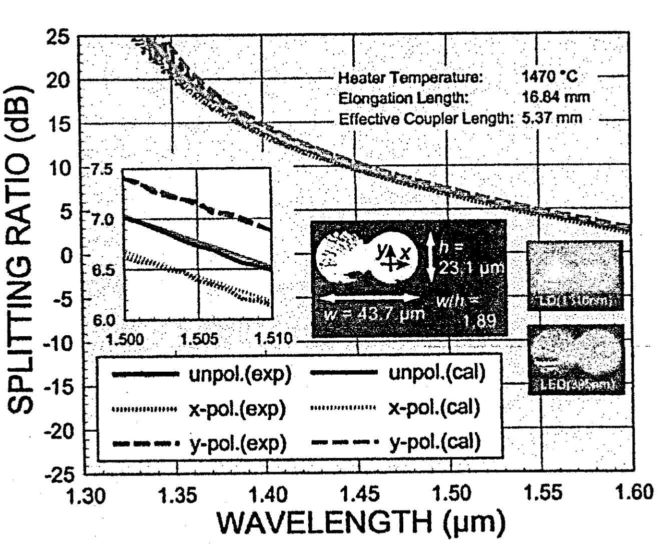


Fig. 4. Splitting ratios of the fused coupler fabricated at 1470 °C for the unpolarized, the *x*- and the *y*-polarized lights. The inset photos are the coupler waist profile and the optical intensity distributions at 1.31- and 0.395-μm wavelengths.

Fig. 4 shows the splitting ratios of the fused coupler fabricated at 1470 °C for the unpolarized, the *x*- and the *y*-polarized lights. The splitting ratios are almost equal, and the inset graph indicates the details between 1.50 and 1.51 μm. The excess loss was 0.01 dB at 1.31 μm. The elongation and the effective coupler lengths were L = 16.84 mm and L_{eff} = 5.37 mm, respectively. The wavelength change rates are K_x = 2.26 rad/μm and K_y = 2.25 rad/μm, and the polarization difference is $(C_x - C_y)L_{eff}$ = 0.034 rad at 1.50 μm and 0.037 rad at 1.55 μm. The wavelength change rates, K_x and K_y, get larger than those for 1420 °C, and the polarization difference $(C_x - C_y)L_{eff}$ comes to be positive. The coupling coefficient for the *x*-polarized light C_x becomes a little greater than C_y. The inset photos show the coupler waist profile and the optical intensity distributions at 1.31- and 0.395-μm wavelengths. The aspect ratio is w/h = 1.89, and the neck of the waist profile grows thicker. The first mode turns to the cladding mode at the coupler waist at 1.31 μm and the input power is transferred partially to the other fiber. The optical power is confined strongly in the core at 0.395-μm wavelength, and we can see that the cores are circular and are separated a little too far for the core modes to couple with each other. The core mode is defined as the propagation mode whose field is bound to the core.

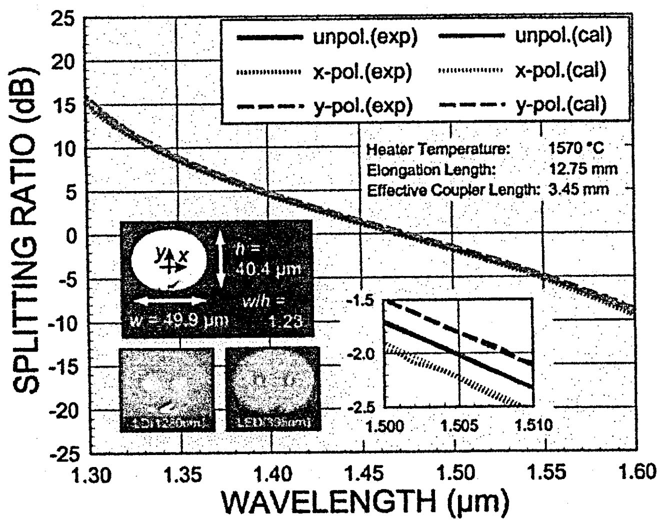


Fig. 5. Splitting ratios of the fused coupler fabricated at 1570 °C for the unpolarized, the *x*- and the *y*-polarized lights. The inset photos are the coupler waist profile and the optical intensity distributions at 1.28- and 0.395-μm wavelengths.

Fig. 5 shows the splitting ratios of the strongly fused coupler fabricated at 1570 °C for the unpolarized, the *x*- and the *y*-polarized lights. The excess loss was 0.27 dB at 1.31 μm, and tended to be a little larger for the strongly fused couplers. The elongation and the effective coupler lengths were L = 12.75 mm and L_{eff} = 3.45 mm, respectively. The wavelength change rates are K_x = 3.59 rad/μm and K_y = 3.50 rad/μm, and the polarization difference is $(C_x - C_y)L_{eff}$ = 0.036 rad at 1.50 μm and 0.041 rad at 1.55 μm. The wavelength change rates become larger than those for 1470 °C, and the polarization difference keeps positive and small. The coupling coefficient for the *x*-polarized light C_x is slightly bigger than C_y. The inset photos show the coupler waist profile and the optical intensity

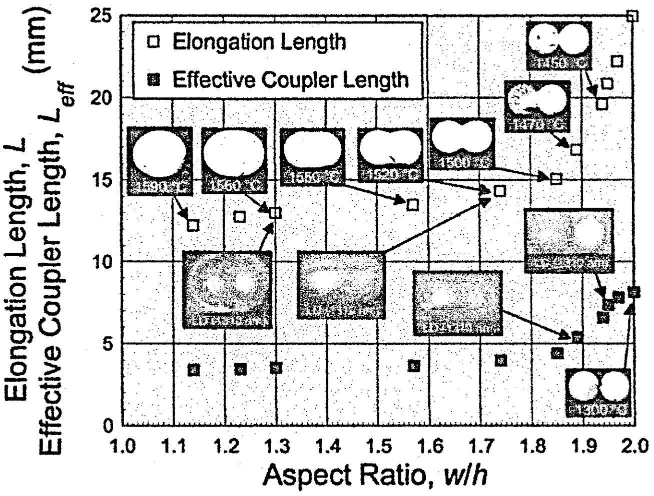


Fig. 6. Elongation length and effective coupler length as a function of aspect ratio. The inset photos are the coupler waist profiles and the optical intensity distributions at 1.31-μm wavelength.

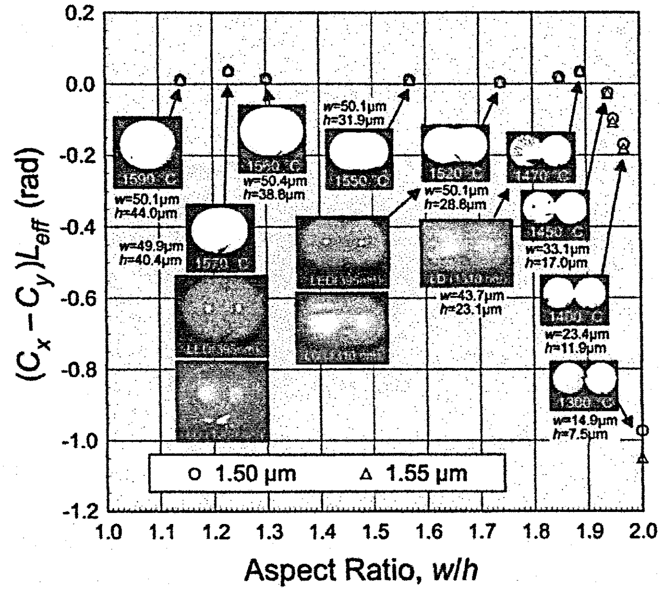


Fig. 7. Polarization difference as a function of aspect ratio. The inset photos are the coupler waist profiles and the optical intensity distributions at 1.31-, 1.28-, and 0.395-μm wavelengths.

distributions at 1.28- and 0.395-μm wavelengths. The aspect ratio is $w/h = 1.23$, and the waist profile is elliptical. We can see that the first mode remains the core mode at the coupler waist at 1.28 μm and the shape of the cores is changed from a circle to an ellipse. Since the core shape becomes elliptical and the x-polarized core mode has the greater fraction of power outside the elliptical core than the y-polarized core mode [7], the coupling coefficient C_x comes to be larger than C_y.

2.3. Wavelength and Polarization Dependences versus Coupler Waist Profile

Fig. 6 shows the elongation length L and the effective coupler length L_{eff} as a function of the aspect ratio w/h. The inset photos indicate the waist profiles and the optical intensity distributions at the coupler waist at 1.31-μm wavelength. In

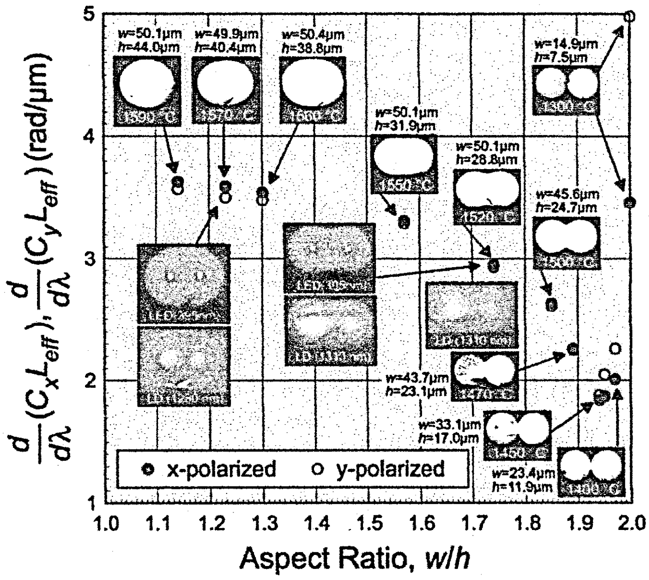


Fig. 8. Wavelength dependences as a function of aspect ratio. The inset photos are the coupler waist profiles and the optical intensity distributions at 1.31-, 1.28-, and 0.395-μm wavelengths.

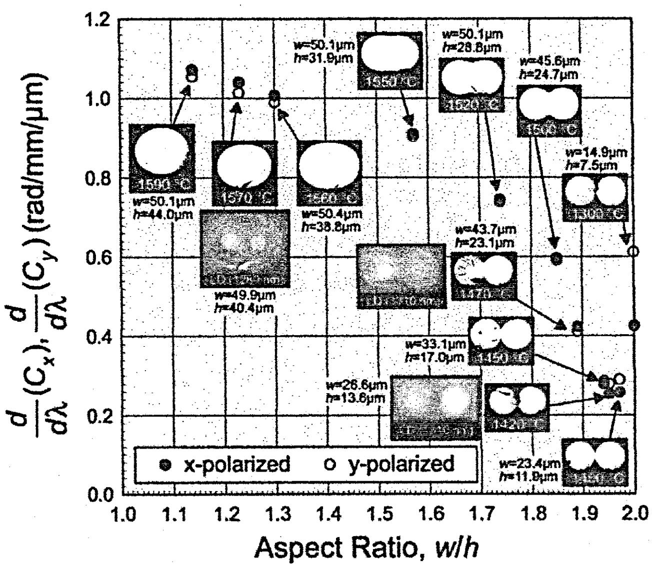


Fig. 9. Wavelength dependences of coupling coefficients as a function of aspect ratio. The inset photos are the coupler waist profiles and the optical intensity distributions at 1.31- and 1.28-μm wavelengths.

case of strongly fused couplers with $w/h < 1.8$, the space between the cores is narrow enough to bring about the complete power transfer, and the first mode remains the core mode whose field is bound to the core. As the aspect ratio increases from 1.0 to 1.8, the space widens gradually and L_{eff} becomes longer moderately to transfer the power completely. For weakly fused couplers with $w/h > 1.9$, the first mode changes to the cladding mode whose field spreads over the cladding. With narrowing the neck of the waist profile and weakening the coupling, the coupler needs the longer coupling region to cause the entire power transfer between two tapered fibers, and L and L_{eff} become longer greatly.

Fig. 7 shows the polarization difference $(C_x - C_y)L_{eff}$ as a function of the aspect ratio w/h. The inset photos indicate the coupler waist profiles and the optical intensity distributions at 1.28, 1.31, and 0.395 μm. The first mode remains the core mode for the aspect ratio of < 1.8, and the polarization difference $(C_x - C_y)L_{eff}$ is small and positive, i.e. $C_x > C_y$, because of the elliptical deformation of the cores. The polarization difference reduces to zero between the aspect ratio of 1.9 and 1.94, and the coupler becomes isotropic. The polarization difference $(C_x - C_y)L_{eff}$ is negative for the aspect ratio of ≥ 1.94, and drops more greatly below zero with increasing the aspect ratio from 1.94 and narrowing the neck of the waist profile, and the polarization dependence increases.

Fig. 8 shows the wavelength dependences, K_x and K_y, as a function of the aspect ratio w/h. The inset photos are the coupler waist profiles and the optical intensity distributions at 1.31, 1.28, and 0.395 μm. The wavelength dependences increase with reducing the aspect ratio from 1.8 in spite of the shorter effective coupler length L_{eff}. As the aspect ratio grows from 1.94, K_x and K_y increase remarkably because of the longer effective coupler length L_{eff}, and K_y becomes much larger than K_x. The wavelength dependences become smallest around the aspect ratio of 1.94, and the wavelength dependence for the x-polarized mode K_x is larger and smaller than K_y for the aspect ratio of < 1.9 and > 1.9, respectively.

Fig. 9 shows the wavelength dependences of the coupling coefficients, C_x and C_y, as a function of the aspect ratio w/h. The inset photos are the coupler waist profiles and the optical intensity distributions at 1.31- and 1.28-μm wavelengths. The wavelength dependences of the coupling coefficients increase with decreasing the aspect ratio from 1.94. Since the first mode is the core mode and the cladding mode for the aspect ratio of < 1.8 and > 1.9, respectively, we find that the wavelength dependences of C_x and C_y for the core mode are larger than those for the cladding mode. The wavelength dependences are relatively small for a dumbbell profile with a narrow neck, and become smallest around the aspect ratio of 1.94.

3. Conclusions

Fused fiber couplers were fabricated by controlling the cross sectional shape at the coupler waist. The wavelength and the polarization dependences versus the coupler waist profile were investigated experimentally.

In case of the strongly fused coupler whose waist profile is a dumbbell with a thick neck to a circle, the first modes of the constituent fibers remain the core modes at the coupler waist and the coupling between the core modes causes the power transfer. The coupling for the x-polarized light is a little stronger than that for the y-polarized light because of the elliptical deformation of the cores, and the polarization dependence is relatively small. The wavelength dependences increase with fusing more strongly and thickening the neck in spite of the shorter effective coupler length.

In case of the weakly fused coupler having a dumbbell profile with a narrow neck, the first modes turn to the cladding modes at the coupler waist and the coupling between the cladding modes brings about the power transfer. The wavelength and the polarization dependences increase greatly with fusing more weakly and narrowing the neck owing to the longer effective coupler length, and the wavelength dependence and the coupling for the y-polarized light increase more than those for the x-polarized light. The wavelength dependences of the coupling become smallest around a dumbbell profile with the aspect ratio of 1.94.

Acknowledgment

The authors would like to thank M. Fujita of Mitsubishi Cable Industries Ltd. for providing the single-mode fibers.

References

[1] X. -H. Zheng, "Finite-element analysis for fused couplers," *Electron. Lett.*, vol. 22, no. 15, pp. 804–805, July 1986.

[2] T. -L. Wu and H. -C. Chang, "Rigorous analysis of form birefringence of fused fibre couplers," *Electron. Lett.*, vol. 30, no. 12, pp. 998–999, June 1994.

[3] T. -L. Wu and H. -C. Chang, "Rigorous analysis of form birefringence of weakly fused fiber-optic couplers," *IEEE/OSA J. Lightwave Technol.*, vol. 13, no. 4, pp. 687–691, Apr. 1995.

[4] T. -L. Wu and H. -C. Chang, "Vectorial analysis of fiber-core effects in weakly fused couplers," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 9, no. 2, pp. 218–219, Feb. 1997.

[5] K. Morishita and K. Takashina, "Polarization properties of fused fiber couplers and polarizing beamsplitters," *IEEE/OSA J. Lightwave. Technol.*, vol. 9, no. 11, pp. 1503–1507, Nov. 1991.

[6] M. S. Yataki, D. N. Payne, and M. P. Varnham, "All-fibre wavelength filters using concatenated fused-taper couplers," *Electron. Lett.*, vol. 21, no. 6, pp. 248-249, Mar. 1985.

[7] R. B. Dyott, *Elliptical Fiber Waveguides*. Norwood, MA: Artech House, 1995, ch.4.

輻射科学研究会資料

資料番号	RS 10-12

冷凍食品のマイクロ波による均一半解凍のFDTDシミュレーション

田村安彦[1]
(京都工芸繊維大学 大学院工芸科学研究科 電子システム工学部門)
服部一裕
((株) 前川製作所 技術研究所 基盤技術開発 G)
1 ytamura@kit.ac.jp

2010年12月20日（月）

輻射科学研究会
(於 近畿大学 本部キャンパス３８号館２階 多目的利用室)

1 はじめに

マイクロ波を用いた食品加熱・調理は、比較的急速かつ均一的な加熱・調理方法として電子レンジに代表されるコンシューマ・業務用途において盛んに用いられている。これは 2.45GHz のマイクロ波と食品中の水分 (純水の導電率 2.87[S/m]) とは、Joule 損が比較的大きく加熱・調理に適しているためである。一方、冷凍食品の半解凍・完全解凍は産業用途での需要が多く、主に水解凍、自然解凍、蒸気解凍などの外部から解凍する方法がよく用いられてきた。これらの方法は簡便であるものの内部が熱伝導支配となり、中心まで解凍するのに非常に時間を要するという欠点がある。

食品加熱・調理と同じく解凍用途にマイクロ波を用いれば、内部まで直接加熱することが可能になり得る。反面、解凍用途においては、冷凍食品中の水分 (純氷の導電率 3.93×10^{-4}[S/m]) の Joule 損が非常に小さいため食品加熱・調理と比較すると必ずしも加熱効率がよいとは言えない。しかしながら、2.45GHz のマイクロ波では純水中のスキンデプスが 6[mm] 程度と短いのに対し純氷中では 513[mm] 程度と比較的長いため、均一加熱の点では長所になり得る。従って解凍システムにマイクロ波解凍を用いることで、全体的な設計と運用如何によっては、解凍時間の短縮と高品質な解凍の両立を期待できる。

実際には、マイクロ波を用いた解凍・加熱・調理においても、加熱むらや'煮え'(局所的な熱変性) 等の不均一さを生じる。これらの不均一さを生ずる理由は大きく分けて二つ考えられる。一つは電磁界の局在による内部加熱源分布のむらが不可避的に生ずることである。もう一つは、冷凍食品自体が脂や水、蛋白質などの比誘電率や導電率の異なる媒質の集合体であることによる。冷凍食品の含有水分が氷から水へと相変化する際に、媒質定数 (比誘電率や導電率) が大きく変化し、結果として冷凍食品自体の比誘電率と導電率も大きく変化する。これが更に電磁界の局在化と加熱源分布のむらを生じさせる。電子レンジ等では前者の問題に対しては、従来から電磁界シミュレーションを併用した設計により、壁面の凹凸加工やターンテーブルの導入等の構造的工夫によりある程度の改善がなされてきた。一方、後者は対象となる冷凍食品そのものに起因するため、その改善には何らかの更なる外部的な工夫を要するように思える。これは、コンシューマ・業務用途と比較して規模が大きくなる産業用途においては、より重要になると考えられる。特に半解凍のように完全解凍の直前で停止させる場合、マイクロ波照射による電磁界の挙動と、それに連動する冷凍食品内部の温度界の振舞いに関する知見が必要不可欠であるものの、そのような研究例は現状では少ない [1–3]。

本報告では、産業用途でのマイクロ波による均一半解凍システムの効率的な設計と最適運用に関わる知見取得のため、電磁界と温度界の挙動を議論する。2.45GHz TE 平面波を被加熱体に照射する二次元モデルにおいて、FDTD 法により Maxwell 方程式と熱伝導方程式を数値シミュレーションする。電気的熱的媒質定数の温度依存性の影響や冷凍食品サイズ・形状や配置による温度分布、吸収電力分布や電界強度分布の時間発展との関係及び電力誤差と熱収支誤差に関して言及し、均一半解凍のための様々な条件等を考察する。

2 解析モデル

2.1 基礎方程式

冷凍食品を含めて媒質は xy-平面内で変化し、z-方向は一様である二次元構造とする (図 1)。z-方向にのみ電界成分を持つ TE 波を冷凍食品へ入射させる場合を考える。電磁界を位置ベクトル $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y(+z\boldsymbol{e}_z)$[m] と時刻 t[sec] の関数として $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$[V/m],$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$[A/m] と書くが、構造と入射波の仮定から必要な電磁界成分は $E_z(\boldsymbol{r},t)$,$H_x(\boldsymbol{r},t)$,$H_y(\boldsymbol{r},t)$ となる。温度界は $u(\boldsymbol{r},t)$[K] と書く。冷凍食品の電気的及び熱的媒質定数は温度に対する多価を含めた関数であるが、時刻に関して常に一価の関数であるから、単純に時刻変化する媒質定数として扱う。電磁界の挙動を、Maxwell 方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}H_y(\boldsymbol{r},t) - \frac{\partial}{\partial y}H_x(\boldsymbol{r},t) = \sigma'(\boldsymbol{r},t)E_z(\boldsymbol{r},t) + \varepsilon(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial}{\partial t}E_z(\boldsymbol{r},t) \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_z(\boldsymbol{r},t) = \mu_0\frac{\partial}{\partial t}H_y(\boldsymbol{r},t) \tag{2}$$

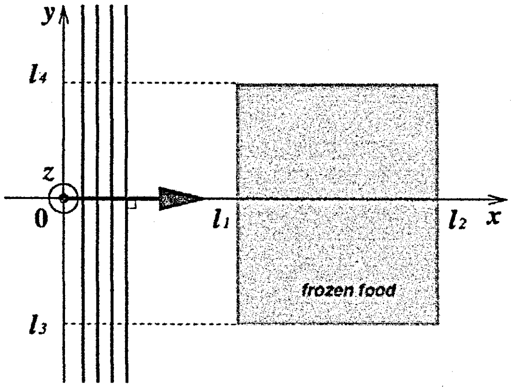


図 1　冷凍食品への平面電磁波入射モデル

$$\frac{\partial}{\partial y}E_z(\boldsymbol{r},t) \;=\; -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}H_x(\boldsymbol{r},t) \tag{3}$$

で記述する。透磁率は全領域中で真空中の値 $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$[H/m] を用いる。また、$\varepsilon(\boldsymbol{r},t)$[F/m],$\sigma(\boldsymbol{r},t)$[S/m] は誘電率、導電率を表す。ただし、$\sigma'$ は実効導電率

$$\sigma'(\boldsymbol{r},t) = \sigma(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon(\boldsymbol{r},t) \tag{4}$$

となる。食品中の温度界 $u(\boldsymbol{r},t)$ は熱伝導方程式

$$\begin{aligned} &C_\rho(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial}{\partial t}u(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}C_\rho(\boldsymbol{r},t)\cdot u(\boldsymbol{r},t) \\ =\;& \kappa(\boldsymbol{r},t)\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(\boldsymbol{r},t)\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\kappa(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial}{\partial x}u(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial y}\kappa(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial}{\partial y}u(\boldsymbol{r},t) + S(\boldsymbol{r},t) \end{aligned} \tag{5}$$

で記述する。ここで $C_\rho(\boldsymbol{r},t)$[J/(K·m^3)],$\kappa(\boldsymbol{r},t)$[W/(K·m)] は容積比熱、熱伝導率を表す。C_ρ は密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$[kg/m^3], 比熱 $c(\boldsymbol{r},t)$[J/(K·kg)] を用いて

$$C_\rho(\boldsymbol{r},t) = c(\boldsymbol{r},t)\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{6}$$

である。本報告は容積比熱で考える。食品中の単位体積辺りの瞬時吸収電力 $S(\boldsymbol{r},t)$[W/m^3] は

$$S(\boldsymbol{r},t) = \sigma(\boldsymbol{r},t)|E_z(\boldsymbol{r},t)|^2 \tag{7}$$

で与えられ、熱源となる。

3　FDTD 法による数値解析スキーム

FDTD 法 [4] により、数値解析のスキームを導く。

3.1　電磁界解析

更新スキーム　Yee アルゴリズムに従って時空間を等分離散化する。空間差分長を $\triangle x$、時間差分長を $\triangle t$ で表すと、整数インデックス i,j を用いて位置 x, y、時刻 t は

$$x = \mathrm{i}\triangle x, \quad y = \mathrm{j}\triangle y, \quad t = \mathrm{n}\triangle t \tag{8}$$

となる。対応する電界及び磁界を

$$E_z^{\mathrm{n}}(\mathrm{i,j}) \;\equiv\; E_z(\boldsymbol{r},t), \quad H_x^{\mathrm{n}}(\mathrm{i,j}) \;\equiv\; H_x(\boldsymbol{r},t), \quad H_y^{\mathrm{n}}(\mathrm{i,j}) \;\equiv\; H_y(\boldsymbol{r},t) \tag{9}$$

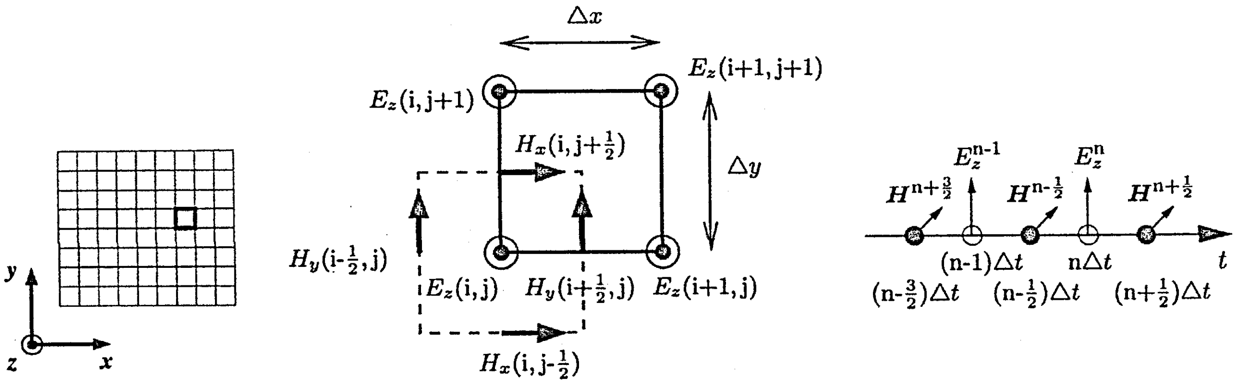


図 2　時空間離散化と電磁界成分配置

と書いて省略表現する。時間配置は電界を整数インデックス時刻 n に、磁界を半整数インデックス時刻 $n+1/2$ とし、空間配置は電界を整数インデックス位置 (i,j) に、磁界を整数及び半整数インデックス位置 $(i,j+1/2)$ あるいは $(i+1/2,j)$ とする (図 2)。次に離散化表現と時空間に関する一階の偏微分の中心差分近似適用により、電磁界に関する時空間更新スキームは次のようになる。

$$
\begin{aligned}
E_z^{n}(i,j) &= C_{E_z}^{n-\frac{1}{2}}(i,j)E_z^{n-1}(i,j)+C_{E_zH_y}^{n-\frac{1}{2}}(i,j)\{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j)-H_y^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j)\} \\
&\quad -C_{E_zH_x}^{n-\frac{1}{2}}(i,j)\{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2})-H_x^{n-\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2})\}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) = H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-C_{H_yE_z}\{E_z^{n}(i,j+1)-E_z^{n}(i,j)\} \tag{11}
$$

$$
H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right) = H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)+C_{H_xE_z}\{E_z^{n}(i+1,j)-E_z^{n}(i,j)\} \tag{12}
$$

ただし、係数 $C_{E_z}^{n-1/2}$,$C_{E_zH_y}^{n-1/2}$,$C_{E_zH_x}^{n-\frac{1}{2}}$,$C_{H_xE_z}$,$C_{H_yE_z}$ は

$$
C_{E_z}^{n-\frac{1}{2}}(i,j)=\frac{1-\dfrac{\sigma'^{n-\frac{1}{2}}(i,j)\Delta t}{2\varepsilon^{n-\frac{1}{2}}(i,j)}}{1+\dfrac{\sigma'^{n-\frac{1}{2}}(i,j)\Delta t}{2\varepsilon^{n-\frac{1}{2}}(i,j)}},\quad
C_{E_zH_x}^{n-\frac{1}{2}}(i,j)=\frac{\dfrac{\Delta t}{\varepsilon^{n-\frac{1}{2}}(i,j)\Delta y}}{1+\dfrac{\sigma'^{n-\frac{1}{2}}(i,j)\Delta t}{2\varepsilon^{n-\frac{1}{2}}(i,j)}},\quad
C_{E_zH_y}^{n-\frac{1}{2}}(i,j)=\frac{\dfrac{\Delta t}{\varepsilon^{n-\frac{1}{2}}(i,j)\Delta x}}{1+\dfrac{\sigma'^{n-\frac{1}{2}}(i,j)\Delta t}{2\varepsilon^{n-\frac{1}{2}}(i,j)}}
$$
$$
C_{H_xE_z}=\frac{\Delta t}{\mu_0\Delta x},\quad C_{H_yE_z}=\frac{\Delta t}{\mu_0\Delta y} \tag{13}
$$

となる。媒質定数の時間引数は電界のそれと同調させるため半整数インデックス時刻 $n-1/2$ に対する値を前後値の平均で近似し

$$
\iota^{n-1/2}\approx\frac{\iota^{n}+\iota^{n-1}}{2}\qquad \iota\in\{\sigma,\sigma',\varepsilon\}
$$

とおく。しかしながら整数インデックス時刻 n での値は電界値が確定し熱伝導方程式を解いた結果得られるから、現時点では過去二つの整数インデックス時刻 $n-2,n-1$ の値からの外挿値 $\iota^{n}\approx2\iota^{n-1}-\iota^{n-2}$ で代用する。

$$
\iota^{n-1/2}(x)\approx\frac{3\iota^{n-1}(x)-\iota^{n-2}(x)}{2} \tag{14}
$$

σ' を具体的に評価するためには ϵ の時間微分が必要となる。そこで後進差分近似を用いて以下の評価式を得る。

$$
\sigma'^{n}=\sigma^{n}+\frac{\epsilon^{n}-\epsilon^{n-1}}{\Delta t} \tag{15}
$$

(14) より実質的に ϵ^{n-3} が必要となる。ϵ の時刻変化を考慮しない場合は σ'^{n} を単純に σ^{n} で置き換えればよい。

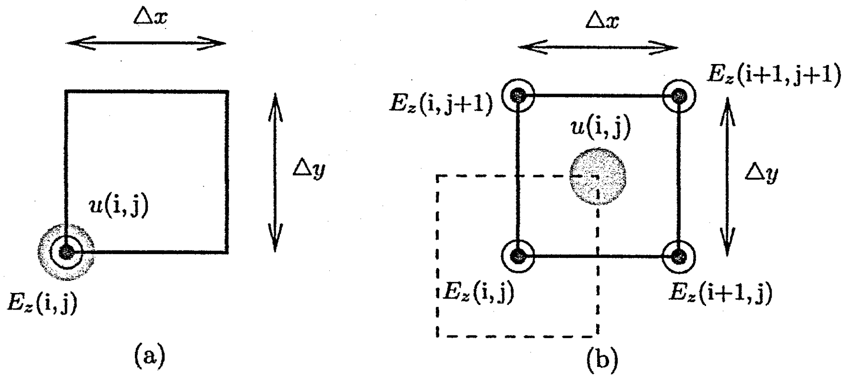


図 3　電界配置と温度界配置の対応付け

吸収境界条件　開放モデルであるため解析領域の端では吸収壁を設ける必要がある。ここでは Mur の一次吸収境界条件を用いる。例えば左側吸収境界 $x = l_s$ (i.e. $\mathrm{i} = \mathrm{i}_s$) 上の電界の更新スキームは次式で与えられる。

$$E_z^{\mathrm{n}}(\mathrm{i}_s, \mathrm{j}) \quad = \quad E_z^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{i}_s+1, \mathrm{j}) + \frac{c_0\Delta t - \Delta x}{c_0\Delta t + \Delta x}\left\{E_z^{\mathrm{n}}(\mathrm{i}_s+1, \mathrm{j}) - E_z^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{i}_s, \mathrm{j})\right\} \tag{16}$$

ここで、$c_0 = 2.99792458 \times 10^8$[m/sec] は真空中の光速度である。残りの三側面も同様なスキームである。

3.2　熱伝導解析

更新スキーム　電界の時空間的離散点に対し温度界 u を対応付けする (図 3)。一般に熱拡散速度は電磁波の位相速度よりも圧倒的に遅いため、熱伝導解析での時間差分長 Δt_H は電磁界のそれよりも圧倒的に長くなる。電磁界との整合をとる具体的な設定に関しては後に議論するが、ここでは、一般的な議論としてのスキームを扱うため時刻 t を

$$t = \mathrm{m}\Delta t_H \tag{17}$$

と表し、対応する温度界を

$$u^{\mathrm{m}}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) \ \equiv \ u(\boldsymbol{r}, t) \tag{18}$$

と書く。図 3 での対応付けの差異は、温度界を代表する座標が、(a) 電界の割当てと完全に一致, (b) セル中央のため電界と半セルずれた位置、の違いがある。しかしながら、更新スキームを考える意味では両者に違いは無い (熱源 $S(\boldsymbol{r}, t)$ と電界 $E_z(\boldsymbol{r}, t)$ との関係式の処理のみ差を生じる)。このような省略表記を用いて時空間に関する一階微分あるいは二階微分に対し中心差分近似、前進あるいは後進差分近似等を適用すれば温度界の時空間更新スキームは

$$\begin{aligned}
u^{\mathrm{m}}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) \quad = \quad & \frac{C_\rho^{\mathrm{m}-2}(\mathrm{i}, \mathrm{j})}{C_\rho^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}, \mathrm{j})} u^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) \\
& + \frac{\Delta t_H}{C_\rho^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}, \mathrm{j})} \left[\frac{\kappa^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}, \mathrm{j})}{(\Delta x)^2} \{u^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}+1, \mathrm{j}) + u^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}-1, \mathrm{j}) - 2u^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}, \mathrm{j})\} \right. \\
& + \frac{\kappa^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}, \mathrm{j})}{(\Delta y)^2} \{u^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}, \mathrm{j}+1) + u^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}, \mathrm{j}-1) - 2u^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}, \mathrm{j})\} \\
& + \frac{\{u^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}+1, \mathrm{j}) - u^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}-1, \mathrm{j})\}\{\kappa^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}+1, \mathrm{j}) - \kappa^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}-1, \mathrm{j})\}}{(2\Delta x)^2} \\
& \left. + \frac{\{u^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}, \mathrm{j}+1) - u^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}, \mathrm{j}-1)\}\{\kappa^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}, \mathrm{j}+1) - \kappa^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}, \mathrm{j}-1)\}}{(2\Delta y)^2} + S^{\mathrm{m}-1}(\mathrm{i}, \mathrm{j}) \right]
\end{aligned} \tag{19}$$

となる。媒質定数の時間及び空間微分項を取り込まない場合は、右辺第一項の係数を 1 に置き換えればよい。(19) は、注目セルの上下左右全てにセルが隣接している場合 (内部領域) の更新スキームとなる。これに対し、注目セルの上下左右の何れか一つでもセルが隣接していない場合は境界と見なして、境界面での熱伝導として処理する。

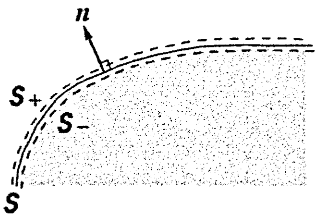


図 4　熱流束規定条件における境界の定義

境界面での熱伝導　密度 ρ の時刻変化は本来体積変化を表すが、本報告では容積比熱 C_ρ の時刻変化として解釈し、冷凍食品自体の体積変化は無いものとして議論する。冷凍食品が外気の影響を受けるとし、その境界面は熱流束規定条件を満足すると仮定する。冷凍食品の表面 S(その内部側極限面を S^-, 外部側極限面を S^+) において (図 4)、熱流束規定条件

$$-\kappa(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{grad}\,u(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{n}\Big|_{\boldsymbol{r}\in S^-} = -\kappa(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial}{\partial n}u(\boldsymbol{r},t)\Big|_{\boldsymbol{r}\in S^-} = h(\boldsymbol{r},t)\Big|_{\boldsymbol{r}\in S^+}\left\{u(\boldsymbol{r},t)\Big|_{\boldsymbol{r}\in S^-} - u(\boldsymbol{r},t)\Big|_{\boldsymbol{r}\in S^+}\right\} \tag{20}$$

を適用する。ここで、$\boldsymbol{n}$ は S^+ での外向き単位法線ベクトル、$\partial/\partial n$ は $\boldsymbol{n}$ への方向微分 (S^+ に対する法線微分)、$h(\boldsymbol{r},t)$ [W/(m^2·K)] は熱伝達率である。$h(\boldsymbol{r},t)=0$ は断熱条件、$h(\boldsymbol{r},t)=\infty$ は固定温度境界条件を表す。FDTD 法は本質的にはボクセル近似であり、それは簡潔さと言う利点と、曲線や曲面を正確には表現できない欠点をも持つ*。本報告では前者の利点を最大限に活用して 1 セル単位で考える。すなわち、x-軸もしくは y-軸に平行な線分に対する熱流束規定条件のみを考える。例えば、境界が $x=l_1$ にあり、$x<l_1$ が外気、$x>l_1$ が食品の場合は

$$\left\{\kappa(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial}{\partial x}u(\boldsymbol{r},t)\right\}\Big|_{\boldsymbol{r}=(l_1+0)\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y} = h(\boldsymbol{r},t)\Big|_{\boldsymbol{r}=(l_1-0)\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y}\left\{u(\boldsymbol{r},t)\Big|_{\boldsymbol{r}=(l_1+0)\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y} - u(\boldsymbol{r},t)\Big|_{\boldsymbol{r}=(l_1-0)\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y}\right\} \tag{21}$$

となる。対応する差分表現では位置 $x=l_1$ のインデックス i_1 に対し

$$-\kappa^{\mathrm{m}}(\mathrm{i}_1,\mathrm{j})\frac{u^{\mathrm{m}}(\mathrm{i}_1,\mathrm{j})-u^{\mathrm{m}}(\mathrm{i}_1+1,\mathrm{j})}{\triangle x} = h^{\mathrm{m}}_{x^-}(\mathrm{j})\{u^{\mathrm{m}}(\mathrm{i}_1,\mathrm{j})-u^{\mathrm{m}}_{x^-}(\mathrm{j})\}$$

となる。ここで、境界近傍 $(x=l_1-0)$ での h と外気温を

$$h^{\mathrm{m}}_{x^-}(\mathrm{j}) \equiv h(l_1-0,\mathrm{j}\triangle y,\mathrm{m}\triangle t_H),\quad u^{\mathrm{m}}_{x^-}(\mathrm{j}) \equiv u(l_1-0,\mathrm{j}\triangle y,\mathrm{m}\triangle t_H) \tag{22}$$

とおいている。よって、境界での更新スキームは以下のようになる。

$$u^{\mathrm{m}}(\mathrm{i}_1,\mathrm{j}) = \frac{u^{\mathrm{m}}_{x^-}(\mathrm{j})+c^{\mathrm{m}}_{x^-}(\mathrm{j})u^{\mathrm{m}}(\mathrm{i}_1+1,\mathrm{j})}{1+c^{\mathrm{m}}_{x^-}(\mathrm{j})},\quad c^{\mathrm{m}}_{x^-}(\mathrm{j}) = \frac{\kappa^{\mathrm{m}}(\mathrm{i}_1,\mathrm{j})}{h^{\mathrm{m}}_{x^-}(\mathrm{j})\triangle x} \tag{23}$$

3.3　時空間差分長

時間経過を含めて解析対象内の媒質のうちで最も大きい誘電率下での波長の 1/10 を基準に、空間差分長 $\triangle x,\triangle y$[m] を決める。これらを定めた時、時間差分長 $\triangle t$ は Courant 条件を満たすように採る。よって、解析対象内でのもっとも大なる伝搬速度 c_{max} に対して

$$\triangle t < \frac{1}{c_{max}\sqrt{(1/\triangle x)^2+(1/\triangle y)^2}} \equiv t_{thr} \tag{24}$$

を満たす必要がある。熱伝導解析においても、安定条件を満たせばどのように採るのも自由である。空間差分長 $\triangle x,\triangle y$ は既に与えられているから次の Neumann 条件を満たすように決める。

$$\triangle t_H < \frac{1}{2D_{max}\{(1/\triangle x)^2+(1/\triangle y)^2\}} \tag{25}$$

*更には、Yee アルゴリズムの意味では任意の二つの単位ベクトルによって張られる平面ないしは曲面による境界すら厳密には表現出来ない。

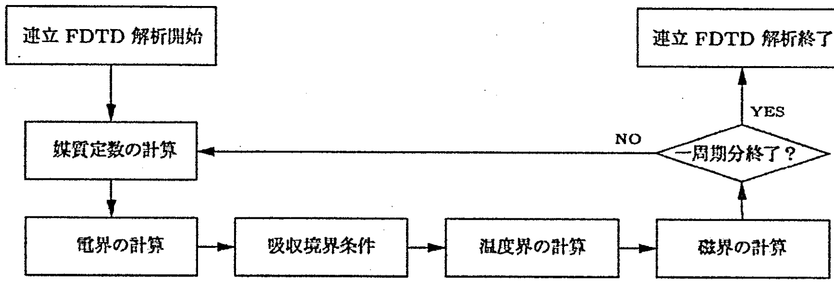


図 5　電磁界温度界連立 FDTD 解析のフローチャート (1 サイクル)

ただし D_{max}[m^2/sec] は (最大の) 熱拡散係数であり

$$D_{max} = \max\left[\frac{\kappa(\boldsymbol{r},t)}{C_\rho(\boldsymbol{r},t)}\right] \le \frac{\max\,\kappa(\boldsymbol{r},t)}{\min\{C_\rho(\boldsymbol{r},t)\}} \tag{26}$$

とする。一般に $\triangle t \ll \triangle t_H$ である。

3.4　混成 FDTD 解析

電磁界解析と温度界解析を連立して行なう場合、一般的な意味ではフローチャートは図 5 のように書ける。これはもっとも厳密な処理法である。しかしながら $\triangle t$ と $\triangle t_H$ の値の極端な違いによりこのような処理法を任意の時刻に適用することは実際的ではない。

時間離散幅の設定　一般論として入力電磁波は周期 T[sec] の交流的時間変動を持つと仮定する。(実際的な熱伝導にかかる時間よりは非常に小さいとするのは極めて実際的である。) 時間離散幅 $\triangle t$ を、適当な整数 n_T を選んで Courant 条件を満たしかつ周期 T に一致するように設定する。

$$\triangle t = T/n_T < t_{thr} \qquad n_T \triangle t = T \tag{27}$$

以降、電磁界解析では常に周期 T を 1 サイクルとして扱う。次に熱伝導解析の時間離散幅 $\triangle t_H$ は電磁界解析と完全に同期させて行なう場合と、電磁界解析を停止させて非同期に行なう場合とを分ける。前者では、電磁界が過渡的応答を示す場合に FDTD の時間ステップ $\triangle t$ 毎に両者を電磁界→温度界の順で遂次解析する (図 5)。よって

$$\triangle t_H = \triangle t \tag{28}$$

である。この場合は (7) による瞬時吸収電力密度を用いる。後者では、電磁界が定常状態に達した場合に電磁界解析を停止させ温度界の FDTD 解析のみを媒質定数の有意差が出るまで n_L ステップ行なう。この時の吸収電力密度は定常状態に達した時刻 t[sec] での電磁界の一周期 T[sec] に渡る時間平均が与える実効値で与える。

$$\bar{S}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \sigma(\boldsymbol{r},\tau)|E_z(\boldsymbol{r},\tau)|^2 d\tau \tag{29}$$

以降はこれらの同期及び非同期処理を交互に行う。$\triangle t_H$ は適当に大なる整数 n_H を選んで電磁界の時間周期 T の整数倍かつ (25) を満たすように設定する。

$$\triangle t_H = n_H T \tag{30}$$

n_H の上限は

$$n_H < Int\left[\frac{1}{2D_{max}T\{(1/\triangle x)^2 + (1/\triangle y)^2\}}\right] \tag{31}$$

である。ここで、$Int[\cdot]$ は整数部分を採る演算子である。

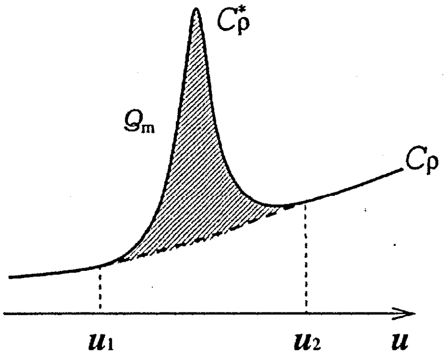


図 6　容積比熱 $C\rho$ の温度依存性 (混合物質における相変化の模式図)

相変化　電磁界解析と熱伝導解析の双方で、被加熱体の相変化に伴う媒質定数の時刻変化に対応したスキームは前述のように用意してある。先の報告 [1] では、水に代表される純物質における特殊な相変化の取り扱い関して示した。純物質ではない冷凍食品においては、相変化はある程度の温度変化幅において生ずるため、その取り扱いは本来の容積比熱 C_ρ に融解熱量 Q_m[J/m^3] を考慮した見掛けの容積比熱 C_ρ^* を導入することで扱う [3,5]。つまりは、図 6 のように相変化を生じる温度帯 $u = u_1 \sim u_2$ で斜線部分の面積が融解熱量 Q_m に相当するように (適当に) 設定する。これは熱的な媒質定数の時間変化を考慮することにほかならない。融解熱量 Q_m が見掛けの熱容量 C_ρ^* にどのように反映されるかは自由度がある。よって融解熱量 Q_m を考慮した特性を仮定することで対応する。

エネルギー保存則　二次元系では一次元系のような意味での光学定理 [1] を導出することは困難であるため、表現上は別の指標を用いることにする。入射波源が分離可能な時間因子 $e^{-i\omega t}$ (ω は角周波数) を持つとして、エネルギー保存則を議論しておく。表現上、三次元系として有限サイズの冷凍食品 V を含みかつ入射波源を含まない閉曲面 S ($\boldsymbol{n}$ を外向き単位法線ベクトルとする) を考える。入射開始から十分時間が経過し過渡状態の効果が無視できるような定常状態を考える。この場合全領域の電磁界の時間因子は共通に $e^{-i\omega t}$ である。従って全電磁界の複素ポインティングベクトル $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*$ を考えれば閉曲面 S を一周期 T[sec] 当たり通過する全電力束は、無損失の場合 ($\sigma = 0$) は零である。

$$-\int_t^{t+T} d\tau \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\tau) \times \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r},\tau) \cdot \boldsymbol{n} dS = 0 \tag{32}$$

損失を持つ場合は損失の変化速度が電磁界の位相速度よりも十分小さければ時間的に定常な媒質定数であると見なせる。S を通過する全散乱電力束は無損失時よりも内部の損失分だけ減少するので全電力束としては

$$-\int_t^{t+T} d\tau \iint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\tau) \times \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r},\tau) \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_t^{t+T} d\tau \iiint_V \sigma(\boldsymbol{r},\tau) |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\tau)|^2 dv \tag{33}$$

$$= T \iiint_V \bar{S}(\boldsymbol{r},\tau) dv \tag{34}$$

が成り立つ。上式は $\sigma \equiv 0$ で (32) に移行する。従って対象とする二次元モデルにおいては、エネルギー保存則は

$$P_{out}(t) = P_{los}(t) \tag{35}$$

$$P_{out}(t) = -\frac{1}{T}\int_t^{t+T} d\tau \int_{\text{冷凍食品の周囲}} \{E_z(\boldsymbol{r},\tau)H_x(\boldsymbol{r},\tau)\boldsymbol{e}_y - E_z(\boldsymbol{r},\tau)H_y(\boldsymbol{r},\tau)\boldsymbol{e}_x\} \cdot \boldsymbol{n} dl \tag{36}$$

$$P_{los}(t) = \iint_{\text{冷凍食品}} S(\boldsymbol{r},t) dx dy \tag{37}$$

ただし、$\boldsymbol{n}$ は冷凍食品外周の外向き単位法線ベクトル、dl は外周に沿う線要素である†。実際には規格化誤差 P_{err}

$$P_{err} \equiv 1 - \frac{P_{los}(t)}{P_{out}(t)} \tag{38}$$

を計算して、FDTD 計算の安定度判定に用いる。

†実質上、$\boldsymbol{n}$ は $\pm\boldsymbol{e}_x, \pm\boldsymbol{e}_y$ のどれか一つ、dl は dx または dy である。

熱収支　対象冷凍食品には境界で外部との熱交換があるから、電磁界の FDTD 解析同様に熱伝導の FDTD 解析においても熱収支の計算により精度検証が可能となる。一般式は省略し、電磁界の意味では定常状態となる任意の時刻 t [sec] での熱解析の一ステップ毎における計算式のみ示しておく。内部損失による Joule 損 Q_σ[J/m] と温度上昇による蓄積熱量の増分 Q_T[J/m] 及び外部への熱流出量 Q_e[J/m] に対し、熱収支関係

$$Q_\sigma(t) = Q_T(t) + Q_e(t) \tag{39}$$

$$Q_\sigma(t) = \Delta t_H P_{los}(t) \tag{40}$$

$$Q_e(t) = \int_{\text{冷凍食品の周囲}} h(\boldsymbol{r},t)\left\{u(\boldsymbol{r},t)\Big|_{\boldsymbol{r}\in L^-} - u(\boldsymbol{r},t)\Big|_{\boldsymbol{r}\in L^+}\right\}\cdot \boldsymbol{n}dl \tag{41}$$

$$Q_T(t) = \iint_{\text{冷凍食品}} \{q(\boldsymbol{r},t) - q(\boldsymbol{r},t-\Delta t_H)\}dxdy \tag{42}$$

$$q(\boldsymbol{r},t) = C_\rho(\boldsymbol{r},t)u(\boldsymbol{r},t) \tag{43}$$

を計算する。実際には規格化誤差 Q_{err} を計算する。

$$Q_{err} \equiv 1 - \frac{Q_T(t)+Q_e(t)}{Q_\sigma(t)} \tag{44}$$

4　シミュレーション例

パラメータ　解析領域を空気中の 0.5[m]×0.5[m] の正方形領域とする。入射波源の単色平面電磁波は、例えば二方向 ($+x$,$-x$ 側) 入射の場合

$$E_z^{in0}(\boldsymbol{r},t) = Im\ E_0 e^{-i(2\pi f t - k_0 x + \theta_{-x})} \qquad E_z^{in1}(\boldsymbol{r},t) = Im\ E_0 e^{-i(2\pi f t + k_0(x-x_e)+\theta_{+x})}$$

$$H_y^{in0}(\boldsymbol{r},t) = E_z^{in}(\boldsymbol{r},t)/Z_0 \qquad H_y^{in1}(\boldsymbol{r},t) = E_z^{in}(\boldsymbol{r},t)/Z_0$$

である。Im は虚数部を採る演算子、E_0[V/m] は入射電界の最大振幅、f[Hz] は周波数、k_0 は真空中での波数、$Z_0 = 376.99[\Omega]$ は真空の固有インピーダンスである。$\theta_{\pm x}$[rad] は適当な初期位相、$x_e = 0.5$[m] である。入射平面電磁波の周波数とパワーを

$$f = 2.45[\mathrm{GHz}], P_{inc} = 8[\mathrm{kW/m^2}]$$

に設定する。電界と温度界との対応関係は前述のように二通りあるが、本報告では処理の簡単な図 3(a) の方式とする†。被加熱体は数種の白身魚擂身の混合物を冷凍したバルクであるが、その電磁気的熱的媒質定数は不明である。そこで組成が近しいマグロブロックの測定結果 [6] を流用し、相変化に要する融解潜熱が 248.0[kJ/kg] となるように図 7 の温度依存性を持つと仮定する。その最大比誘電率 52.5 より領域分割数と時分割数を

$$\mathrm{N}_x = \mathrm{N}_y = 400,\ n_T = 277,\ n_H = 421811522$$

と定めると、空間差分長と時間差分長は以下のようになる。

$$\Delta x = \Delta y = 0.00125[\mathrm{m}],\quad \Delta t = 1.473513593162897[\mathrm{ps}],\ \Delta t_H = 0.172167968163265[\mathrm{sec}]$$

被加熱体の初期温度は一様に $u = -25$°C とし、熱伝達率を $h = 5.8[\mathrm{W/(m^2{\cdot}K)}]$、外気温 $u_{out} = -27$°C に固定する。電磁界解析における要求エネルギー誤差は 10^{-3} 以内、もしくはエネルギー誤差の変動率が 10^{-3} 以内、もしくは 1000 サイクルの超過で安定状態と見なす。なお、$n_L = 1$ とする。

計算例 1　50mm×100mm の冷凍食品の中心を図 1 の x-軸上 0.225[m] の位置に配置する。図 8 は擂身中の最高温度と最低温度の時間発展及び規格化電力誤差と熱収支誤差の時間発展である。最高温度及び最低温度ともに上昇する。-10°C を越える $t = 30$[sec] 付近で最高温度の上昇速度がやや鈍化する。これは被加熱体の相変化が始まったためであり、該当部位に潜熱分の熱量が蓄積して相変化が終る $t = 110$[sec] 付近まで続く。以降は特に 0°C

†今回のシミュレーションでは図 3(a),(b) の処理法の相違によるシミュレーション結果の有意差はほとんどない。

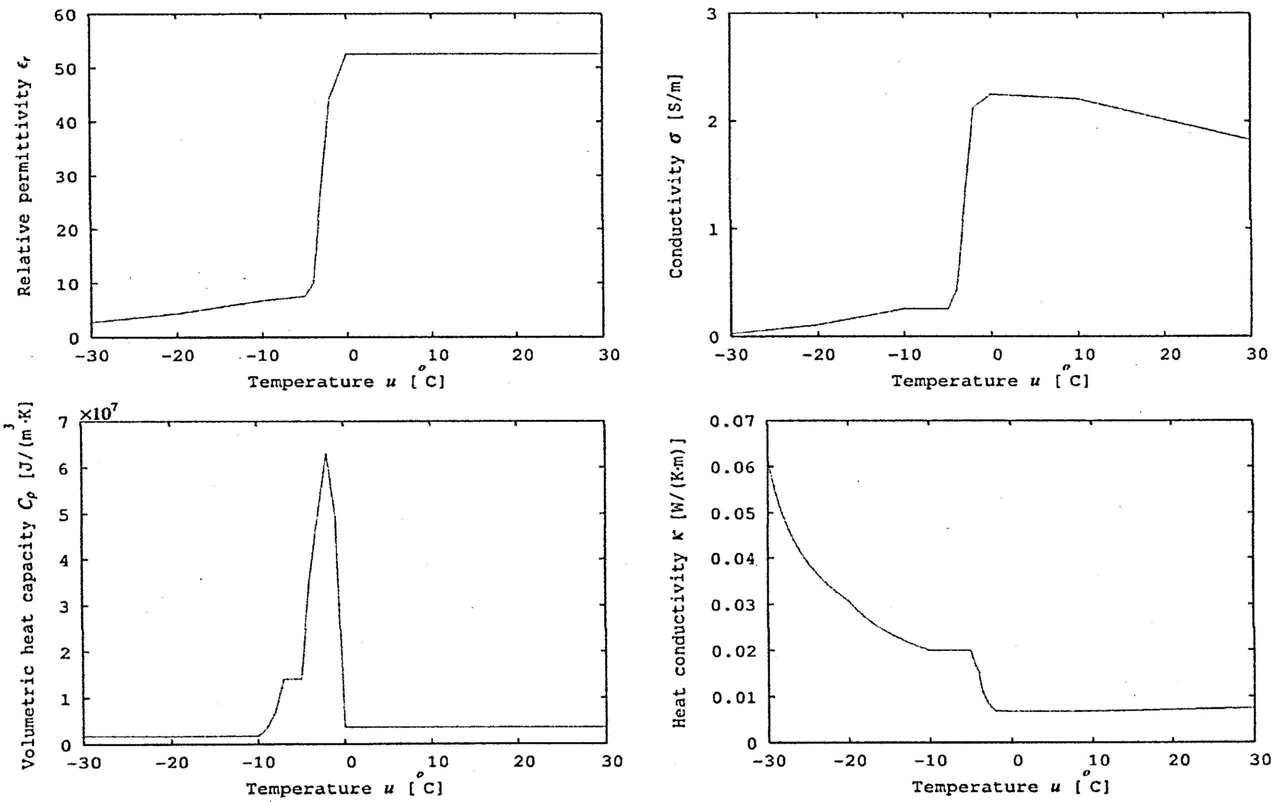


図 7　擂身の媒質定数の温度依存性

を越えてからは急激に上昇し、最低温度との差は開く一方である。最低温度は $t = 150$[sec] 付近から相変化に移行する。全体として電力誤差は 2% 以内、熱収支誤差は 3% 以内におさまっており、特に最高温度が 0°C を越えてからしばらくは誤差が小さくなる。時刻が更に経過し $t = 350$[sec] 以降は最高温度と最低温度の差が極端に開くため、誤差は再び増加傾向になる。しかしながら、これ以降の時刻や他の計算例においても誤差は同程度であり、精度は十分確保されている。図 9 に冷凍食品内の温度分布 u、規格化吸収電力分布 $\bar{S}$、規格化電界強度分布 $|E_z|^2$ を示す。温度は 5°C 以上は白で表示し、吸収電力は 1355592[W/m^3]、電界強度は 21010708[V^2/m^2] による規格化値である。これらは以降の表示においても同じである。左右からの照射により、内部的には定在波を生じ電界分布つまりは吸収電力分布の局在化を生じる。これは食品の中央よりも上下面から 5cm 程度内部に集中している。これは端部による影響と考えられる。このため主に内部から温度上昇していく。時間経過すると、そのような部位が特に著しく温度上昇してゆき、むしろ中央周囲の部位が取り残される形になる。

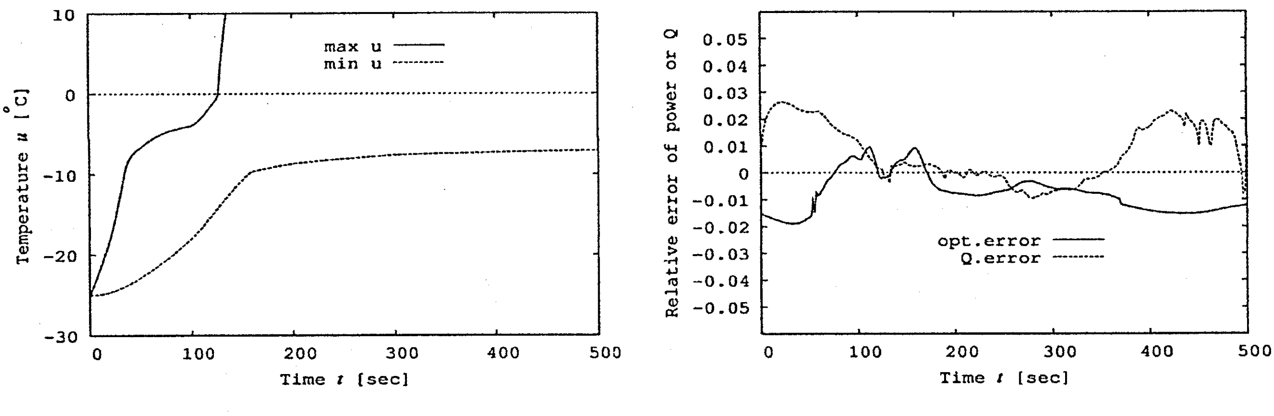


図 8　最高温度と最低温度の時間発展及び規格化電力誤差と熱収支誤差の時間発展

計算例 2　計算例 1 と同じ計算であるが、入射波の位相を非同期計算の終了毎にある任意の量だけずらしていくことで、全体として疑似的な位相のゆらぎを導入した例である (図 10)。表示時間のサンプリングの都合で内部電界強度もしくは吸収電力分布の時系列的なズレは表現されていないが、計算例 1 のそれらと比較すると疑似ゆらぎによる撹拌が読み取れる。温度分布は比較的ならされた形で現れているが、それでも端部において温度上昇が集中する。ゆらぎ下においても中央部分は電磁界の局在により熱源になりやすいと考えられる。しかしながらこれは端部からの距離が小さいからであり次の計算例と比較すればよく分かる。

計算例 3　端部の影響を抑制するため、縦方向を 5 倍程度に延長させた 50mm×490mm の冷凍食品に対し計算する。図 11 に時刻 $t = 499.2871096$[sec] での疑似位相ゆらぎ無/有の分布を示す。温度分布の局在は端部付近に限られることが分かる。特にゆらぎ有の場合は両端の約 30mm 程度を除くと、内部を含めてほぼ均一な加熱となっていることが分かる。

計算例 4　端部の影響とは基本的には、角形状を持つことによる電界の集中により生じる振舞いである。このため角を無くした円形で計算する。この計算では入射波は更に二方向 $(+y,-y)$ を追加し、四面からの同時照射としている。直径 200mm の円形冷凍食品を中央に置いた場合の計算結果を図 12($t = 172.167972$[sec])、図 13($t = 499.2871096$[sec]) に示す。ゆらぎが無い場合は、可干渉性のある入射波による内部での干渉パターンにより特定の 6 カ所に電磁界が集中し発熱源となり温度上昇する。その他の部位は熱伝導による温度上昇のみであるため非常にまだらな温度分布を示す。一方、ゆらぎ有の場合は内部の干渉パターンが変動するため全体として均一化がなされ、ほぼ同心円状の温度分布を示している。図 13 の結果からは、表面から厚み約 25mm〜30mm 程度がほぼ均一的に半解凍されている。相変化状態下に対し吸収電力分布の立場からは、15mm〜20mm 程度が浸透する深さと言える。

5　むすび

本報告では冷凍食品のマイクロ波照射による半解凍シミュレーションを二次元開放領域モデルにおいて FDTD 法により行なった。シミュレーションの結果、状況設定や形状如何では、均一半解凍に近しい状態を生じさせることが可能であると結論付けできる。今後は、実際の半解凍システム試作品をシミュレートするため、三次元化と閉領域化を検討したい。

文献

[1] 田村安彦、服部一裕, “電磁波照射による氷解凍の FDTD 解析 –相変化–”, 電気学会電磁界理論研究会資料, EMT 08-132(2008)

[2] 田村安彦、服部一裕, “冷凍食品におけるマイクロ波半解凍の FDTD 解析”, 電気学会電磁界理論研究会資料, EMT 10-158(2010)

[3] 渡邊慎也、角田陽一、橋本修, “電子レンジ庫内に置かれた被加熱物質の解凍むらに関する検討”, 電子情報通信学会論文誌 E-C88, Vol.J88-C, no.12 pp.1149-1158(2005)

[4] 宇野 亨, FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析, コロナ社 (1998)

[5] 片山功蔵、服部賢, “凍結を伴う熱伝導の研究 (第 1 報 ステファン問題の数値解法)”, 日本機械学会論文集, vol.40,no.333, p.1405-1411(1974)

[6] 劉長民、酒井昇, “マグロの 2450MH z および 915MH z における誘電特性と温度”, 日本食品科学工学会誌 第 46 巻第 10 号 (1999)

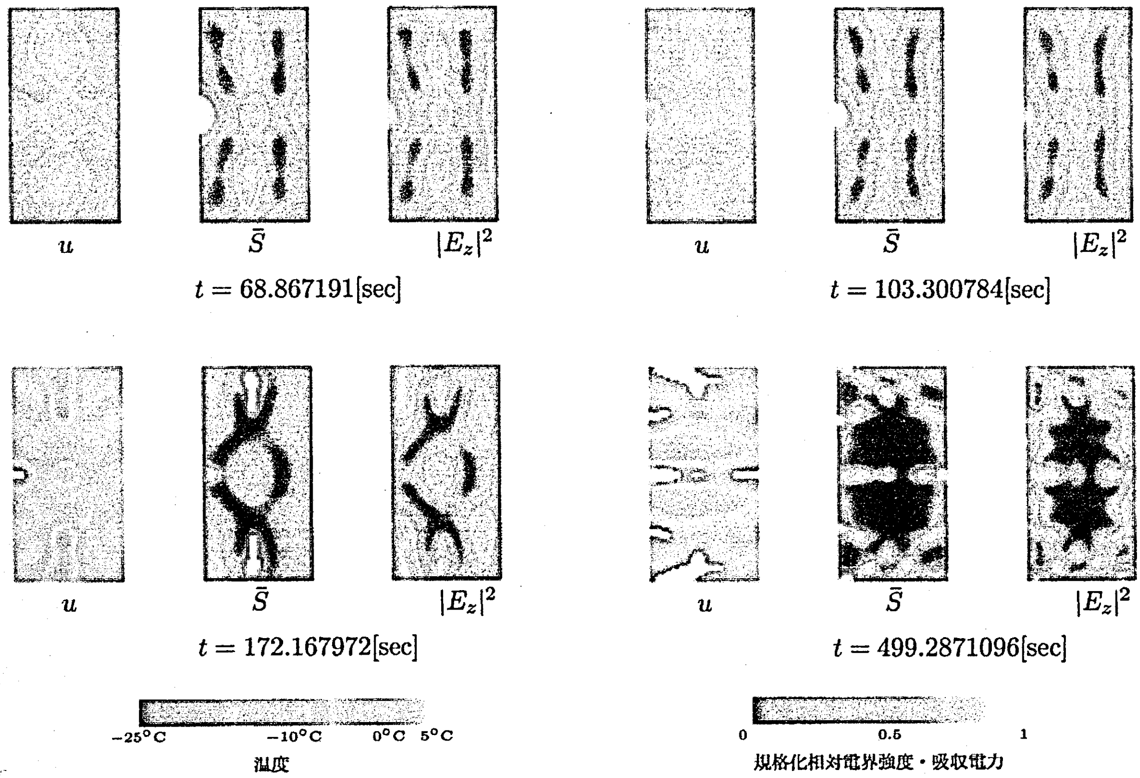


図 9　矩形冷凍食品内部の温度分布と吸収電力分布・電界強度分布 (疑似位相ゆらぎ無、50×100[mm])

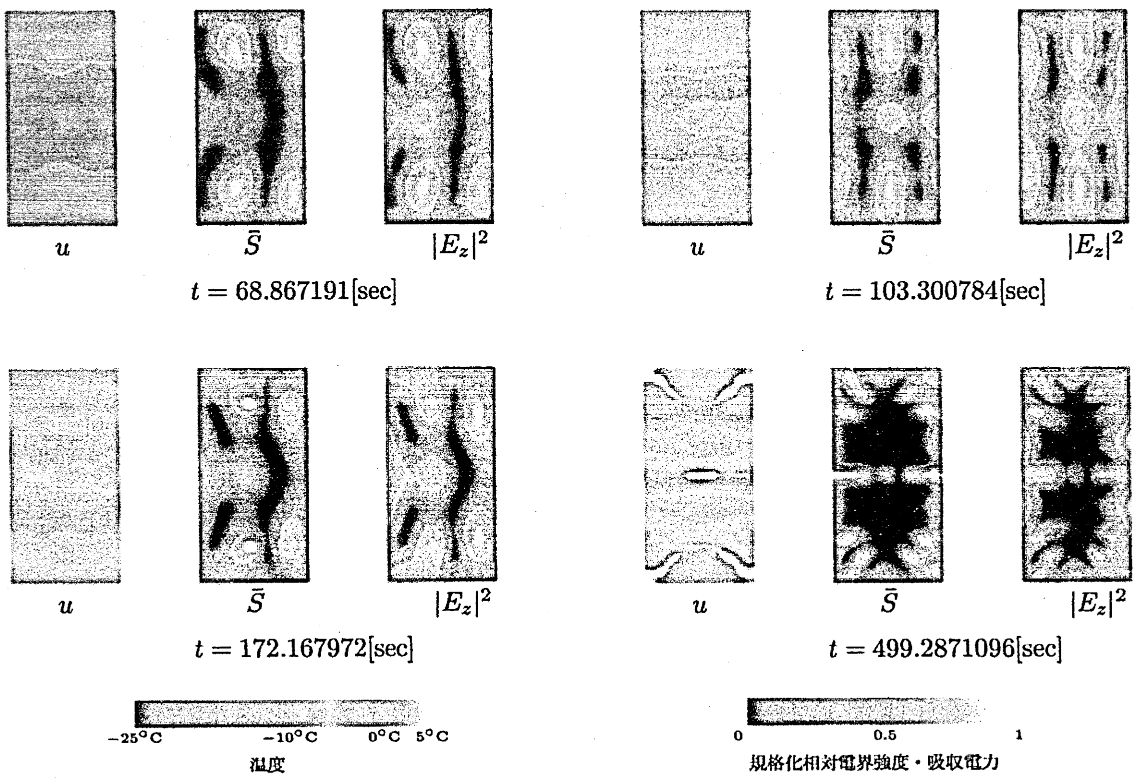


図 10　矩形冷凍食品内部の温度分布と吸収電力分布・電界強度分布 (疑似位相ゆらぎ有、50×100[mm])

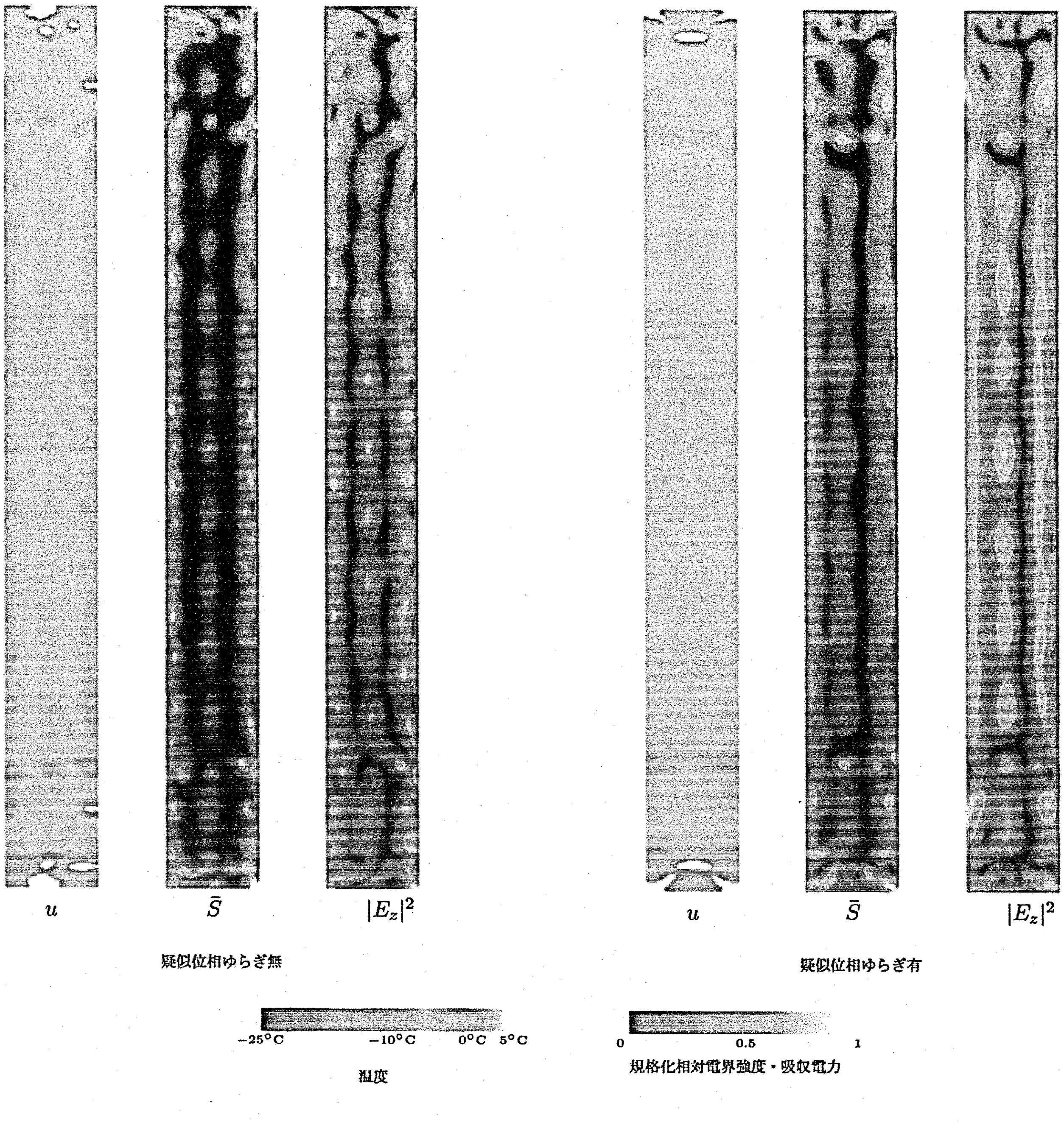


図 11　矩形冷凍食品内部の温度分布と吸収電力分布・電界強度分布 (50×490[mm],t = 499.2871096[sec])

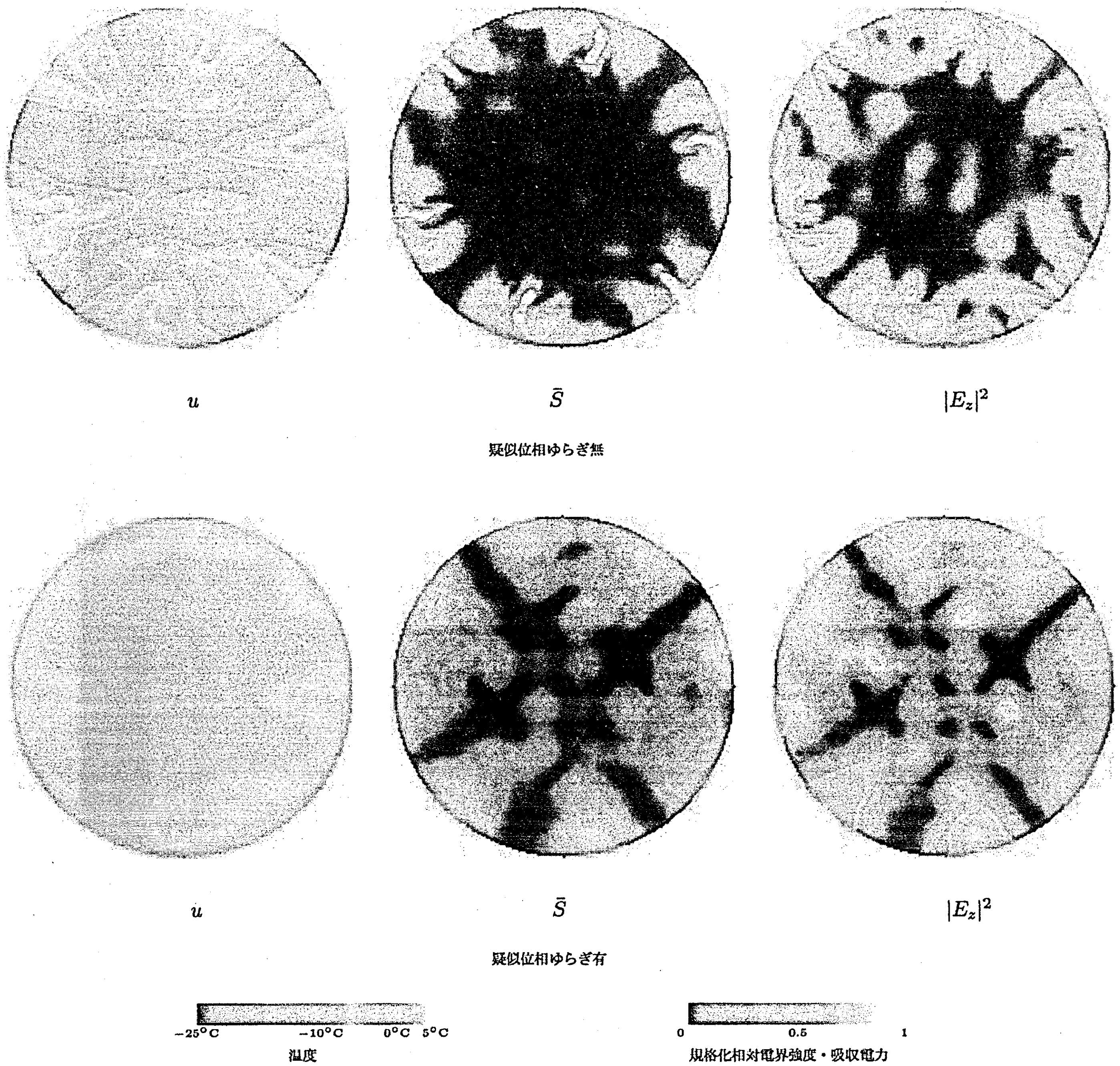


図 12　円形冷凍食品内部の温度分布と吸収電力分布・電界強度分布 (直径 200[mm],t = 172.167972[sec])

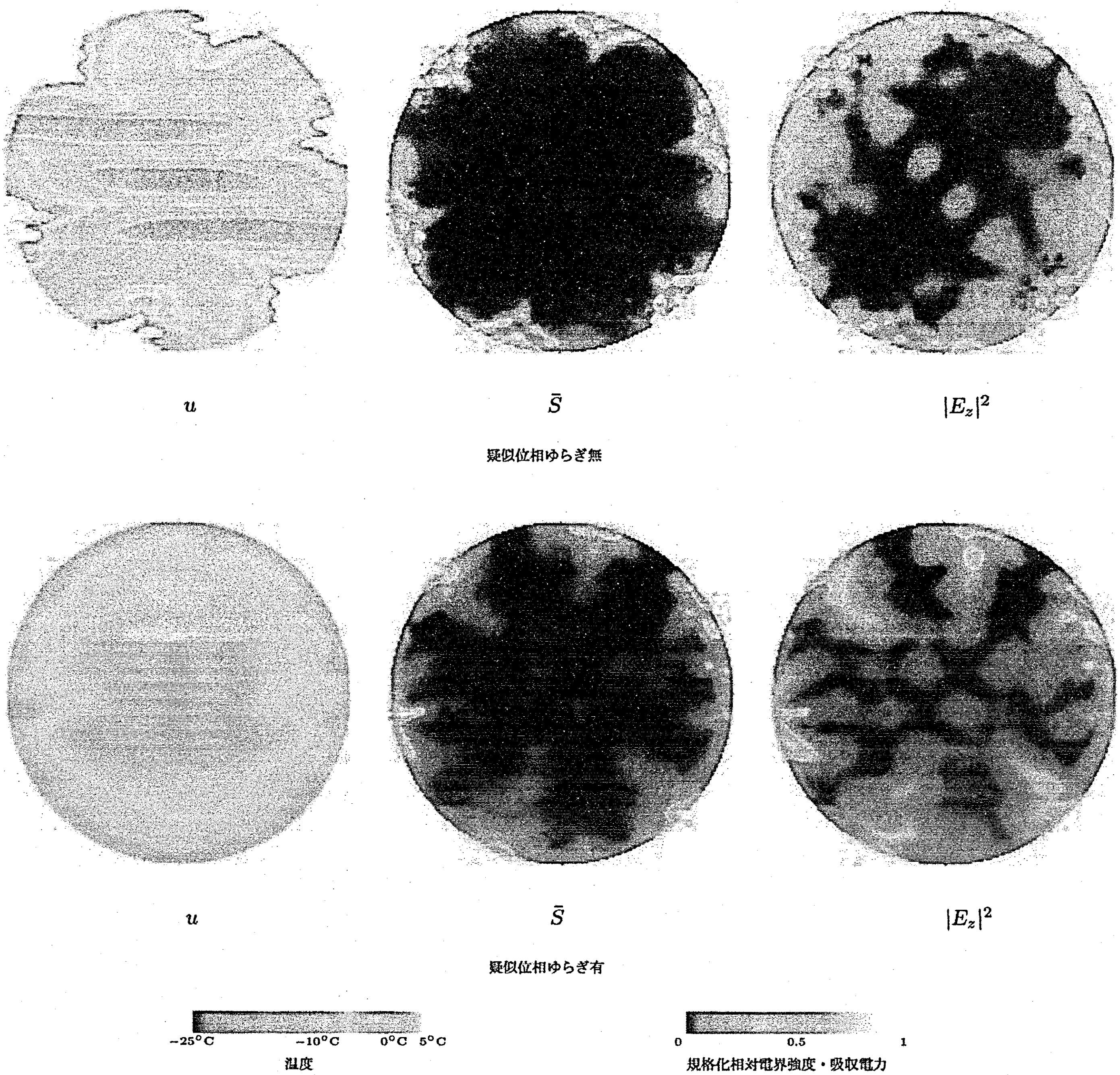


図 13　円形冷凍食品内部の温度分布と吸収電力分布・電界強度分布 (直径 200[mm], t = 499.2871096[sec])

輻射科学研究会資料
RS10-13

ミリ波誘電体レンズアンテナのレンズ構造によるビーム偏向の検討

Investigation on Beam Deflection of Millimeterwave Dielectric Lens Antenna

川村一代[1]，河合　正[2]，榎原　晃[2]，北内　篤[3]，松井宏康[3]
Kazuyo Kawamura[1]，Tadashi Kawai[2]，Akira Enokihara[2]，Atsushi Kitauchi[3]，Hiroyasu Matsui[3]

[1] 兵庫県立大学　工学部　電子情報電気工学科
School of Engineering, University of Hyogo
[2] 兵庫県立大学　大学院工学研究科　電気系工学専攻
Graduate School of Engineering, University of Hyogo
[3] ＤＸアンテナ株式会社
DX Antenna Co., Ltd.

2011 年 3 月 28 日
於　大阪大学

概要

レンズアンテナの指向性制御は難しい課題の一つである．本稿では，レイトレーシング法を用いてレンズアンテナを設計する際に，放射波の波面を傾けることでビームを偏向させることを検討し，レンズアンテナの底部に位相補償器を取り付けることで，効果的にビームを偏向させる構造を見いだした．さらに，その構造を基にして，高利得のマルチビームレンズアンテナを設計し，実験的にもその有効性を確認した．

1. はじめに

近年，60GHz のミリ波帯は民生用の高速無線伝送に利用され始めている．ミリ波は波長が短いため，光線としての振る舞いが現れる．そこで，波長に対して相対的に広い開口面からの放射波の波面をそろえることによって，レンズアンテナは極めて鋭い指向性を実現できる．しかしながら，レンズアンテナは正面に高い指向性を実現できる代わりに，偏向させたり，あるいは，ビームを二つに分離するマルチビーム特性を実現することは困難であり，そのため，1 対 1(ポイント・ツゥ・ポイント)の通信には特長が発揮できるが，1 対多(ポイント・ツゥ・マルチポイント)無線通信への適用に向かない．そこで本研究では，このような，レンズアンテナのレンズ構造を制御することによりビームの偏向とマルチビームを実現することを目的とする．

2. 誘電体レンズアンテナの設計

2.1 レイトレーシング法による誘電体レンズアンテナの設計

レイトレーシング法では，はじめに一次放射源(焦点)の指向性を考慮して，レンズ径と焦点距離を決める [1]．図 1 にレイトレーシング法の原理図を示す．

スネルの法則

$$n\frac{\Delta x}{B}=\frac{x}{A} \qquad (1)$$

より，焦点から放射された電波がレンズと空気の境界面で二回屈折して平行になるようにする．そのためには，レンズ内での波長短縮を考慮し，等位相面において波面がそろうようにレンズ面の形状を決める必要がある．図 1 より，

- 原点を通る，焦点から位相面までの光学長　　$F+nH+(H_{\mathrm{R}}-H)$
- 点 P を通る，焦点から位相面までの光学長　　$A+nB+(H_{\mathrm{R}}-h)$
- 点 Q を通る，焦点から位相面までの光学長　　$C+H_{\mathrm{R}}$

但し，

$$A^2=F^2+x^2 \qquad (2)$$

$$B^2=\Delta x^2+h^2 \qquad (3)$$

$$C^2 = F^2 + X^2 \qquad (4)$$

である．上記の三つの線分の長さは一定でなければならないから，

$$F + nH + (H_R - H) = A + nB + (H_R - h) = C + H_R \qquad (5)$$

となる．

以上，式(1)〜(5)を用いてレンズ表面の z を x の関数で表わすと，次のようになる．

$$z = A - C - \frac{n^4A^2(A-C)}{n^4A^2 - n^2A^2 + x^2} + \frac{n^2A}{2x}\sqrt{\left\{\frac{2n^2Ax(A-C)}{n^4A^2-n^2A^2+x^2}\right\}^2 - 4\frac{x^2(A-C)^2}{n^4A^2-n^2A^2+x^2}} \qquad (6)$$

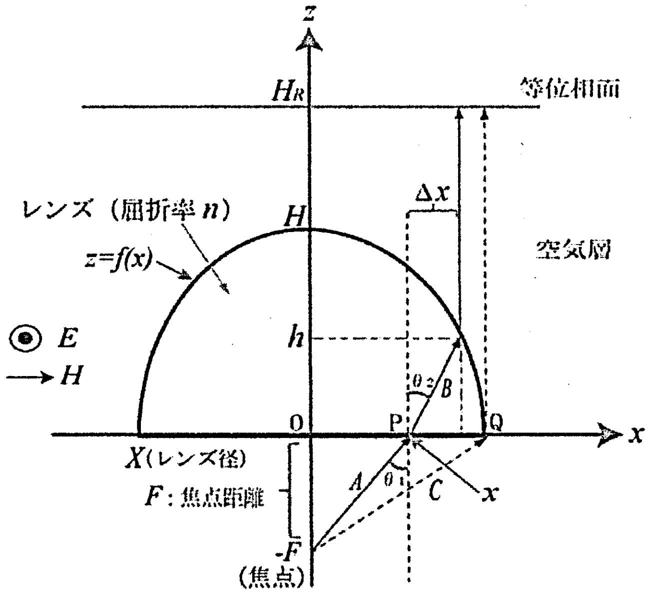


図１　レイトレーシング法原理図

以下の条件で，実際にレンズ形状を計算すると，図２のようになる．レンズの高さは 23.96mm である．

レンズ材料：ポリプロピレン

レンズ材料の誘電率：2.3

開口半径 X=20mm

焦点距離 F=10mm

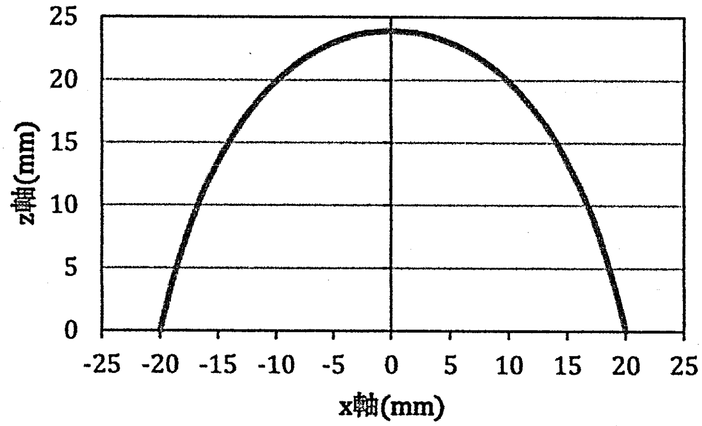


図２　レイトレーシング法によるレンズ設計

この形状の誘電体レンズアンテナの特性を高周波三次元電磁界シミュレータ(HFSS：High-Frequency Structure Simulator)を使用して解析を行った．

●給電方法

WRJ-60 導波管からテーパ部分を介して 3.4mm 角の開口を設けて給電する．図３にレンズアンテナの断面図を示す．

●解析方法

時間短縮のため，図４に示すように導波管，レンズアンテナを対称面で 4 分の 1 にカットし，曲面を多角形で近似して解析を行う．

●指向性の評価方法

ビームピーク値の大きさ G_{max} およびビームピーク値の方向 θ_{max}，ビームピーク値より 6dB 低下した点におけるビームの角度幅 $\Delta\theta$(6dB ビーム幅)の比較により，レンズアンテナの性能を評価する．

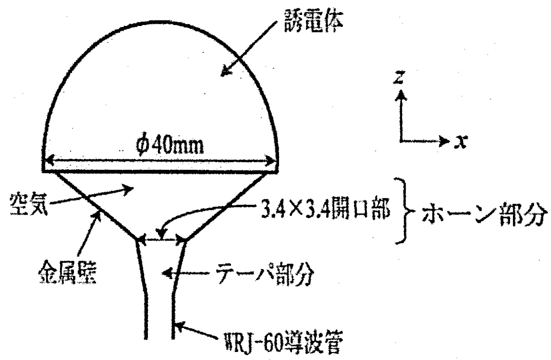


図３　レンズアンテナ断面図

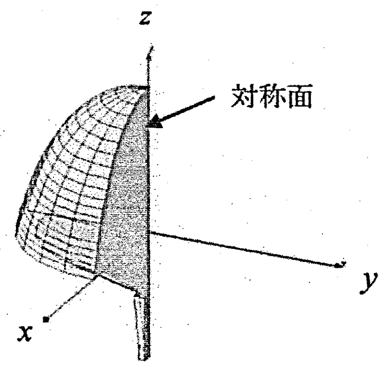
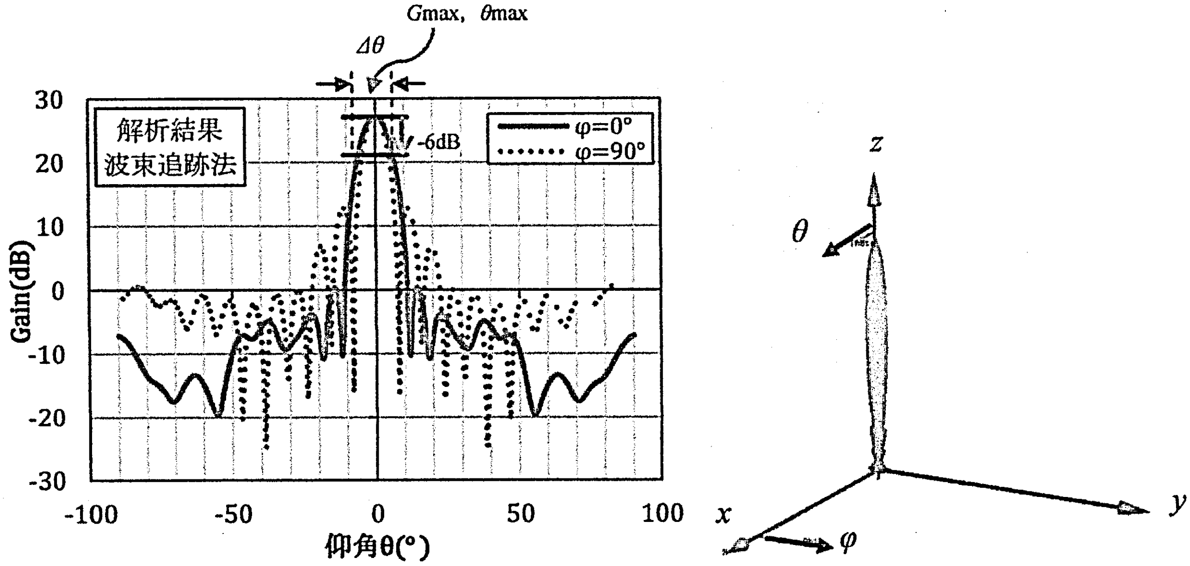


図４　HFSS 解析モデル

図５および表１に解析結果を示す．φ=90°方向において G_{max} が 27.18dB，$\Delta\theta$ が 9.6° の鋭い指向性を持つことが予想される．



(a)二次元放射パターン　　(b)三次元放射パターン

図５　レイトレーシング法による解析結果

表１　指向性評価(単一指向性レンズアンテナ)φ=90°

解析結果	G_{max} (dB)	θ_{max} (°)	$\Delta\theta$(°)
レイトレーシング法	27.18	0	9.6

2.2　試作・実験

設計・解析を行ったレンズアンテナを実際に試作し，実験を行った．図 6 に試作したレンズアンテナの写真を示す．

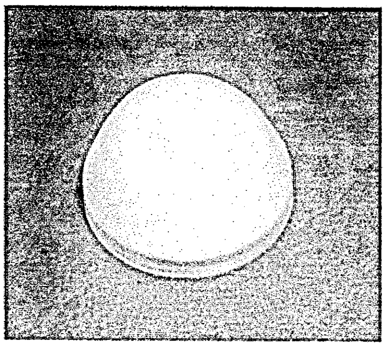


図 6　試作レンズアンテナ

試作したレンズアンテナの実験結果を図 7 および表 2 に示す．解析結果と比較すると，φ=90°方向において，G_{max} は 0.4dB 程度低くなるものの，解析結果とほぼ一致していることがわかった．G_{max} の差は解析時のレンズ表面の粗さや，実験時の金属壁表面の酸化等によるロスが原因だと考えられる．

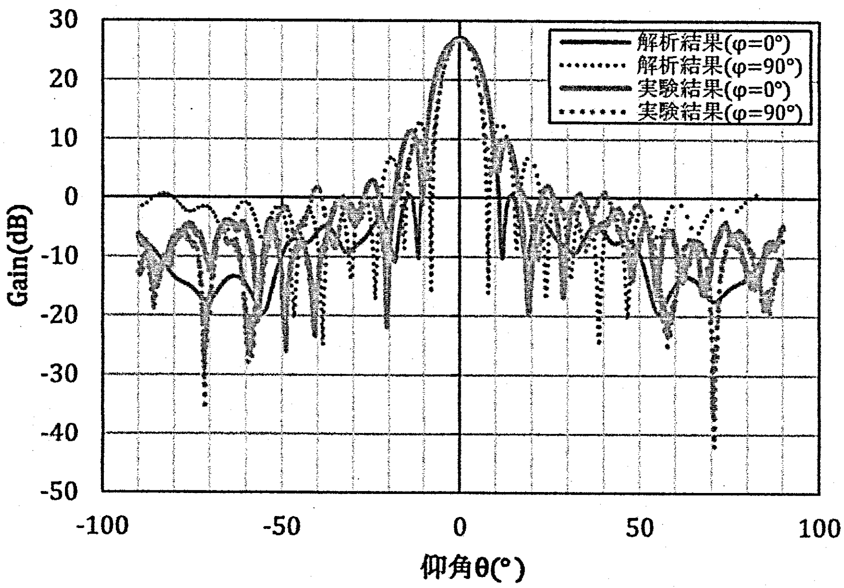


図 7　単一指向性レンズアンテナの実験結果

表２　指向性評価結果 φ=90°

レイトレーシング法	G_{max} (dB)	θ_{max} (°)	$\Delta\theta$(°)
実験結果	26.74	0	9.89
解析結果	27.18	0	9.6

3.　レンズアンテナの指向性制御

3.1 ビームの偏向

指向性制御の第一段階として，レイトレーシング法を発展させて等位相面を傾けることで指向性の角度を調節し，ビームの偏向を実現させるレンズアンテナ設計法を考案した．図８に原理図を示す．この設計法は，レンズ形状は回転対称で，また，等位相面も円錐型となり，中央から角度 α のすべての方向にビームが出射すると予想される．

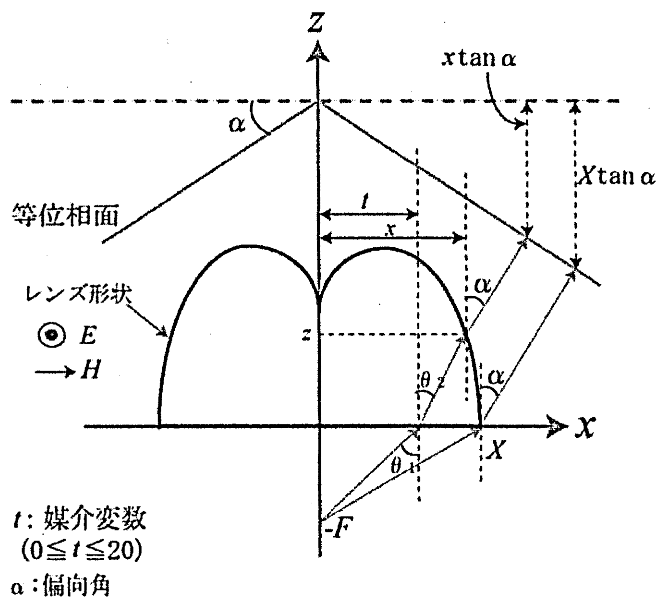


図８　ビームの偏向原理図

偏向角 α を変化させたときのレンズ形状の変化を図９に示す．図より，偏向角 α を大きくしていくほどレンズアンテナの高さは低くなり，中央がへこんだレンズ形状になることがわかる．

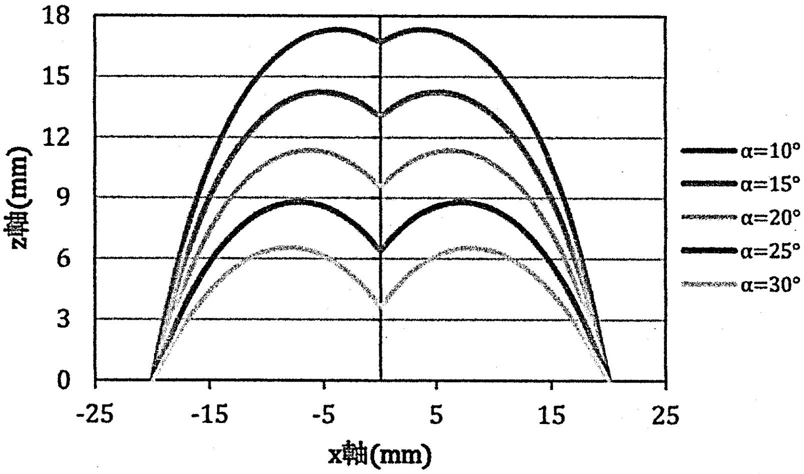


図９　レンズ形状と偏向角 α の関係

3.2　電磁界解析による特性評価

偏向角 α が 15°と 20°の場合の偏向レンズアンテナの解析・評価を行う．図１０，１１および表３に解析結果を示す. 偏向角 α が 15°の場合, ビームは明瞭には偏向していないが, α が 20°の場合, 仰角 θ=18.6°を中心にビームが両側に偏向していることがわかる.

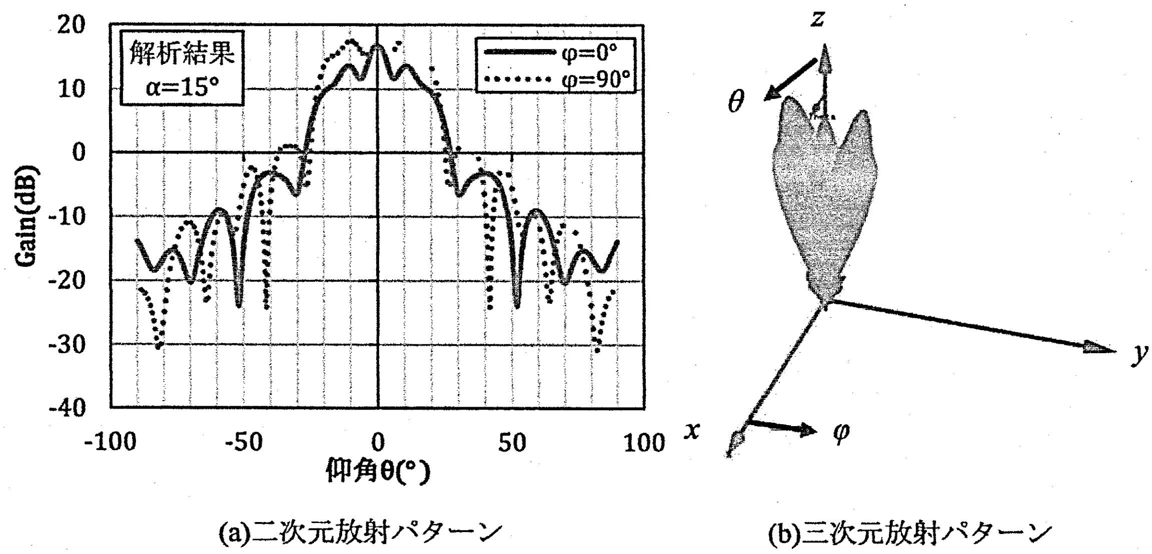
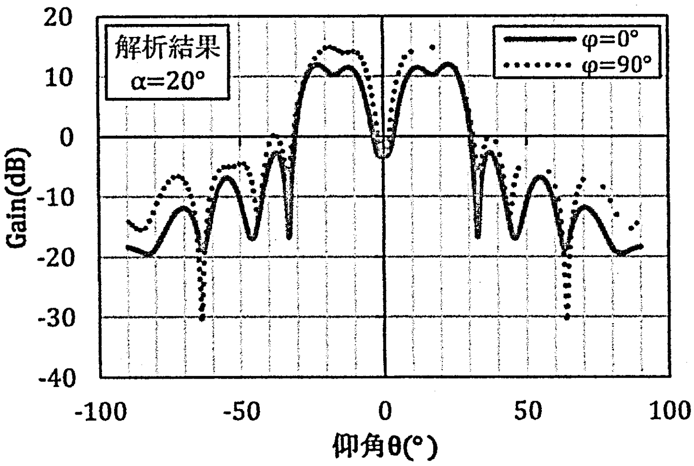
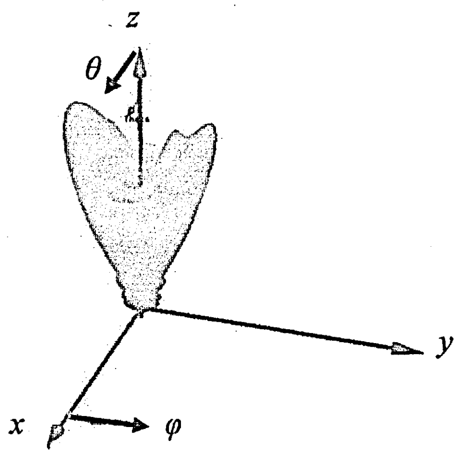


図１０　偏向レンズアンテナ(α=15°)解析結果



(a)二次元放射パターン



(b)三次元放射パターン

図１１　偏向レンズアンテナ(α=20°)解析結果

表３　指向性評価(偏向レンズアンテナ) φ=90°方向

解析結果	G_{max} (dB)	θ_{max} (°)	$\Delta\theta$(°)
α=15°	17.55	9.7	43.2
α=20°	14.89	18.6	23.0

3.3　試作・実験

設計・解析を行ったレンズアンテナ(α=15°，α=20°)を実際に試作し，実験を行った．図１２に試作したレンズアンテナの写真を示す．

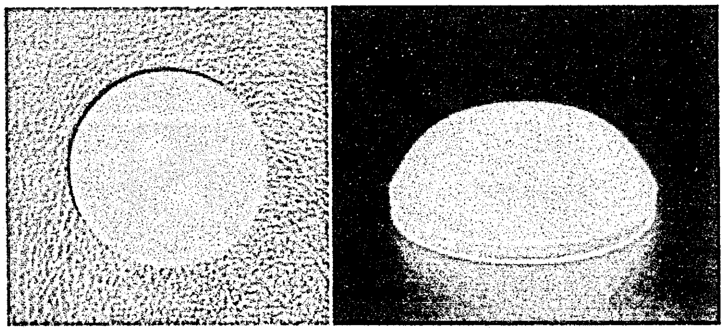


図１２　試作レンズアンテナ(左：α=15°，右：α=20°)

試作した偏向レンズアンテナの実験結果を図１３，１４および表４に示す．図より，解析と実験とでかなり良い一致を示しており，レンズアンテナのビームを偏向させる本設計方法の有効性が実験的にも確認できた．

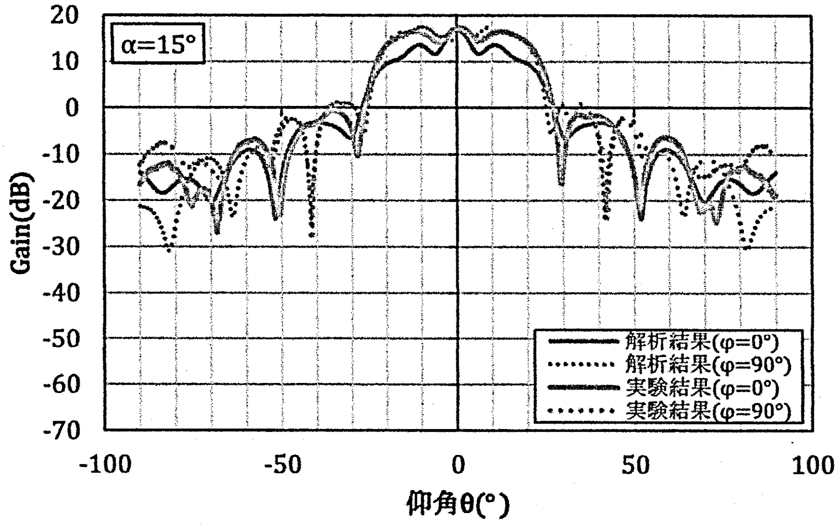


図１３　偏向レンズアンテナ(α=15°)実験結果

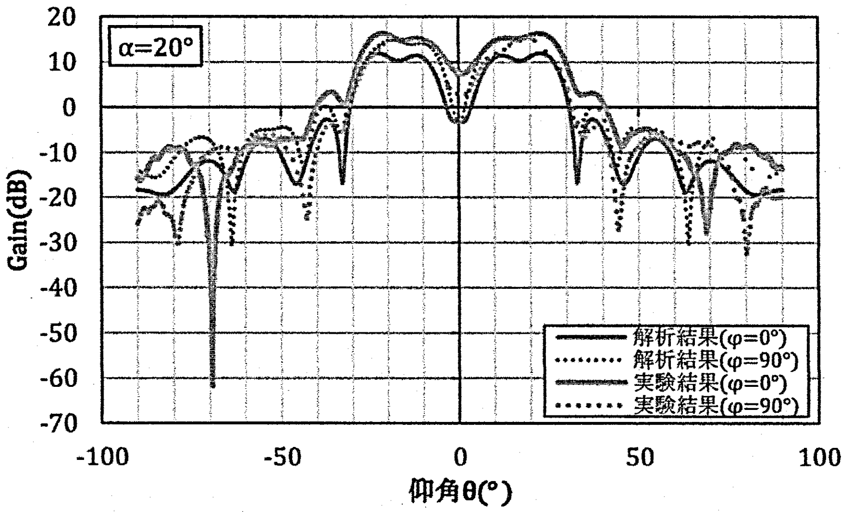


図１４　偏向レンズアンテナ(α=20°)実験結果

表４　指向性評価結果 φ=90°方向

	G_{max} (dB)	θ_{max} (°)	$\Delta\theta$(°)
実験結果 α=15°	17.38	0.752	44.7
解析結果 α=15°	17.55	9.7	43.2
実験結果 α=20°	15.40	18.13	20.37
解析結果 α=20°	14.89	18.6	23.0

4.　円錐型底部位相補償器によるビームの偏向

3 節で作製したレンズアンテナは，単一指向性レンズアンテナに比べ，レンズの高さが非常に低く，中央のへこんだいびつな形状になる．レンズの高さを単一指向性レンズアンテナとほぼ同じに保ったままビームの偏向を実現させるために，レンズ底部に位相補償器を設けてビームの偏向が実現できるか検討する．

4.1　円錐型底部位相補償器を取り付けた偏向レンズアンテナの設計

レイトレーシング法を用いて，等位相面を傾けることで指向性の角度を調節し，さらにレンズ底部に円錐型の位相補償器を取り付けることで，予め，レンズ表面に到達する際の波面を傾けておくことによって，単一指向性レンズアンテナに近いレンズ形状で偏向レンズアンテナを実現できるものと期待できる．図１５に本構造のレンズ原理図を示す．この設計法は，レンズ形状は回転対称で，3 節の偏向レンズアンテナと同様に，等位相面も円錐型となり，中央から角度 α のすべての方向にビームが出射すると予想される．

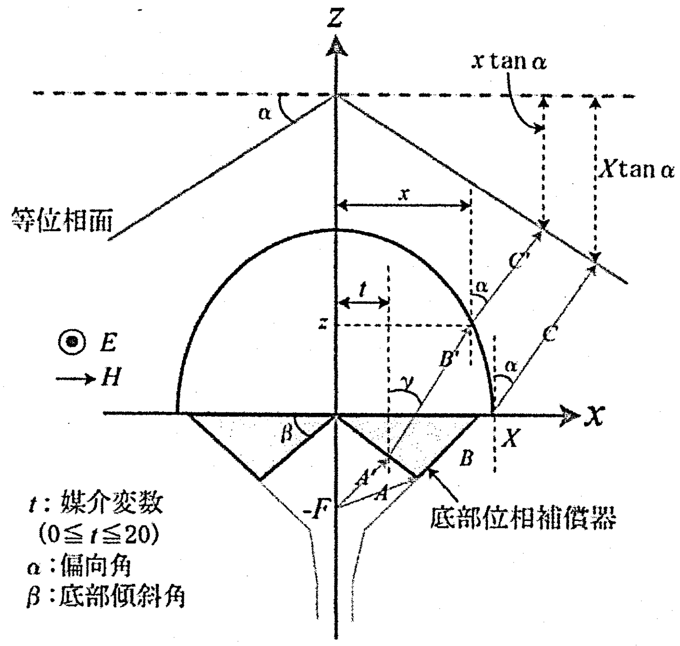


図１５　円錐型底部位相補償器原理図

表５に示した三通りの偏向角 α と，底部傾斜角 β との組み合わせで設計した偏向レンズアンテナのレンズ形状を図１６に，放射特性の解析結果を図１７～１９および表５に示す．いずれの場合も，α と β との組み合わせによって，レンズの高さを単一指向性レンズの高さ 23.96mm に近づけるようにした．

α を 16°, β を 30°として設計した偏向レンズアンテナは円錐型底部位相補償器を用いないタイプの偏向レンズアンテナとほぼ同じ G_{max} で，9.7°方向にビームの偏向が確認できた．同様に，α を 22°, β を 50°として設計した偏向レンズアンテナでは，15.9°方向にビームの偏向が確認できた．いずれの場合も，中央付近でゲインが持ち上がることがわかる．このタイプのビーム偏向型のレンズアンテナでは，傾斜型位相補償器のためにレンズ先端部には原理的に波が到達しないので，図１６にあるように，波が来ない先端部は平らに設計している．このことが中央付近でゲインが持ち上がることに関連しているかもしれない．

これらの結果より，底部位相補償器を取り付けることによって，単一指向性レンズと同じような高さで偏向レンズアンテナを設計できることがわかった．

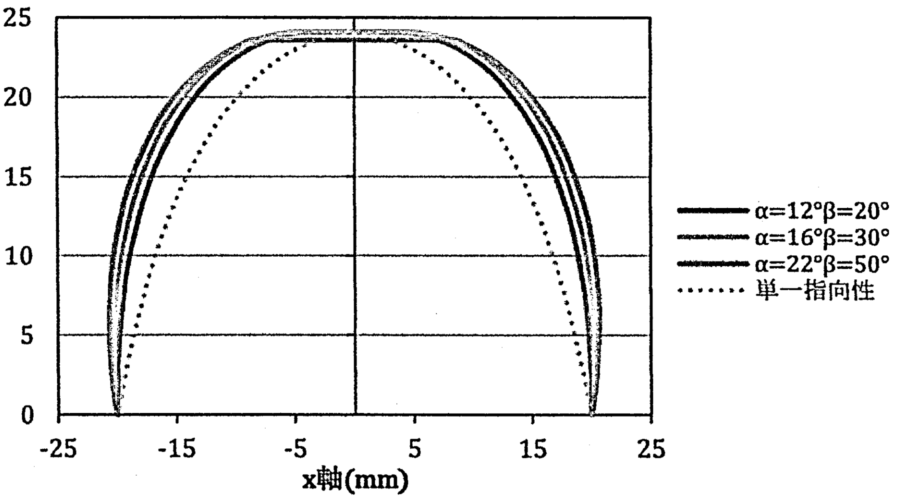
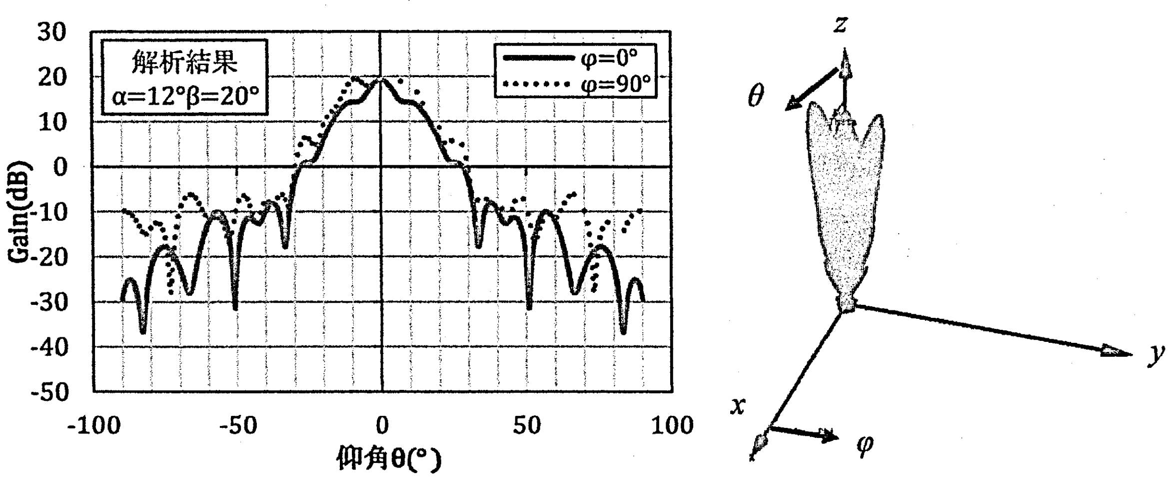
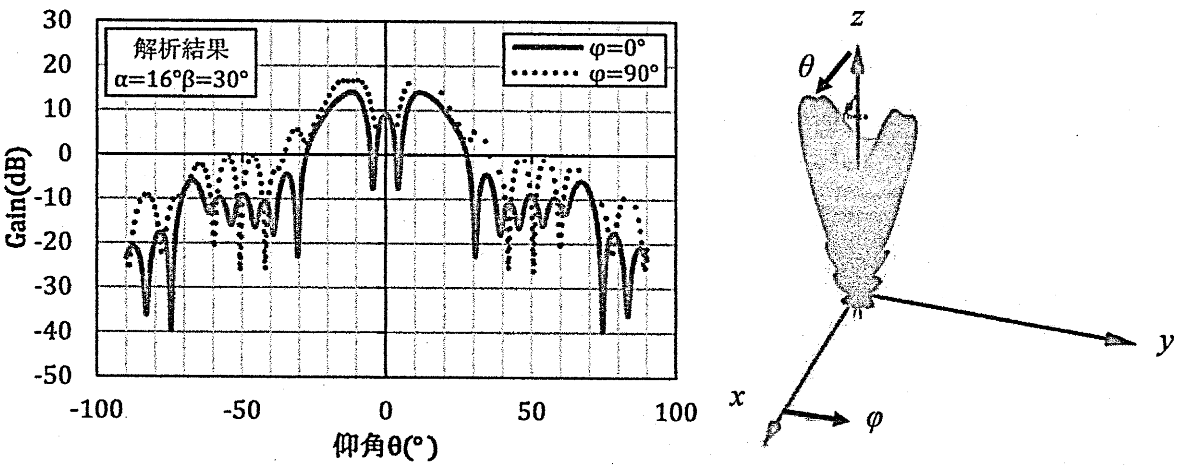


図１６　偏向レンズアンテナのレンズ形状



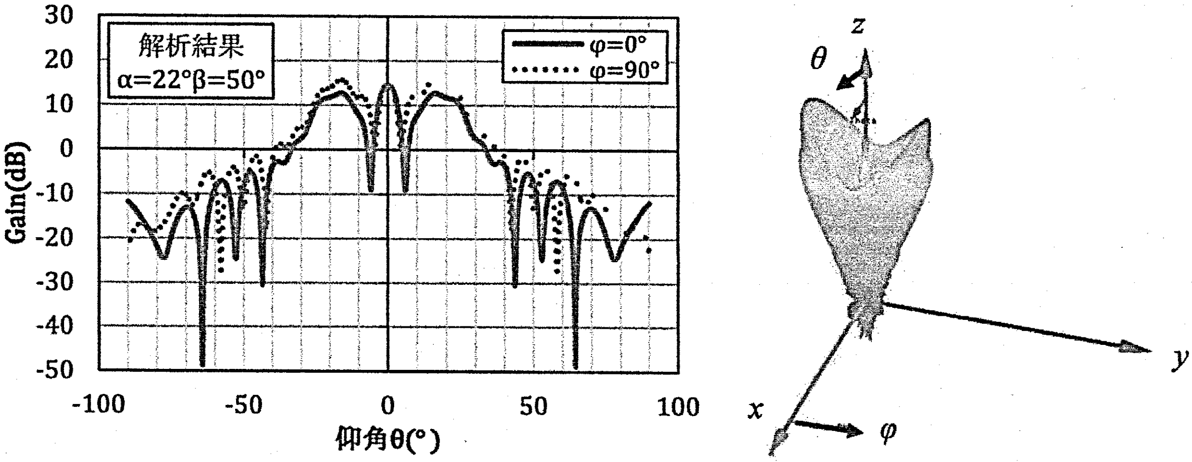
(a)二次元放射パターン　(b)三次元放射パターン

図１７　偏向レンズアンテナ(α=12°, β=20°)解析結果



(a)二次元放射パターン　(b)三次元放射パターン

図１８　偏向レンズアンテナ(α=16°，β=30°)解析結果



(a)二次元放射パターン　(b)三次元放射パターン

図１９　偏向レンズアンテナ(α=22°，β=50°)解析結果

表５　指向性評価(底部位相補償偏向レンズアンテナ)φ=90°

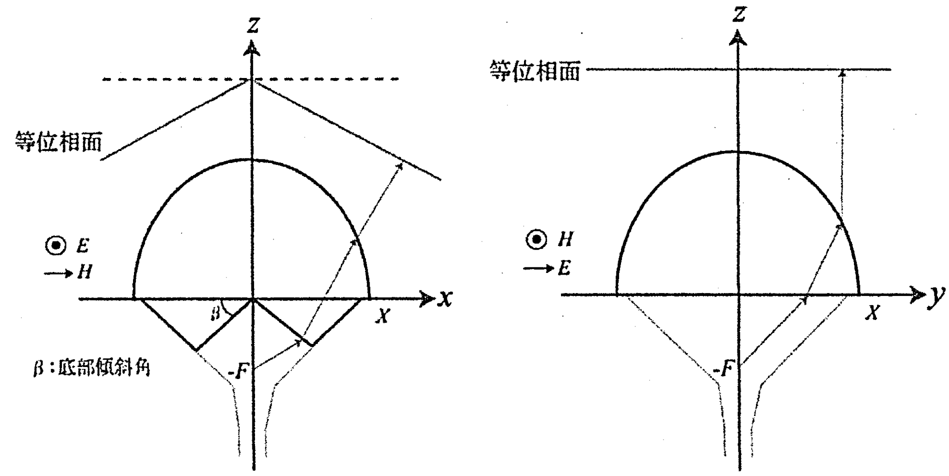
解析結果	G_{max} (dB)	θ_{max} (°)	$\Delta\theta$(°)
α=12°，β=20°	19.55	8.7	29.8
α=16°，β=30°	16.77	9.7	16.7
α=22°，β=50°	15.72	15.9	19.4

5.　レンズアンテナのマルチビーム化

単一指向性レンズアンテナと底部位相補償器付きの偏向レンズアンテナを組み合わせて，レンズを非回転対称構造で，底部に傾斜型の位相補償器を設けて，レンズの底部に入射した波が，すべてのある二方向に放射する理想的なマルチビームレンズアンテナの設計を試みた．

5.1　傾斜型底部位相補償器による非回転対称構造のマルチビームレンズアンテナの設計

図２０に原理図を示す．これは，xz 断面（φ=0°）では，4 節の底部位相補償器を付けた偏向レンズアンテナ形状で，yz 断面（φ=90°）では，2 節の単一指向性レンズアンテナの形状になっており，その間の角度（0°<φ<90°）では，角度 φ に応じてそれらの中間的な形状となっている．このレンズアンテナでは，焦点から放射した波が，すべて x 軸上の二方向に位相面がそろうように設計したもので，非常に高いゲインの二つのビームが得られると予想される．なお，図２０の場合をＨ面傾斜という．

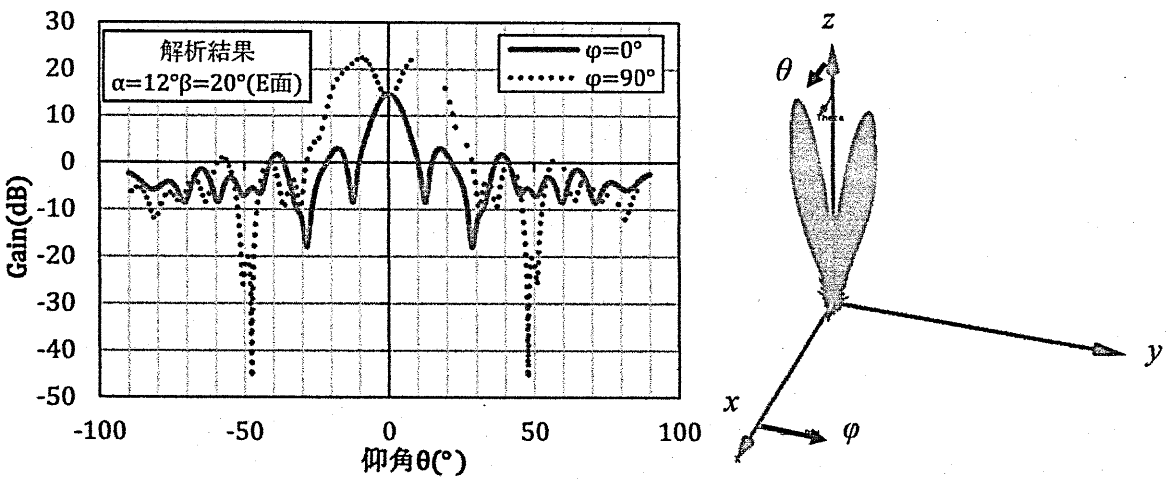


(a)xz 断面図（φ=0°）　(b)yz 断面図（φ=90°）

図２０　マルチビームレンズアンテナの原理図

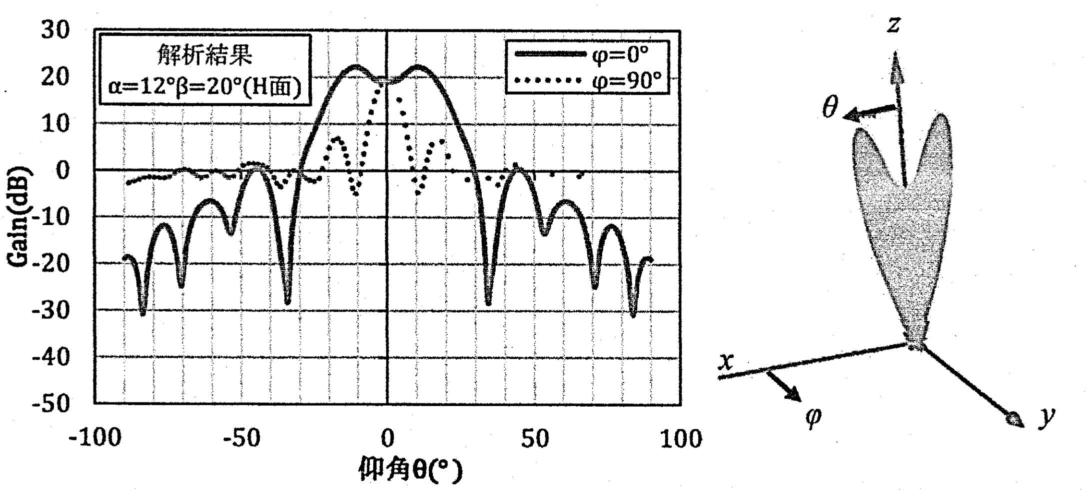
5.2　電磁界解析による特性評価

偏向角 α を 12°, 底部傾斜角 β を 20°(E 面傾斜)として設計したマルチビームレンズアンテナの電磁界解析結果を，図２１および表６に示す．φ=90°(E 面)方向にのみ二つの鋭いピークを持つことが明瞭に確認できる．また，G_{max} は単一指向性レンズアンテナに比べ 4dB 程下がり，二つの鋭い指向性を持つマルチビームレンズアンテナが設計できたことがわかる．ビームを二つに分け，さらに実効的な開口面積が半分に縮小していることを考えると，約 4dB の G_{max} の低下は，極めて効率良くビームを分割できることを示している．図２２および表６に，底部傾斜角の傾斜方向を H 面方向に取った場合の結果を示す．先程とは，G_{max} は変わらないが $\Delta\theta$ は約 3 倍に広がったことがわかる．



(a)二次元放射パターン　　(b)三次元放射パターン

図２１　マルチビームアンテナ(α=12°, β=20°, E 面傾斜)解析結果



(a)二次元放射パターン　　(b)三次元放射パターン

図２２　マルチビームアンテナ(α=12°, β=20°, H 面傾斜)解析結果

表６　指向性評価(α=12°，β=20°)

解析結果	G_{max} (dB)	θ_{max} (°)	$\Delta\theta$(°)
α=12°，β=20°， E 面傾斜，φ=90°	22.41	9.3	16.0
α=12°，β=20°， H 面傾斜，φ=0°	22.19	10.6	39.8

5.3　試作・実験

解析を行ったレンズアンテナを実際に試作し，実験を行った．底部傾斜角が E 面方向の場合の実験結果を図２３および表７に，底部傾斜角が H 面方向の場合の実験結果を図２４および表７に，それぞれ示す．実験結果と解析結果は良い一致を示している．これらの結果より，底部位相補償器の設置とレンズ形状により，高いゲインのマルチビームを実現できることを実験的にも実証できた．

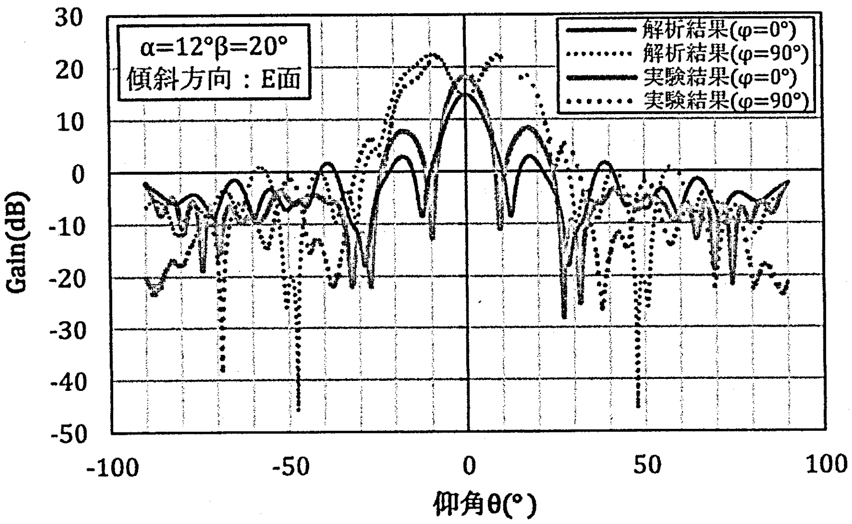


図２３　マルチビームアンテナ(α=12°，β=20°，E 面傾斜)実験結果

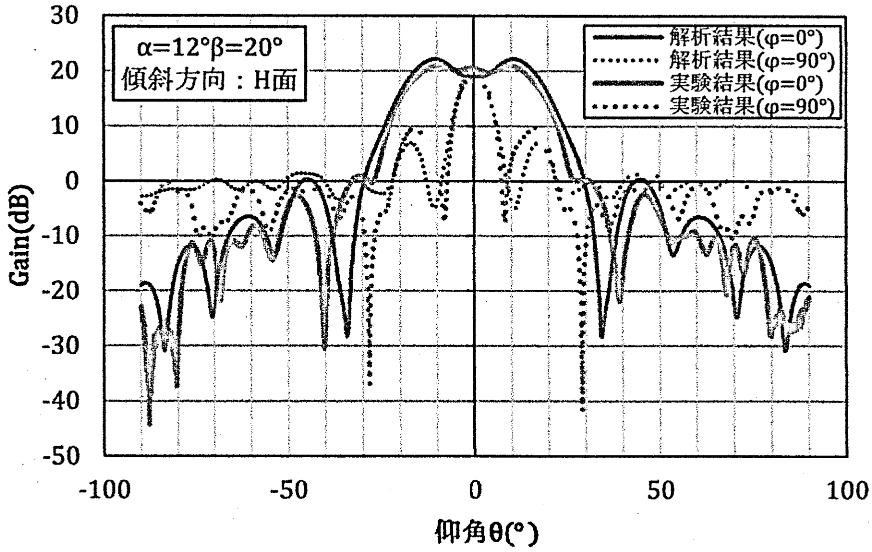


図２４　マルチビームアンテナ(α=12°, β=20°, H面傾斜)実験結果

表７　指向性評価結果 (α=12°, β=20°)

	G_{max} (dB)	θ_{max} (°)	$\Delta\theta$(°)
実験結果(φ=90°方向) α=12°, β=20°, E面傾斜	22.01	9.3	15.6
解析結果(φ=90°方向) α=12°, β=20°, E面傾斜	22.41	9.3	16.0
実験結果(φ=0°方向) α=12°, β=20°, H面傾斜	21.05	9.5	39.2
解析結果(φ=0°方向) α=12°, β=20°, H面傾斜	22.19	10.6	39.8

6. むすび

本稿では，レイトレーシング法による独自の広角指向性レンズアンテナの設計方法を検討し，60GHz帯において，電磁界解析および実測により，その有効性の確認を行った．それを用いて，最終的に非回転対称のレンズ形状で，レンズ底部に傾斜型位相補償器を設け，ビームを二方向に分離するマルチビーム特性を実現させるレンズ構造を設計し，非常に効率のよいマルチビーム化が実現できることを解析で示し，実験的にもその特性を実証できた．

参考文献

[1] 西郷拓也，藤本孝文，田中和雅，田口光雄　「誘電体レンズアンテナの解析」　電子情報通信学会技術研究報告　MW99-168(1999-11)　pp.91~94

輻射科学研究会資料
RS10-14

マイクロ波二重焦点トモグラフィ法による FRP 欠陥計測

Microwave Bi-focusing Tomography for Damage Detection of FRP

野林 直哉　　實原 弘亮　　岡村 康行
Naoya Nobayashi　Kousuke Jitsuhara　Yasuyuki Okamura

大阪大学大学院　基礎工学研究科
Osaka University

2011 年 3 月 28 日

於　大阪大学

マイクロ波二重焦点トモグラフィ法によるFRP欠陥計測

野林 直哉† ○實原 弘亮‡ 岡村 康行‡

†大阪大学大学院基礎工学研究科 〒560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3

E-mail: †{nobayashi, jituhara, okamura}@ec.ee.es.osaka-u.ac.jp

概要 設備の老朽化が進む現代社会において，不具合を早期発見して事故を未然に防ぐメンテナンス方法として「非破壊測定」が注目されている．本研究では，二重焦点トモグラフィ法を利用したマイクロ波断層画像計測システムを用いて，FRP（Fiber Reinforced Plastics：繊維強化プラスチック）内部の空隙を検出する，欠陥測定を行う．計測システムの送受信アンテナには，アレイ化・小型化が容易であるスロットアンテナを約 10GHz で使用した．

構築した断層画像計測システムを用いて FRP 欠陥測定を行った結果，大きさ：20mm×20mm×5mm の空隙を，高さ：5~15mm，左右：10mm の範囲において，特定することに成功した．これより，FRP 内の空隙の位置を簡易に特定する方法として，今回の方法が有効であることを確認した．

キーワード マイクロ波，非破壊測定，トモグラフィ，FRP，スロットアンテナ

1. まえがき

近年，設備の老朽化によりトンネルや橋の倒壊，道路の陥没などの事故が増加している．一般的にコンクリートと寿命は約 20 年と言われている．高度経済成長期が終わりを迎えて 20 年が経過する 2011 年以降は，当時に建てられた多くの建造物が寿命を迎えるため，今後このような事故が更に増加すると考えられる．[1][2]

事故の発生原因としては，内部の空隙（void）の存在や，設備の老朽化による破損などが挙げられるが，突然発生することの多いこのような事故を未然に防ぐことは容易ではない．従って，設備の内部を検査することになるが，設備を開削して検査することは現実的でない．そこで，対象物を破壊せずに検査できる非破壊測定が注目されている．

本研究では，非破壊測定の方法の一つとして，マイクロ波を用いた断層画像計測に関する検討を行う．マイクロ波を非破壊測定に用いる利点としては，以下の 3 点が挙げられる． 1 点目は送受信アンテナを対面させる必要がなく表面法（間接法）を用いることができるため，測定環境に適応できる点， 2 点目は通信分野で発展したマイクロ波の技術を活かすことができる点，そして 3 点目は，装置が安価で小型化可能である点である．[3]

測定対象には，FRP（Fiber Reinforce Plastics：繊維強化プラスチック）を用いる．FRP は金属材料よりも強度が高く，軽量化が可能，また腐食しにくく保温性が良いという特徴があり，コンクリートの補強材料として期待されている．また， FRP とコンクリートを重ねて作られる FRPM 管は，水道管や電力地中線ケーブル保護管などに利用されており，これらの需要は今後も増えると考えられる．

しかし，この FRP はコンクリートと同様，内部に空隙や亀裂が存在するとその強度が落ち，破損する恐れがある．そこで本研究では，外側からでは確認できない FRP 内部の空隙や亀裂を，二重焦点トモグラフィ法を用いて検出することを目指した．

2. 二重焦点トモグラフィ法

マイクロ波を用いた断層画像計測方法として，本研究では二重焦点トモグラフィ法に注目した．
二重焦点トモグラフィ法の測定方法の概略図を図 1 に示す．この方法では，N 個の送信アンテナからマイクロ波を放射し，対象物で散乱した散乱波をそれぞれ M 個の受信アンテナを用いて検出する．測定によって得られた N×M の行列に焦点関数をかけて数値処理することで任意の焦点における比誘電率の変化を求めることができる．この比誘電率の変化から，比誘電率の異なる点，つまり対象物のある場所を推定する．[4]-[6]

以下にこの二重焦点トモグラフィ法の原理について示す．

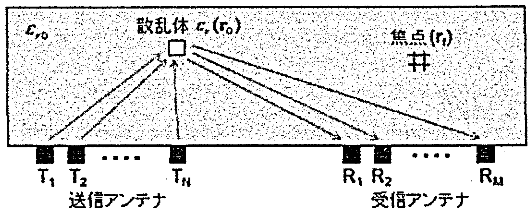


図 1 ：二重焦点トモグラフィ法の原理

2.1 順問題

対象物の位置がわかる順問題において，散乱体の位置r_0 における比誘電率の変化を求める．媒質中の比誘電率をε_{r0} ，任意の位置における比誘電率を$\varepsilon_r(r)$とすると，比誘電率の変化$\Delta\varepsilon_r$は以下の式(1)で表される．

$$\Delta\varepsilon_r = 1 - \frac{\varepsilon_r(r_0)}{\varepsilon_{r0}} \quad (1)$$

散乱体の位置でのみ比誘電率が変化する場合，この $\Delta\varepsilon_r$ はデルタ関数を用いて以下の式(2)に変換できる．

$$\Delta\varepsilon_r = \delta\varepsilon_r(\boldsymbol{r}_0)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \quad (2)$$

このとき，比誘電率変化を表す $\delta\varepsilon_r(\boldsymbol{r}_0)$ は以下の式で計算することができる．[7]

$$\delta\varepsilon_r(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{NMk_0^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} U_0^{-1}(r_0, r_{Tk})U_{SC}(r_{Rl}, r_{Tk})G^{-1}(r_{Rl}, r_0)$$

$$= \frac{1}{NMk_0^2}\cdot \boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_{TN})\boldsymbol{U}_{sc}(\boldsymbol{r}_{RM},\boldsymbol{r}_{TN})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_{RM},\boldsymbol{r}_0) \quad (3)$$

但し，

$$\boldsymbol{U}_{sc}(\boldsymbol{r}_{RM},\boldsymbol{r}_{TN}) = \begin{bmatrix} U_{SC}(r_{R1}, r_{T1}) & \cdots & U_{SC}(r_{RM}, r_{T1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{SC}(r_{R1}, r_{TN}) & \cdots & U_{SC}(r_{RM}, r_{TN}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_{TN}) = [U_0^{-1}(r_0, r_{T1}) \;\; U_0^{-1}(r_0, r_{T2}) \;\; \cdots \;\; U_0^{-1}(r_0, r_{TN})] \quad (5)$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_{RM},\boldsymbol{r}_0) = [G^{-1}(r_{R1}, r_0)\; G^{-1}(r_{R2}, r_0) \;\; \cdots \;\; G^{-1}(r_{RM}, r_0)]^T \quad (6)$$

とする．

$\boldsymbol{U}_{sc}(\boldsymbol{r}_{RM},\boldsymbol{r}_{TN})$が表す行列は，送信アンテナから放射された波が対象物で散乱して受信アンテナで検出される値，つまり測定によって得られる行列を示している．

$\boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_{TN})$ と $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_{RM},\boldsymbol{r}_0)$はそれぞれ各送受信点からの波を一点$\boldsymbol{r}_0$で収束させるために，各々の波が点$\mathbf{r}_0$で同相となるように調整する重み関数で，これを焦点関数と呼ぶことにする．2次元系の場合，この焦点関数は第二種ハンケル関数を用いて，以下の式(7)で計算することができる．[8]

$$\begin{aligned} U_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_T) &= H_0^{(2)}(k\cdot|\boldsymbol{r}_T-\boldsymbol{r}|) \\ G(\boldsymbol{r}_R,\boldsymbol{r}) &= H_0^{(2)}(k\cdot|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_R|) \end{aligned} \quad (7)$$

従って，対象物の位置がわかっている順問題の場合，式(3)を計算することで，対象物の位置のおける比誘電率の変化を求めることができる．

2.2 逆問題

図1のように媒質中の任意の点に焦点$\mathbf{r}_f$ をとる．そして，測定データに送受信アンテナからの波を焦点$\mathbf{r}_f$で収束させる焦点関数を掛けた，以下の関数を$\phi(\mathbf{r}_f)$とおく．

$$\phi(\boldsymbol{r}_f) = \frac{1}{NMk_0^2}\boldsymbol{U}_0^{-1}(\boldsymbol{r}_f,\boldsymbol{r}_{TN})\cdot\boldsymbol{U}_{sc}(\boldsymbol{r}_{RM},\boldsymbol{r}_{TN})\cdot\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{r}_{RM},\boldsymbol{r}_f) \quad (8)$$

この $\phi(\boldsymbol{r}_f)$は，焦点が対象物に位置と一致する，つまり$\boldsymbol{r}_f=\boldsymbol{r}_0$の時，式(3)と一致するため，$\phi(\boldsymbol{r}_0)=\delta\varepsilon(\boldsymbol{r}_0)$となる．

一方，焦点の位置が対象物の位置と一致しないとき，式(8)の行列を計算した各項は，位相の成分が一定とならないため，そのベクトル和は理想的には0となる．よって，$\boldsymbol{r}_f \neq \boldsymbol{r}_0$のとき，$\phi(\boldsymbol{r}_f)=0$である．

これより，式(8)において，焦点$\mathbf{r}_f$を媒質全体について変化させて各点の値を求めると，対象物のある位置においてのみ値が大きくなる．その値を2次元でプロットして画像化することで，対象物の位置を特定することができる．

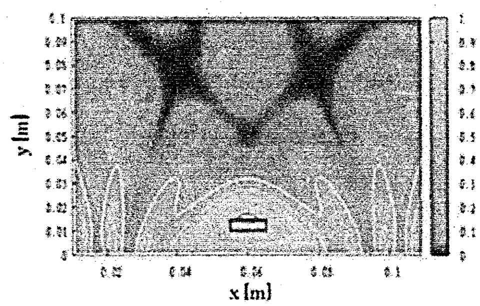
二重焦点トモグラフィ法では，このように計算量が少なく，短い計算時間で結果が得られることが利点として挙げられる．

2.3 再構成画像

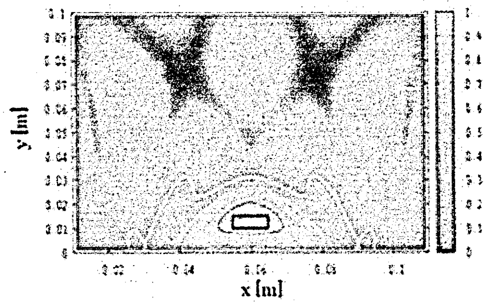
VisualC++ を用いて式(8)を計算するプログラムを構築した．プログラムの動作確認のため，測定によって得られる行列$\boldsymbol{U}_{SC}(\boldsymbol{r}_{Rl},\boldsymbol{r}_{Tk})$ を理想的にハンケル関数で計算したデータを用いて画像再構築を行う．

媒質には測定対象である FRP(ε_r=3)を用いる．対象物には大きさ 10mm×5mm の空間に 10×10 個の粒子を仮定し，各々の点で散乱が生じるものとする．アンテナ数は5個の場合と10個の場合の2通りについて計算を行い，アンテナ数の違いによる結果の比較検討を行った．

画像の再構築にあたっては，媒質中の空間を 100×100 のメッシュで区切り，各点について式(8)を計算して2次元上にプロットする．但し，計算値は最大値を1として規格化する．以下の図2に画像再構築シミュレーションを行った結果を示す．



(a)アンテナ5個



(a)アンテナ１０個

図２：理論における画像再構成

黒の実線が対象物の位置を示している．対象物の位置と画像のピークの位置がほぼ一致していることから，二重焦点トモグラフィ法を用いることで対象物の位置が特定できることを確認した．

またアンテナ数が 5 個の場合と 10 個の場合を比較すると，アンテナを 10 個用いる方が画像のノイズが少なく，対象物の位置でのピーク値も大きくなっている．これより，アンテナ数を増やすことで，画像再構築の精度上げることができると考えられる．

3. FRP の比誘電率測定

今回測定対象として使用する FRP の比誘電率を測定する．厚さ 1,4mm の FRP と厚さ 6μm の銅板からなる基板に，幅 W が 2mm・4mm・6mm の 3 種類のストリップラインを作製して，その伝搬特性を測定した．但し，終端には 50Ω の抵抗を接続して，反射係数を求める．測定結果を図３に示す．

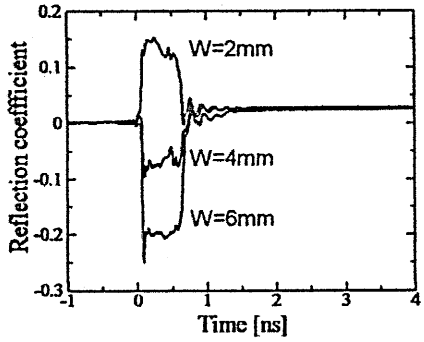


図３：伝搬時間と反射係数の関係

終端を 50Ω にしているため，反射係数γは以下の式で求めることができる．

$$\gamma = \frac{Z-50}{Z+50} \qquad (9)$$

但し，Z はストリップラインの特性インピーダンスである．式(9)を用いて実験結果を伝搬時間と特性インピーダンスの関係に変換したものを図４に示す．

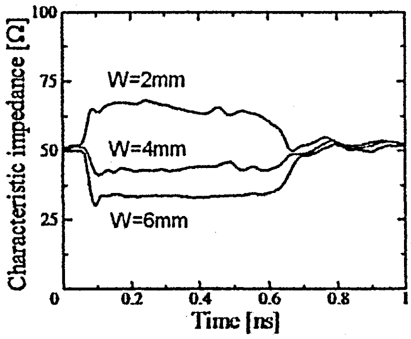


図４：伝搬時間と反射係数の関係

伝搬時間によって特性インピーダンスにばらつきがあるのは，ストリップライン幅に多少のばらつきがあるためと考えられる．そこで，各幅につき 3 点の平均をとり，表 1 に示す特性インピーダンス Z の結果を得た．

また，この Z の値から各 W における比誘電率ε_rの値を計算した結果を同様に表 1 に示す．この結果より，各幅の平均値をとって，FRP の比誘電率は 3 とした．

表１：特性インピーダンス Z とε_rの幅 W の関係

W [mm]	2	4	6
Z [Ω]	33.1	43	65
ε_r	2.9	3.1	3.1

4. スロットアンテナ

今回のマイクロ波断層画像計測システムでは，送受信アンテナにスロットアンテナを用いる．これは，スロットアンテナはアレイ化・小型化が容易であるという利点があるためである．また，cm~mm オーダーの分解能を目標として，共振周波数はスロットの上部に FRP を乗せた状態で 9~10GHz となるように設計を行った．

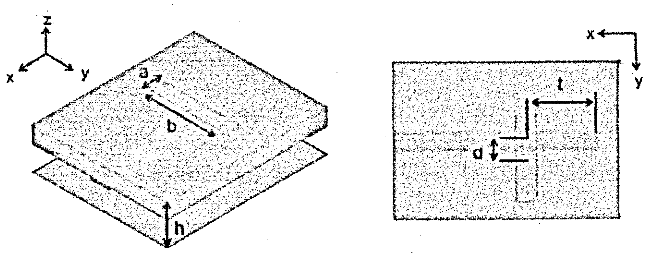


図５：スロットアンテナ設計パラメータ

今回作製するアンテナの構造・設計パラメータを図５に示す．マイクロストリップライン給電によるスロットアンテナで，下部に反射板を設けることで片側のみ放射する構造をしている．電磁界シミュレーター HFSS を用いて，解析を行った結果，以下の設計値に決定した．[9][10]

表２：設計値

スロット幅 a	0.4[mm]
スロット幅 b	10.5[mm]
給電位置 t	5[mm]
給電位置 d	3.87[mm]
反射板の位置 h	5[mm]

このときの反射特性と放射特性を以下の図６と図７に示す．反射特性は共振周波数 9.16GHz で利得が約 20dB 得られており，放射特性は x-z 面で等方的であることから，所望のアンテナであることを確認した．

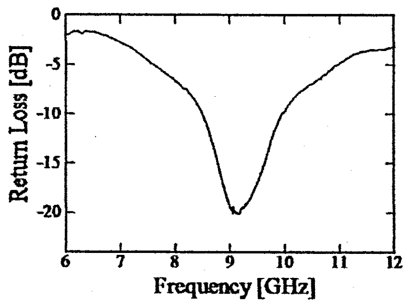


図６：設計値における反射特性

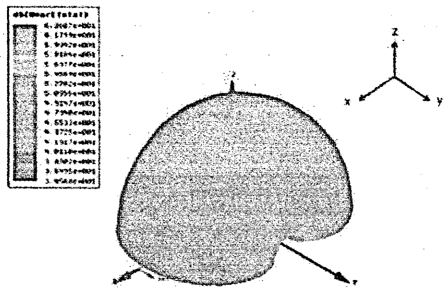


図７：放射特性（3D）

この設計値をもとにアンテナを作製した．今回は，このアンテナを二つ用いて測定を行う．

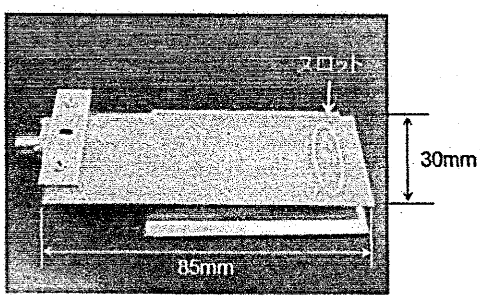


図８：作製したスロットアンテナ

5. HFSSによるFRP欠陥測定シミュレーション

電磁界シミュレーターHFSS を用いて，FRP 内に存在する空隙を対象とした非破壊測定シミュレーションを行う．

HFSS での解析空間設定を図９に，解析条件を表３に示す．解析空間は空気で大きさは 300mm×75mm×50mm，境界は放射条件とした．FRP（比誘電率：3.0）の境界は解析空間の境界と一致しており，境界での反射は考慮していない．

送受信アンテナの位置は中心から 15mm~40mm の範囲（5mm 間隔）で，計 36 点においてシミュレーションを行い，透過特性を測定する．アンテアには設計したスロットアンテナを共振周波数：9.16GHz，波長：22.8mm で使用する．送受信アンテナ間の最小距離は 30mm と 1 波長より長いため，送受信アンテナ間の結合は無視できるものとする．[11]

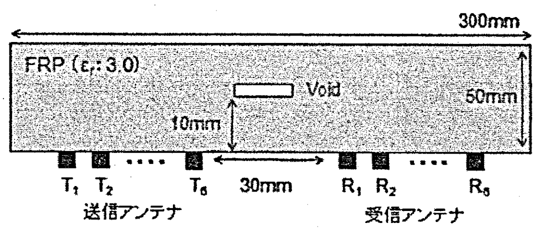
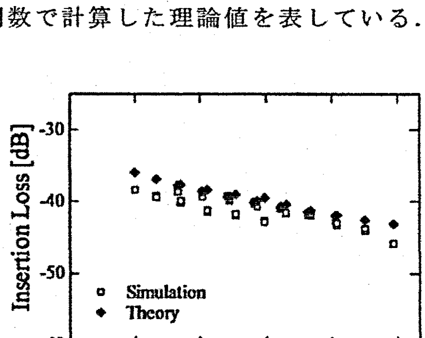


図９：シミュレーション空間設定

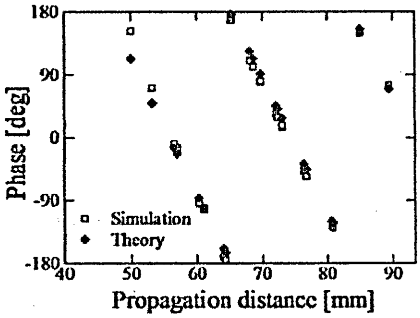
表３：シミュレーション条件

共振周波数	9.16GHz
アンテナ数	6 個
アンテナ位置	中心から 15mm~40mm (5mm 間隔)
空隙の大きさ	10mm×10mm×5mm
空隙の位置	高さ：10mm

空隙がある場合とない場合の２通りについてシミュレーションを行い，その差分をとることで，空隙からの散乱成分のみのデータを得た．得られた透過特性のデータから，挿入損失と位相を求めた結果を以下の図１０に示す．但し，横軸は送信アンテナから対象物までの直線距離と，対象物から受信アンテナまでの直線距離を足した伝搬距離とする．また，Theory は第二種ハンケル関数で計算した理論値を表している．

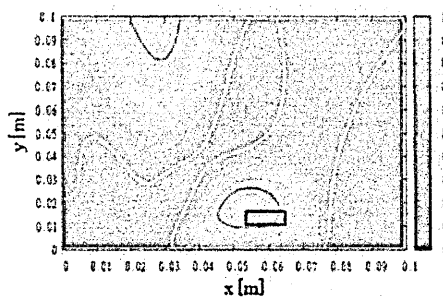


(a)挿入損失



(b)位相

図１０：透過特性（HFSS シミュレーション）



(b) 高さ：10mm　右：10mm

図１２：画像再構築シミュレーション

図１０から，挿入損失・位相共にシミュレーション結果と理論値が一致していることがわかる．このシミュレーション結果から，画像再構築を行った結果を以下の図１１に示す．

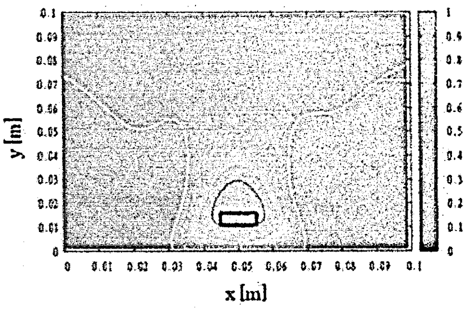
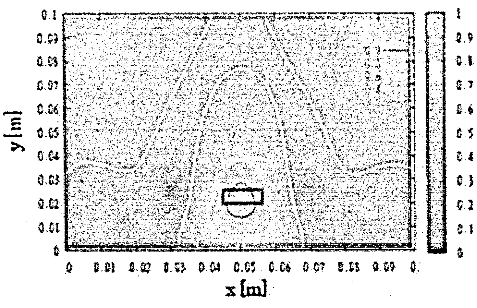


図１１:画像再構築シミュレーション(高さ:10mm)

画像のピークの位置が対象物の位置と一致していることがわかる．これより，HFSS を用いて FRP 欠陥測定のシミュレーションが可能であることが確認できた．

対象物の位置を移動させて，同様にシミュレーションを行った結果を以下の図１２に示す．但し，(a)は高さ:20mm の位置に空隙がある場合，(b)は高さ:10mm，右：10mm の位置に空隙がある場合を示す．

この結果から，画像のピークの位置が空隙の位置に応じて移動しており，対象物の位置が特定できていることが確認できる．



(a) 高さ：20mm

6. FRP 欠陥測定実験

構築したマイクロ波断層画像計測システムを用いて，FRP 欠陥測定実験を行う．

実験系を図１３に，測定条件を表４に示す．送受信アンテナをネットワークアナライザに接続して，各 S パラメーターから透過特性と反射特性を計測する．

送受信アンテナの位置は中心から 15mm~40mm（5mm 間隔）で，計 36 点について透過特性の測定を行う．測定周波数は 8GHz~16GHz の範囲を 0.01GHz 刻みで計 800 点の測定を行う．

FRP 内部には，外部からは確認できない空隙が存在している．その大きさ 20mm×20mm×4mm で，高さ 15mm，中心から左に 10mm の位置に配置した．

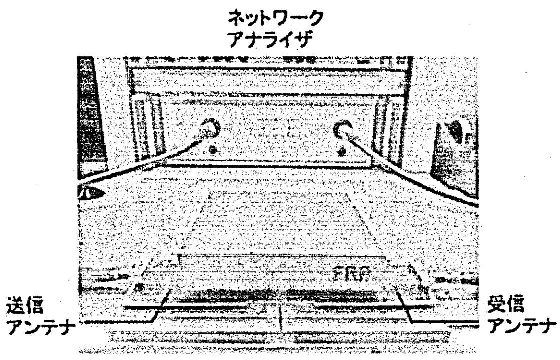


図１３：実験系

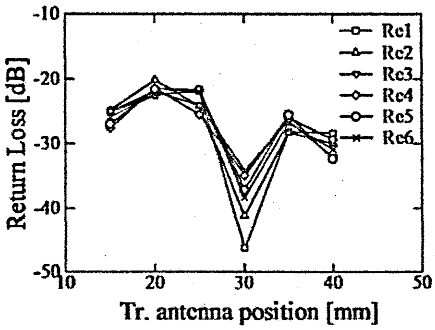
表４：測定条件

共振周波数	11GHz
アンテナ数	6 個
アンテナ位置	中心から 15mm~40mm（5mm 間隔）
測定点	36 個
空隙の大きさ	20mm×20mm×4mm
空隙の位置	高さ：16mm 左：10mm

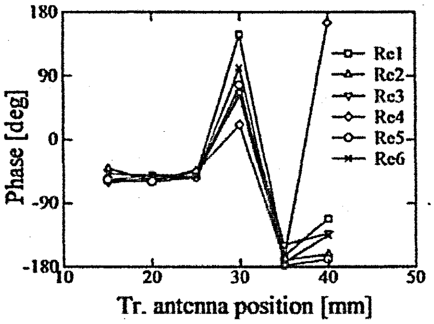
6.1 実験結果

＜送信アンテナの反射特性 S11＞

アンテナからの信号が常に一定であるためには，送受信アンテナの反射特性 S11 がアンテナの位置に関わらず一定である必要がある．実験結果から，測定周波数 10Hz における，各アンテナの位置での S11 のリターンロスと位相を求めた結果を以下の図１４に示す．



(a) 利得

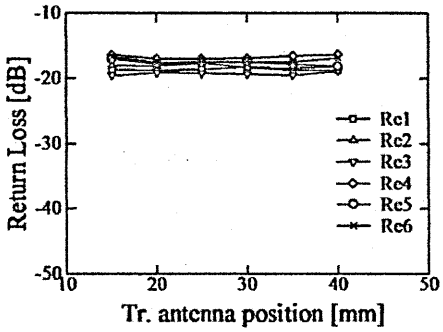


(b) 位相

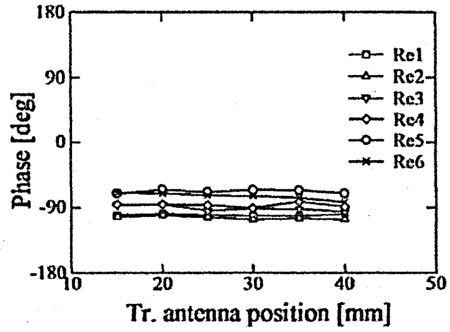
図１４：アンテナの位置による反射特性の変化

この結果より，アンテナの場所によって反射特性が大きく変化していることがわかる．これでは，アンテナの位置によって入射する電波の強度と初期位相が異なるため，正確に測定を行うことができない．アンテナの反射特性が変化する原因としては，FRP の表面に若干の凹凸があるため，その部分に空気の層が生じ，アンテナ表面の比誘電率が変化するためであると考えられる．

この影響を軽減するために，FRP とアンテナの間に厚さ約 1mm のアクリル板を挿入した．アクリルは比誘電率が 2.7~4.5 と FRP の誘電率と近いため，境界における反射の影響を小さく抑えることができる．アクリル板を挿入して，再度 S11 を測定した結果を以下の図１５に示す．



(a) 利得



(b) 位相

図１５：アンテナの位置による反射特性の変化（アクリル挿入後）

図１５より，アクリル板を挿入することで，アンテナの位置による S11 のばらつきを抑えることに成功した．この状態でのリターンロスの周波数特性を図１６に示す．この結果より，送受信アンテナ共に特性が良い，11GHz で測定を行うことにした．

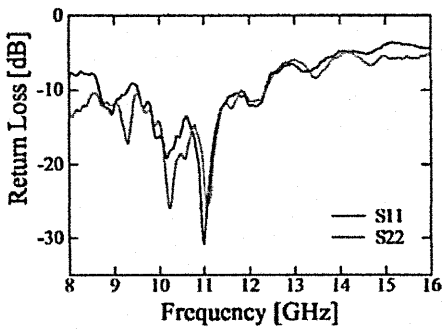
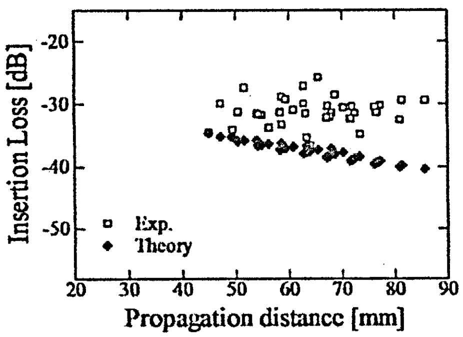


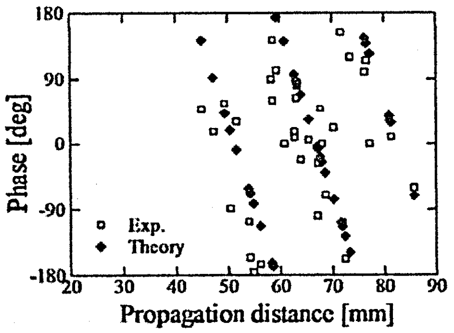
図１６：反射特性の周波数依存性

＜実験結果＞

測定は空隙がある場合とない場合の２通りについてシミュレーションを行い，その差分をとることで，空隙からの散乱波成分のみのデータを得る．その差分について，測定から得られた透過特性 S21 の挿入損失と位相の結果を以下の図１７に示す．但し，横軸は伝搬距離とする．



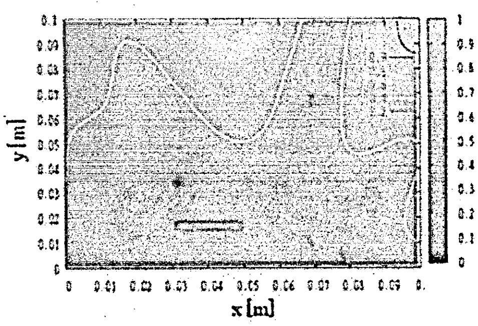
(a) 挿入損失



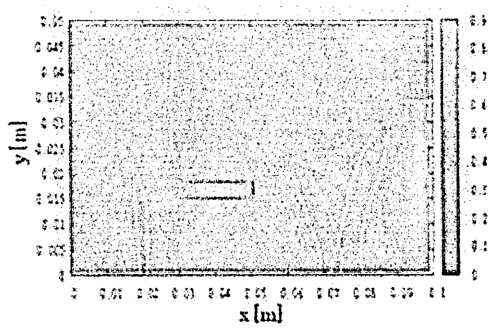
(b) 位相

図１７：透過特性（実験）

図１７(b)から位相に関しては，多少のばらつきはあるものの，測定結果と理論値の傾きが一致していることがわかる．一方，挿入損失に関しては，図１７ (a)から理論値と一致しておらず，対象物の位置情報を反映していないと考えられる．この実験結果を基に画像再構築を行った結果を以下の図１８に示す．



(a) y 軸範囲：0~0.1[m]



(b) y 軸範囲：0~0.05[m]

図１８：再構築画像（実験）

図１８(a)は y 軸が 0~0.1m の範囲における画像再構築を示している．遠方にピークが強く出ているため空隙の位置でのピークが相対的に弱くなっていることがわかる．遠方でのピークを除くために y 軸の範囲を 0~0.05m として再度画像再構築した結果が図１８(b)である．空隙の位置にピークが出でいるが，その他のノイズが大きく，空隙の位置を特定することは困難である．

このようにノイズが大きくなる原因としては，挿入損失が理論値と一致していないことが考えられる．そこで，挿入損失を補正する方法について検討を行った．

6.2 再構成方法の改良

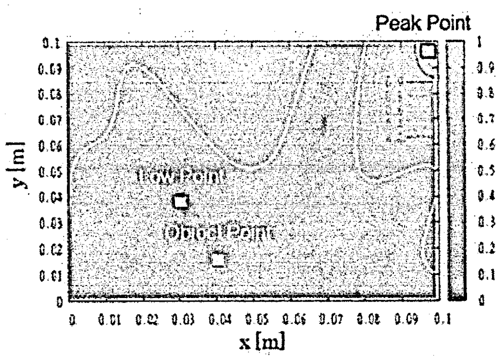
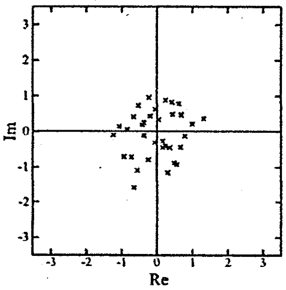
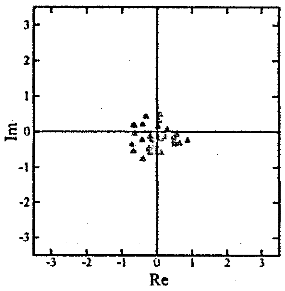


図１９：再構築画像（実験）

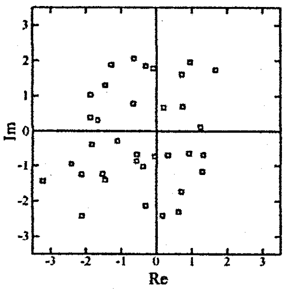
実験の画像再構築結果である図１８(a)において，図１９に示すように，空隙がある点：Object Point，値の小さい点：Low Point，ピーク点：Peak Point の 3 点に着目する．この画像の各点の値というのは，式(8)の行列を計算して，その和をとったものである．そこで，行列の計算結果の各成分を複素数平面にプロットして，その分布を調べた．その結果を以下の図２０に示す．



(a) Low Point



(b) Object Point



(c) Peak Point

図２０：複素数平面分布

図２０より，Low Point では，位相はすべての象限にまたがって分布しており，ベクトル和をとると，それぞれの成分が打ち消し合い小さな値になることがわかる．

続いて，Object Point では，理想的にはすべての点が一点にまとまるはずであるが，若干のばらつきが見られる．しかし，ほとんどの点が第 3,4 象限にまとまっており，位相に偏りがあるので， Low Point と比較してそのベクトル和は大きくなる．

最後に，Peak Point では，位相はすべての象限にばらついているが，各絶対値が大きいため，打ち消しあっても大きな値が残る．これが遠方でピークが生じる原因であると考えられる．

遠方でのノイズを消す方法としては，２つ考えられる．１つ目は測定点を多くとる方法，２つ目は位相情報のみを用いて画像再構成を行う方法である．

１つ目について，測定点を多くとることで遠方の Peak Point では，位相の分散が更に平均化されて値が小さくなる．一方 Object Point では，位相に偏りがあるため，その和は更に大きくなる．その結果，遠方でのノイズが消えて対象物の位置にピークが生じると考えられる．

しかし，今回の実験系では測定点を増やすことが困難であったため，位相情報のみを用いて画像再構成を行った．

図２０の各点をすべて規格化して，再度グラフ化した結果を以下の図２１に示す．但し，Object Point については 1.5 倍，Low Point については 0.5 倍で規格化している．この図からも Object Point において位相の偏りがあることが確認できる．

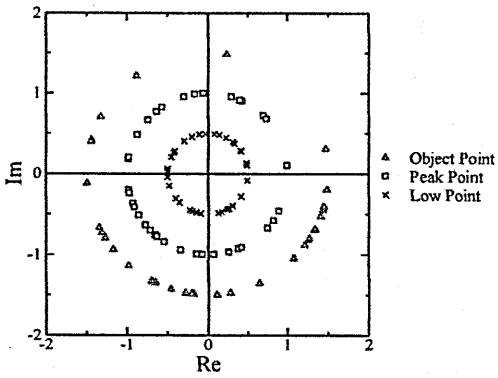


図２１：複素数平面分布（規格化）

位相情報からの画像再構成では，このように振幅を規格化して位相の偏りのみを用いて画像再構成を行う．位相情報のみを用いて画像再構成を行った結果を以下の図２２に示す．図２２より，位相情報を用いることで空隙の位置を特定できることを確認した．

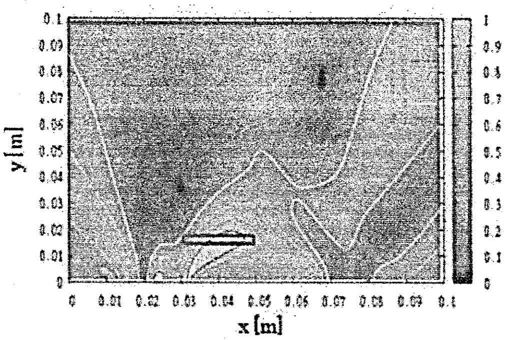
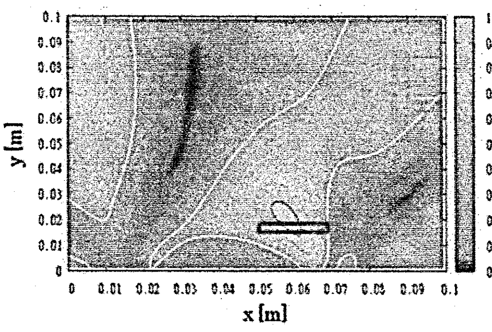
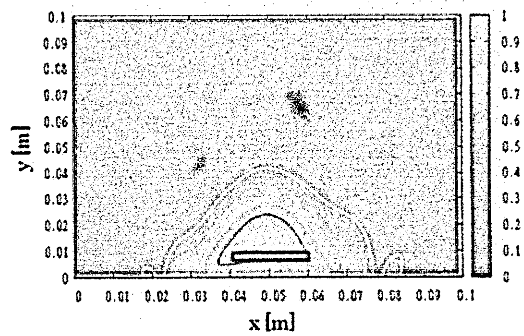


図２２：位相情報からの画像再構築結果

空隙の位置が高さ：16mm，右に 10mm，高さ：6mm の二通りについても同様に実験を行い，画像再構築を行った結果を以下の図２３に示す．この結果から対象物の位置を変えても，位置を特定できていることが確認できる．



(a) 高さ：16mm，右に 10mm



(b) 高さ：6mm

図２３：位相情報からの画像再構築結果２

この方法では振幅の情報を削るため，像が広がり，分解能が下がるという欠点がある．今後，最適化法などを用いて更に高精度な再構成方法について検討する必要があるが，空隙のおおよその位置を簡易に特定する方法として，今回の方法は有効であると言える．

7. まとめ

本研究では二重焦点トモグラフィ法を利用したマイクロ波断層画像計測システムを構築して，FRP の欠陥測定を行うことを目的とした．

構築するマイクロ波断層画像計測システムでは，アレイ化・小型化を狙って，送受信アンテナにスロットアンテナを用いる．電磁界シミュレーターHFSS を用いて上部に FRP（比誘電率：3）を乗せた状態で共振周波数が約 10GHz となるようにスロットアンテナを設計・作製した．

続いて，HFSS を用いて FRP 欠陥測定のシミュレーションを行った．その結果，10mm×10mm×5mm の大きさの空隙を高さ：10~20mm，左右：10mm の範囲で特定できることを確認した．

このシミュレーション結果を基に実際の実験を行ったが,空隙の位置より遠方でピークが生じてしまい，空隙の位置特定は困難であった．これは挿入損失が理論値と一致しておらず，遠方になるにつれてその差が大きくなることが原因として考えられる．そこで，位相情報のみを用いて画像再構築を行った結果，大きさ：20mm×20mm×5mm の空隙を，高さ：5~15mm，左右：10mm の範囲で特定することに成功した．

これより，FRP 内部の空隙の位置を簡易に特定する方法として，今回構築したマイクロ波断層画像計測システムは有効であると言える．

今後の課題としては，アンテナのアレイ化して，測定を自動化する必要がある．また画像再構築の精度向上を目指し，最適化法などについても検討する必要がある．

8. 謝辞

本研究に関して数々の御助言，御助力下さいました村田博司准教授，塩見英久助教，またアンテナに関する実験に際し，多大なるご協力を頂いた北谷和弘技術専門職員に感謝いたします．

また，FRP 試料の作製など，多大なる御協力を頂いた株式会社栗本鐵工所の諸氏に深くに感謝いたします．

文　献

[1]　長滝重義，菊川浩治　“土木材料　コンクリート” 共立出版株式会社(1997)

[2]　小林一輔　“コンクリートが危ない”　岩波新書 (1999)

[3]　石井勇五郎　“非破壊検査工学”　産報出版株式会社(1982)

[4] Yoo Jin Kim, Luis Jofre , Franco De Flaviis, Maria Q. Feng “Microwave Reflection Tomographic Array forDamage Detection of Civil Structures” IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 51, NO. 11, 3022-3032 (2003)

[5] Maria Q. Feng, Yoo Jin Kim, Franco De Flaviis, Luis Jofre, “A NOVEL MICROWAVE CAMERA FOR NDE OF CONCRETE STRUCTURES”

[6] Yoo Jin Kim, Luis Jofre , Franco De Flaviis, Maria Q. Feng “3D MICROWAVE IMAGING TECHNOLOGY USING ANTENNA ARRAY FOR DAMAGE ASSESSMENT OF CONCRETE STRUCTURE” 16th ASCE Engineering Mechanics Conference (2003)

[7] Lihong V.Wang, Hsin Wu “BIOMEDICAL OPTICS” A John Wiley and Sons, Inc.

[8]　中司浩生　“学生・技術者のための電磁波の散乱” シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社　(2002)

[9] Ramesh Garg “Microstrip Antenna Design Handbook” Artech House, Inc. (2001)

[10]　小西良弘　“高周波・マイクロ波回路”　サイペック株式会社　(2003)

[11]　山田寛喜，小川恭孝，山口芳雄　“受信アレーアンテナの相互インピーダンスとその構正行列について” 電子情報通信学会　MW2004-329,pp173-178　(2004)

輻射科学研究会資料
RS10-15

RS10-15　細線螺旋導体からなる異方性媒質の等価媒質定数における四重極子モーメントの寄与について

Contributions of the Quadrupole Moments in the Constitutive Characteristics of Anisotropic Media Composed of Thin-Wire Conducting Helices

浅居正充（近畿大学），　山北次郎（岡山県立大学）

M. Asai (Kinki University),　J. Yamakita (Okayama Prefecture University)

平成 23 年 3 月 28 日（月）

於：大阪大学

Abstract

本研究では、自由空間中で一定方向に配向した細線螺旋導体のキラル及びラセミ混合配列に対する等価媒質特性の算定を試み、媒質特性における電気四重極子モーメントの寄与につき検討している。計算に際しては、波長に比べて十分小さい粒子サイズ及び粒子間隔を仮定し、準静電的近似に基づく Lorentz の方法に細線近似モーメント法を組み込む手法を適用している。また、媒質の構成粒子は、同一巻方向又は異なる巻方向の 2 本の接近した螺旋導体からなる双螺旋粒子、及び 1 本の螺旋導体から成る粒子を仮定する。

1. まえがき

近年、人工媒質による電磁波制御に関する研究が盛んに行われている。人工媒質(artificial media)とは、所望の巨視的電磁特性をもつように設計された人工物質構造で、電磁波の波長に比べて十分小さな微細構造で構成される。この巨視的特性の中には自然物質では定量的または定性的に得られないものも含まれる。人工媒質に関する研究は、有機物質の光学活性に関する定量的研究のためのスケールモデルとして考案された人工キラル媒質の試作実験(1914−1922)[1]に端を発する。その後、キラル媒質の研究[2]に加えて人工誘電体や人工磁性体等の諸研究も行われた。この研究分野は、左手系媒質の構成実験[3]以降、メタマテリアル(metamaterials) 即ち物質を超えた人工の物質との用語や考え方とともに俄かに注目を集めるところとなった。その後は左手系媒質のみならず従来の人工媒質も含めてあらためて高い関心を集めることとなり現在に至っている。一方、最近、螺旋構造などのキラル媒質と電磁波の相互作用への関心が特にカーボンマイクロコイル(CMC)[4]の分野で高まっている。現在、CMC を高収量で生成する場合、右巻及び左巻コイルが同量混合されたラセミ混合の状態で生成されるが、いずれかの巻方向のみから成るキラル混合、あるいは右巻、左巻コイルの量が異なるラセミ混合を生成する技術についても研究されている。著者らは、CMC のモデルとして細線螺旋導体が等方的に分布したキラル混合構造を仮定し、伸縮ばらつきを仮定する場合、クラスタをなす場合等に対して準静電的 Lorentz の方法に基づいて算定した等価媒質特性につき検討している[5], [6]。CMC はしばしば 2 重螺旋のように複数螺旋が結合して生成されるが、これらを一定方向に配向させることも技術的に可能であり、これまでにない新しい異方性素子の可能性が存在する。著者らは、このモデルとして細線螺旋導体の異方性キラル混合構造を仮定し、電気、磁気双極子モーメントのみならず、電気四重極子モーメント[7],[8]の寄与をも考慮した計算により媒質特性の検討を行っている[6]。その結果、各構成粒子が 1 個の螺旋導体から成る場合には、螺旋の巻き数が一定しきい値以上になると四重極子の寄与は無視できる程度に小さくなる一方、接近して電磁結合した 2 本の螺旋導体を粒子とする構造の場合には、その螺旋巻き数が上記のしきい値を超えていても四重極子の寄与が重要となる構造条件が存在することが判明している。

本研究では、自由空間中で一定方向に配向した細線螺旋導体のキラル及びラセミ混合配列に対する等価媒質特性の算定を試み、媒質特性における電気四重極子モーメントの寄与につき検討している。媒質の構成粒子は、同一巻方向又は異なる巻方向の 2 本の接近した螺旋導体からなる双螺旋粒子、及び 1 本の螺旋導体から成る粒子を仮定する。計算に際しては、波長に比べて十分小さい粒子サイズ及び粒子間隔を仮定し、準静電的近似に基づく Lorentz の方法[9]に細線近似モーメント法を組み込む手法[5]を適用している。

2. 計算手法

自由空間中の同一方向に配向した細線螺旋導体から成る粒子の 3 次元配列で構成される一様な人工媒質を仮定する。各粒子は右巻または左巻の細線導体長 l 、らせん長 L 、巻数 T 、半径 A 、ピッチ P 、細線半径 W の 1 本の螺旋導体

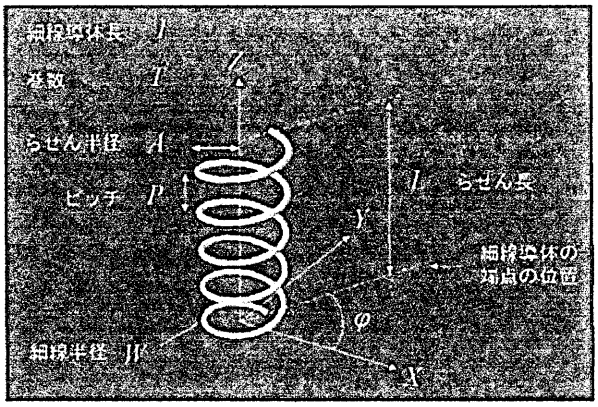


図 1 ： 螺旋粒子

（螺旋粒子：図１）または２本の螺旋導体（双螺旋粒子：図２）から成り、これらがキラル又はラセミ混合を構成するよう各方向に一定の配列密度をもって配置されているものと仮定する。デカルト座標の x 、y 、z の各軸方向の

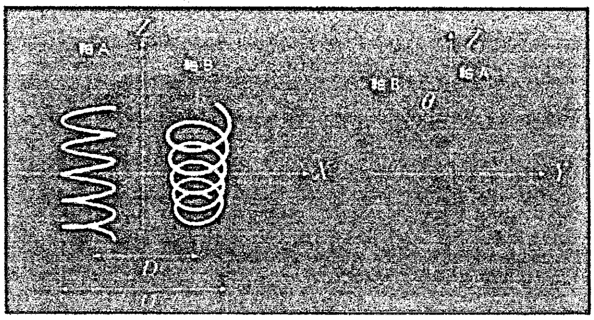


図２：　双螺旋粒子

粒子配列密度を各々 $1/d_x$ 、$1/d_y$ 、$1/d_z$ 、自由空間の誘電率および透磁率をそれぞれ ε_0, μ_0 とする。以下において時間因子を $\exp(j\omega t)$ と仮定し記述を省略する。巻方向が異なるなど構造が異なる粒子、あるいは同構造でも向きが異なる粒子は、計算上異種粒子とみなす必要から、本計算では、異種粒子が混合した媒質の等価媒質定数を算定することとなる。人工媒質中の平均電界、平均磁界、平均電束密度及び平均磁束密度を各々 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ 及び $\boldsymbol{B}$ とする。これらの量は次式のような双異方性媒質に対する $E-H$ 形式の構成関係式により関係付けられるものとする[10]:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} & \bar{\xi} \\ \bar{\zeta} & \bar{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \tag{1}$$

ここで、$\bar{\varepsilon}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\xi}$ 及び $\bar{\zeta}$ は等価媒質定数を要素とする 3×3 行列である。本計算においては、電磁界の各粒子による散乱現象が、電気及び磁気双極子及び電気四重極子に起因するものと仮定している[7]。単一粒子の電気及び磁気双極子モーメントを各々3 元縦ベクトル $\boldsymbol{p}_e$ 及び $\boldsymbol{p}_m$ で表すものとすると、単一種類の粒子のみについての電気及び磁気双極子モーメント密度 $\boldsymbol{P}_e$ 及び $\boldsymbol{P}_m$ （3 元縦ベクトル）は次式のように与えられる：

$$\boldsymbol{P}_i = n\boldsymbol{p}_i, \qquad n = (d_x d_y d_z)^{-1} \quad (i = e, m) \tag{2}$$

ただし、$n = (d_x d_y d_z)^{-1}$ は粒子の個数密度を表す。これらは次式のように、各粒子に印加される局所界(Lorentz 界) $\boldsymbol{E}_L$ 及び $\boldsymbol{H}_L$ と関係付けることができる：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_e \\ \boldsymbol{p}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{ee} & \bar{\alpha}_{em} \\ \bar{\alpha}_{me} & \bar{\alpha}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_L \\ \boldsymbol{H}_L \end{bmatrix} = \bar{\bar{\alpha}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_L \\ \boldsymbol{H}_L \end{bmatrix}. \tag{3}$$

$\bar{\bar{\alpha}}$ 及び $\bar{\alpha}_{ij}$ （I, j=e, m)はそれぞれ 6×6 及び 3×3 分極率行列である。単一粒子の電気四重極子モーメントを 9 元縦ベクトル $\boldsymbol{q}$ で表すものとすると、単一種類の粒子についての電気四重極子モーメント密度 $\boldsymbol{Q}$ （9 元縦ベクトル）は次式のように与えられ、ローレンツ界と関係付けられる：

$$\boldsymbol{Q} = n\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{q} = \bar{\bar{q}}\boldsymbol{E}_L \tag{4}$$

ここで、$\bar{\bar{q}}$ は 9×3 分極率行列である。なお、$\boldsymbol{H}_L$ の寄与は無視できるほど小さいものとして省略している。 これらの双極子及び四重極子モーメントは、金属細線導体上の位置 $\boldsymbol{r}$ における電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ より次式のように得られる：

$$\boldsymbol{p}_e = \frac{1}{j\omega}\int_S \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})dS, \quad \boldsymbol{p}_m = \frac{1}{2}\int_S \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})dS, \tag{5}$$

$$q_{ij} = \frac{1}{j\omega}\int_S (r_i J_j + J_i r_j)dS \quad (i, j = x, y, z) \tag{6}$$

ただし、q_{ij} は $\boldsymbol{q}$ の (i, j) 成分、S は金属細線表面上の積分を表す。今、双極子モーメントのみが電磁界の各粒子による散乱現象に寄与すると仮定すると、ローレンツ界は次式のように平均電磁界（式(1)）と関係付けられる：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_L \\ \boldsymbol{H}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_0}\bar{C} & \bar{O} \\ \bar{O} & \frac{1}{\mu_0}\bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_e \\ \boldsymbol{P}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} + \bar{\bar{C}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_e \\ \boldsymbol{P}_m \end{bmatrix} \tag{7}$$

ここで $\bar{O}$ は 3×3 零行列、$\bar{\bar{C}}$ 及び $\bar{C}$ は各々粒子間の相互作用を表す 6×6 及び 3×3 対角行列であり文献[9]で与えられる要素をもつ。式(2)～(7)より、電気及び磁気双極子モーメント密度、電気四重極子モーメント密度及び平均電磁界の関係式が導かれる。以下、文献[6]と同様の手法により、電気、磁気双極子モーメント、及び電気四重極子モーメントの等価媒質定数への寄与が求められ、粒子の種類ごとの各寄与の和により等価媒質定数が算定される。金属細線上の電流密度は細線近似モーメント法[11]により算出される。

3. 計算結果

数値計算結果を以下の規格化定数により表示する。

$$\varepsilon_{ij} = \mathrm{Re}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_{ij}}{\varepsilon_0}\right), \; \mu_{ij} = \mathrm{Re}\left(\frac{\bar{\mu}_{ij}}{\mu_0}\right), \tag{8}$$

$$\kappa_{ij} = \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{\xi}_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-\overline{\zeta}_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right). \tag{9}$$

$(i, j = x, y, z)$

また、κ_{ij} のうち、電気四重極子モーメントより計算される成分を κ'_{ij} と定義する。単一螺旋からなる螺旋粒子については、以下の2種類の構造につき検討している。

・キラル混合：右巻のみで構成。

・ラセミ混合：各座標軸方向に右巻、左巻を同率配列。

また、l =25.0(mm)、L =4.0(mm)、ピッチ $P = L/T$、W =0.07(mm)、$d_x = d_y = 4.0A,\ d_z = 2.0L$ を仮定している。双螺旋粒子については、以下の3種類の構造につき検討している。

・キラル混合：右巻-右巻（R-R）の粒子のみで構成。

・ラセミ混合（A）：R-L粒子のみで構成。

・ラセミ混合（B）：R-L 粒子、L-R 粒子 を各座標軸方向に同率に配列。

また $d_x = d_y = 2.5U,\ d_z = 2.5L$ を仮定し、他のパラメータは単一螺旋の粒子と同じものを仮定している。

図3～図6に結果を示す。

4．むすび

本研究では、自由空間中で一定方向に配向した細線螺旋導体のキラル及びラセミ混合配列に対する等価媒質特性の算定を試み、媒質特性における電気四重極子モーメントの寄与につき検討した。

文　献

[1] I. V. Lindell *et al.*, Artech House, 1994.

[2] M. Asai *et al.*, *Materials Integration*, Vol. 17, No. 7, 2004.

[3] D. R. Smith *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 84, No. 18, pp., 2000.

[4] S. Motojima *et al.*, *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 56, No. 4, 1995.

[5] M. Asai and J. Yamakita, *Proc. ISAP2007*, 2007.

[6] M. Asai and J. Yamakita, 信学技報 EMT, pp. 247-250, 2010.

[7] E. B. Graham and R. E. Raab, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 14, No. 1, 1997.

[8] A. D. Buckingham and M. B. Dunn: J. Chem. Soc. A, pp. 1988-1991, 1971.

[9] A. Ishimaru *et al.*,*IEEE Trans.AP*, Vol. 51, No. 10 , 2003.

[10] J. A. Kong," *J. Opt .Soc .Am. A,* Vol. 64, pp. 1304-1308, 1974.

[11] G. J. Burke and A. J. Poggio, *Lawrence Livermore National Laboratory, Report*, UCID-18834, 1981.

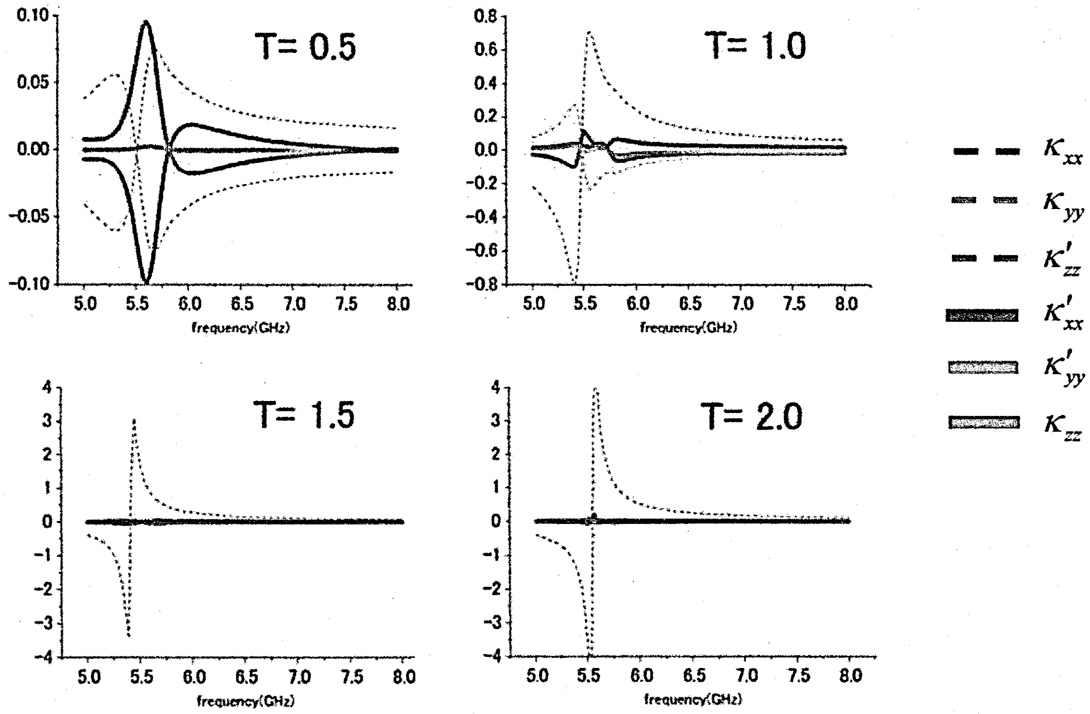


図３： $\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{zz}$， $\kappa'_{xx}, \kappa'_{yy}, \kappa'_{zz}$の周波数特性（螺旋粒子のキラル混合、 $\varphi=90°$）

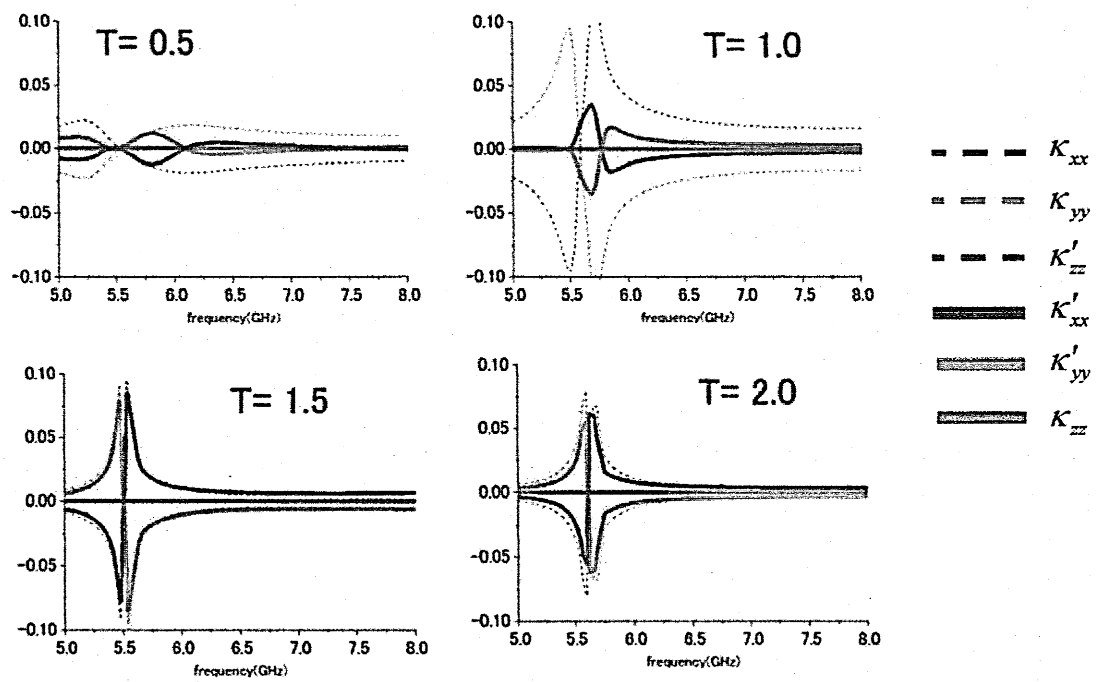


図４： $\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{zz}$， $\kappa'_{xx}, \kappa'_{yy}, \kappa'_{zz}$の周波数特性（螺旋粒子のラセミ混合、 $\varphi=90°$）

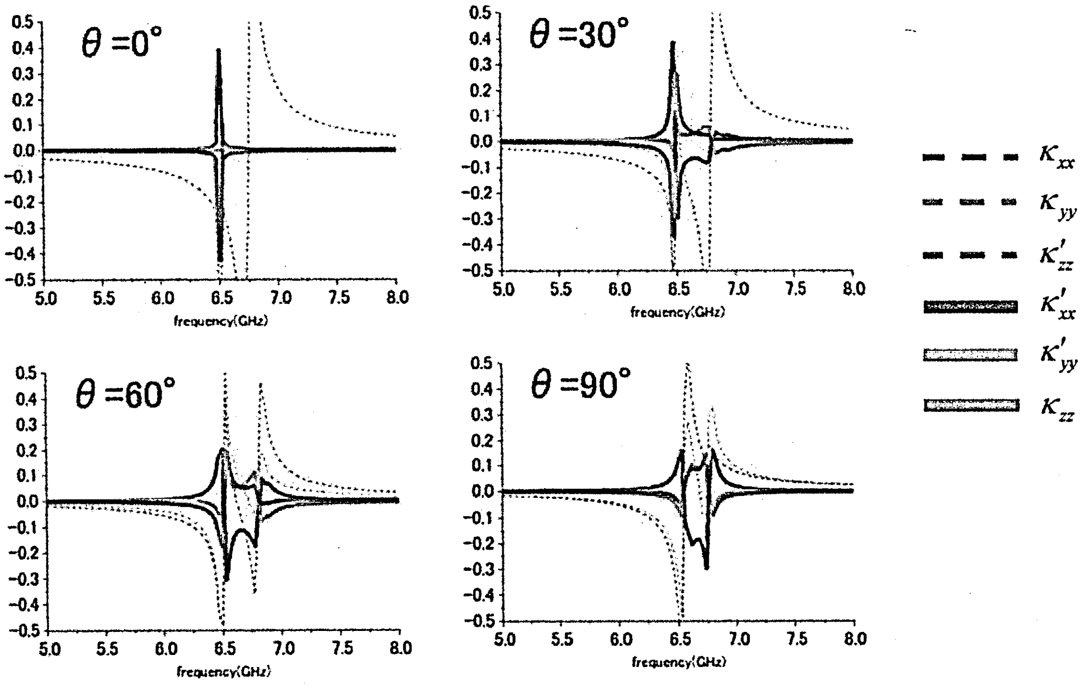


図５： $\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{zz}$， $\kappa'_{xx}, \kappa'_{yy}, \kappa'_{zz}$ の周波数特性（双螺旋粒子のキラル混合、$D = 4.0A$ ）

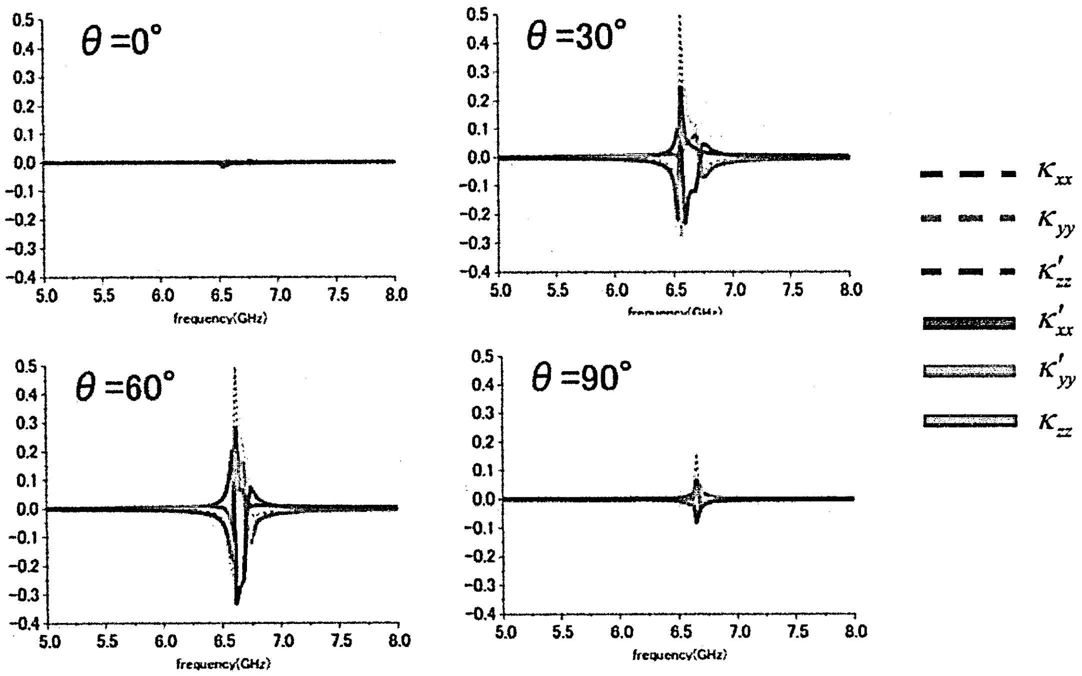


図６： $\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{zz}$， $\kappa'_{xx}, \kappa'_{yy}, \kappa'_{zz}$ の周波数特性（双螺旋粒子のラセミ混合(B)、$D = 4.0A$ ）

輻射科学研究会資料

資料番号	RS10-16

中間領域に影理論を適用した多層誘電体周期構造の計算法

Computatinal Methods of Multilayered Dielectric Periodic Structures by Application of Shadow Theory to Middle Regions

若林 秀昭[†]　　山北 次郎

岡山県立大学 情報工学部

[†] E-mail: waka@c.oka-pu.ac.jp

浅居 正充

近畿大学 生物理工学部

松本 恵治

大阪産業大学 工学部

2011年3月28日 (月)

於 大阪大学大学院

概　要　周期系，不規則系による散乱問題において，入射平面波が低入射角極限 (grazing) になると，入射波を相殺する鏡面反射波のみが生じ,「影」になる現象について，近年，関心が高まっている．その理論的取り扱い法について，中山らは「影理論」として提唱し，完全導体を対象に，その電磁界表現式の提案と物理的解釈を明らかにした．本報告では，多層誘電体周期構造による散乱問題に対する行列固有値問題を用いた手法に，影理論を適用し，影理論の妥当性を示すと共に，低入射角極限だけでなく，多層誘電体周期構造の中間領域において，固有値が縮退する場合の電磁界表現法について報告する．中間領域において，0 次または高次の固有値が縮退する場合の数値計算例により，本報告における定式化の妥当性を示す．

1　まえがき

不規則構造，周期構造による散乱問題において，入射角が十分小さい低入射角極限においては，高次の回折波はゼロになり，入射波と鏡面反射波が相殺され，全電磁界が消滅する「影」になる現象が話題を集めている．中山らは，低入射角極限における電磁界の消滅は，周期系，不規則系共通の現象であり，影理論 (Shadow Theory) と呼ばれる新しい電磁界表現式を提案し，最初の例として，完全導体格子を例にその物理的解釈，及び散乱因子を用いた回折効率の表現式などについて，詳細に報告した [1−6]．誘電体無限周期構造の解析法に関しては，極めて複雑な構造を持つ誘電体格子に対しても多くの数値解析法 [7−10] が確立しているにも関わらず，影の現象を明確に説明する理論や数値解析法については，議論されることは少なく，見逃されていたようである．

筆者らは先に，完全導体格子を対象に議論されていた影理論を，誘電体格子による散乱問題に適用し，その妥当性，及び物理的解釈について，検討した [11−13]．散乱問題を，線形方程式の励振項の選択問題と 1 階微分方程式の係数行列に対する行列固有値問題として捉えることにより，低入射角極限における影理論の電磁界表現式は，固有値の縮退と固有ベクトル行列によるジョルダン標準形への変換に対応することを報告した．

本報告では，多層誘電体周期構造について，影理論と 1 階微分方程式の係数行列の行列固有値との関係を明確にし，低入射角極限だけでなく，多層構造の中間領域において，固有値が縮退する場合の取り扱い方について，提案している．影理論で用いられている数式処理を応用することにより，新しい形式の変換行列と伝搬行列が導出でき，これらの行列の積を用いれば，固有値が縮退する場合を含む電磁界表現式が得られることを示している．行列固有値問題の観点から，影理論を見れば，影理論は固有値の縮退・非縮退問題，あるいは行列の対角化問題を経由せずに，影の現象を扱うことができる巧妙な理論であることがわかる．提案する変換行列と伝搬行列を用いれば，行列の対角化問題を気にすることなく安定した数値計算を実行することができると考えられる．なお，本報告における数式の定式化は，誘電率だけでなく透磁率が共に周期性を持つ構造を対象とし，数式の対称性を保持し，さらに，TE 波解析，TM 波解析を統一的に取り扱っている．中間領域における 0 次あるいは高次の固有値が縮退する場合について数値計算を行い，本報告における数式の定式化の妥当性を示している．

2　影理論における励振源

図 2 に示すような入射波領域，多層誘電体周期構造領域，基板領域からなる y 軸方向に一様な構造による 2 次元散乱問題について考える．m 次の反射，及び透過回折波振幅を g_{am}^-，g_{sm}^+ で表し，数値計算における打ち切り展開項数を $2M+1$ に設定すれば，誘電体周期構造の数値解析とは，一般に，反射，及び透過回折波振幅ベクトル g_a^-，g_s^+ を未知数とする

$$\begin{bmatrix} a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_a^- \\ g_s^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_a \\ b_s \end{bmatrix} \tag{1}$$

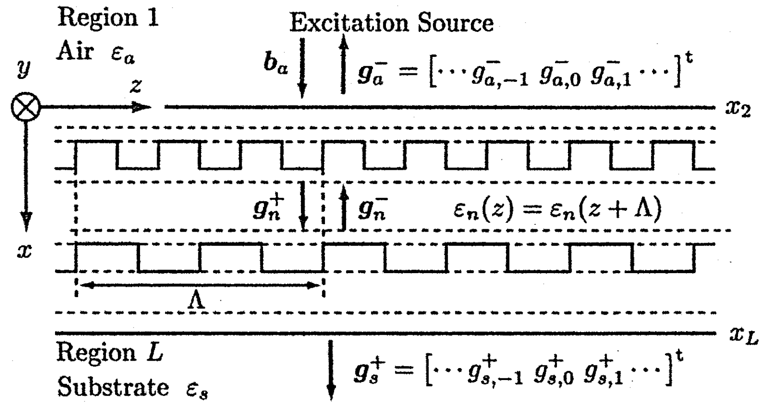


図 1　多層誘電体周期構造による散乱問題

$$\boldsymbol{g}_a^- = \left[g_{a-M}^- \cdots g_{a0}^- \cdots g_{aM}^-\right]^t, \qquad \boldsymbol{g}_s^+ = \left[g_{s-M}^+ \cdots g_{s0}^+ \cdots g_{sM}^+\right]^t \tag{2}$$

のような線形方程式の解を求める問題に帰着する．ここで，$\boldsymbol{b}_a$，$\boldsymbol{b}_s$ は散乱問題の励振源である．また，係数行列 $[\boldsymbol{a}]$ は，解析する周期構造，励振源の z 方向変化因子 $e^{-js_m z}$，数値解析理論の解析算法によって決まる $2(2M+1)\times 2(2M+1)$ 元の定数行列である．

今，反射，及び透過回折波振幅ベクトル $\boldsymbol{g}_a^-$，$\boldsymbol{g}_s^+$ を拡張し，x 方向に関する波動振幅を $\boldsymbol{g}_a^{\pm}$，$\boldsymbol{g}_s^{\pm}$，これらの振幅ベクトルから電磁界成分に変換する小行列を $[\boldsymbol{B}_a^+]$，$[\boldsymbol{B}_s^-]$ で表すことにすれば，通常，入射波領域から振幅 1 の平面波が入射し，無限遠点からの反射波がゼロであるから，励振源ベクトル $\boldsymbol{b}_a$，$\boldsymbol{b}_s$ は次式のように表される．

$$\boldsymbol{b}_a = [\boldsymbol{B}_a^+]\,\boldsymbol{g}_a^+, \qquad \boldsymbol{b}_s = [\boldsymbol{B}_s^-]\,\boldsymbol{g}_s^- = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{g}_a^+ = [0\cdots 1\cdots 0]^t, \qquad \boldsymbol{g}_s^- = [0\cdots 0\cdots 0]^t \tag{4}$$

ところが，励振源という立場では，反射，及び透過回折波振幅ベクトル $\boldsymbol{g}_a^-$，$\boldsymbol{g}_s^+$ が最終的に求められれば，線形方程式 (1) における未知数ベクトルは必ずしも $\boldsymbol{g}_a^-$，$\boldsymbol{g}_s^+$ である必要はなく，また励振源ベクトル $\boldsymbol{b}_a$ は任意で良い．影理論では，励振源ベクトルを

$$\boldsymbol{b}_a = [\boldsymbol{B}_a^+]\,[0\cdots(g_{a0}^+ - g_{a0}^-)\cdots 0]^t \tag{5}$$

のように選択してあり，影理論の出発点になっている．低入射角極限においては，法線方向の伝搬定数は 0 で縮退し，回折波振幅 $g_{a0}^{\pm}$ は，その記号的意味を失うため，励振源 $(g_{a0}^+ - g_{a0}^-)$ に対して，特異なモード振幅 $g_{a0}^{\oplus}$ と通常の回折波振幅 g_{a0}^- によって表せば良いことが考えられる．この場合の変換小行列 $[\boldsymbol{B}_a^+]$ の表現が，本報告の重要な論点となっている．

x 方向の伝搬定数が 0 で縮退する場合，一般的には Reyleigh anomaly としてよく知られているが，低入射角極限以外においては，通常のモード振幅 g_{am}^- だけが必要になり，特異モード振幅 $g_{am}^{\oplus}$ が必要になる場合はない．また，基板領域では，通常のモード振幅 g_{sm}^+ が透過回折波振幅となり，特異モード振幅 $g_{sm}^{\ominus}$ を使用する場合は生じない．一方，線形方程式 (1) は，一般には，$\boldsymbol{b}_a$，$\boldsymbol{b}_s$ に対して決定される特解 (散乱問題の解) と係数行列 $[\boldsymbol{a}]$ だけで決定される基本解 (導波問題の解) を持ち，係数行列の行列式 det.$[\boldsymbol{a}] \neq 0$ であれば，特解のみが存在し，散乱問題の一意的な解が計算できる．また，det.$[\boldsymbol{a}] = 0$ であれば，特解だけでなく，基本解が存在し (Resonance anormaly)，散乱問題の解は一意的に定まらない．

3　行列固有値を用いた計算手法

3.1　1 解微分方程式

図 2 の多層誘電体周期構造において，ある周期構造領域に着目すれば，比誘電率 ε，比透磁率 μ は変数 z だけの周期関数である．時間変化因子 $e^{j\omega t}$ とし，空間変数 x，z を真空中の波数 $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ (λ は波長) で規格化し，$k_0 x \to x$，$k_0 z \to z$ のように簡略表示すれば，

$$\overline{\mathrm{curl}}\sqrt{Y_0}\boldsymbol{E} = -j\mu(z)\sqrt{Z_0}\boldsymbol{H}, \qquad \overline{\mathrm{curl}}\sqrt{Z_0}\boldsymbol{H} = j\varepsilon(z)\sqrt{Y_0}\boldsymbol{E} \tag{6}$$

のような空間変数で規格化されたマクスウェルの方程式が得られる [13]．但し，$Z_0 = 1/Y_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ は真空中の波動インピーダンス，$\overline{\mathrm{curl}}$ は規格化された回転 (rotation) である．

励振源の z 軸方向の変化因子を $e^{-js_m z}$ のように表すと，構造の周期性から，各領域における電磁界成分 E_i，H_i $(i = x, y, z)$ は

$$\sqrt{Y_0}E_i(x,z) = \sum_m e_{im}(x)\exp(-js_m z), \qquad \sqrt{Z_0}H_i(x,z) = \sum_m h_{im}(x)\exp(-js_m z) \tag{7}$$

$$s_m = s_0 + mn_K, \qquad n_K = \lambda/\Lambda \tag{8}$$

のように，空間高調波展開によって表される．但し，n_K は規格化された格子定数であり，s_0 は入射角 θ_i の場合，図 2 に示すように，$s_0 = \sqrt{\varepsilon_a\mu_a}\sin\theta_i$ である．数値計算による打ち切り展開項数を $2M+1$

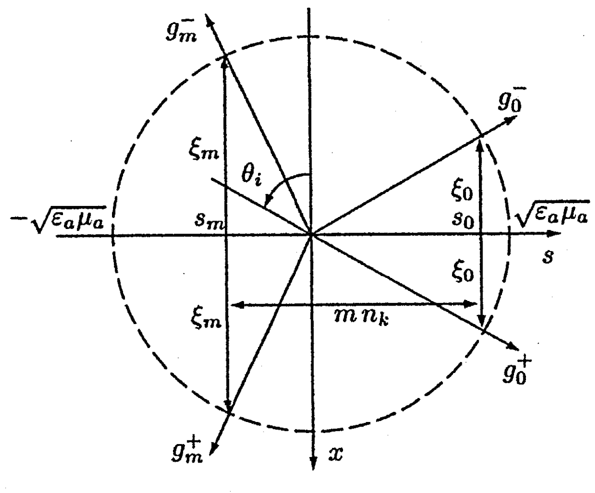


図 2　一様領域における回折波振幅

とし，展開係数 $e_{im}(x)$，$h_{im}(x)$ を用いて，

$$\boldsymbol{e}_i(x) = [e_{i-M}(x)\cdots e_{\ell\,0}(x)\cdots e_{i\,M}(x)]^{\mathrm{t}}, \qquad \boldsymbol{h}_i(x) = [h_{i-M}(x)\cdots h_{\ell\,0}(x)\cdots h_{i\,M}(x)]^{\mathrm{t}} \tag{9}$$

のような列ベクトルを導入する．式 (9) を式 (6) に代入すれば，TE 波，TM 波に関する連立 1 階微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_y(x)\\ \boldsymbol{h}_z(x)\end{bmatrix} = j\,[\boldsymbol{C}_{\mathrm{TE}}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_y(x)\\ \boldsymbol{h}_z(x)\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{h}_x = -[\mu]^{-1}[s]\,\boldsymbol{e}_y \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_y(x)\\ \boldsymbol{e}_z(x)\end{bmatrix} = j\,[\boldsymbol{C}_{\mathrm{TM}}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_y(x)\\ \boldsymbol{e}_z(x)\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_x = [\varepsilon]^{-1}[s]\,\boldsymbol{h}_y \tag{11}$$

$$[C_{\mathrm{TE}}] = \begin{bmatrix} [0] & -[1/\mu]^{-1} \\ -[\varepsilon] + [s][\mu]^{-1}[s] & [0] \end{bmatrix}, \qquad [C_{\mathrm{TM}}] = \begin{bmatrix} [0] & [1/\varepsilon]^{-1} \\ [\mu] - [s][\varepsilon]^{-1}[s] & [0] \end{bmatrix} \tag{12}$$

が得られる．但し，小行列 $[s]$ は s_m から成る $(2M+1)\times(2M+1)$ 元の対角行列，$[\varepsilon]$，$[1/\varepsilon]$，$[\mu]$，$[1/\mu]$ は比誘電率 $\varepsilon(z)$，その逆数 $1/\varepsilon(z)$，比透磁率 $\mu(z)$，その逆数 $1/\mu(z)$ のフーリエ展開係数 $\tilde{\varepsilon}_m$，$\widetilde{(1/\varepsilon)}_m$，$\tilde{\mu}_m$，$\widetilde{(1/\mu)}_m$ から構成される $(2M+1)\times(2M+1)$ 元の正方行列であり，

$$[s] = [\delta_{mn} s_m], \quad [\varepsilon] = [\tilde{\varepsilon}_{n-m}], \quad [1/\varepsilon] = [\widetilde{(1/\varepsilon)}_{n-m}], \quad [\mu] = [\tilde{\mu}_{n-m}], \quad [1/\mu] = [\widetilde{(1/\mu)}_{n-m}] \tag{13}$$

のように定義される．但し，δ_{mn} はコロネッカデルタであり，正方行列 $[\varepsilon]$，$[1/\varepsilon]$ 等について，その m 行 n 列の要素は $(n-m)$ 次のフーリエ展開係数 $\tilde{\varepsilon}_{n-m}$，$\widetilde{(1/\varepsilon)}_{n-m}$ 等である [14,15]．以下では，TE 波，及び TM 波解析を統一的に表現するために，

$$(\mathrm{TE}): \quad (\boldsymbol{f}_x, \boldsymbol{f}_y, \boldsymbol{f}_z) = (\boldsymbol{h}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{h}_z), \qquad (\mathrm{TM}): \quad (\boldsymbol{f}_x, \boldsymbol{f}_y, \boldsymbol{f}_z) = (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{h}_y, \boldsymbol{e}_z) \tag{14}$$

を用いて表す．

3.2　スペクトル領域における電磁界表現式

式 (10)，(11) で表される 1 階微分方程式の解は，係数行列 $[C_{\mathrm{TE}}]$ または，$[C_{\mathrm{TM}}]$ の行列固有値問題に帰着する．$(2M+1)$ 元のモード振幅ベクトル $\boldsymbol{g}^{\pm}(x)$，及びその変換行列 $[\boldsymbol{T}]$ を導入して，電磁界の展開係数ベクトルを

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_y(x) \\ \boldsymbol{f}_z(x) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{T}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}^+(x) \\ \boldsymbol{g}^-(x) \end{bmatrix} \tag{15}$$

のように表現すれば，係数行列 $[C]$ の相似変換として

$$[\boldsymbol{T}]^{-1}[C][\boldsymbol{T}] = [\boldsymbol{Q}] \tag{16}$$

が得られる．$[\boldsymbol{Q}]$ は係数行列 $[C]$ の固有値が縮退しなければ，対角行列になるが，縮退する場合であっても少なくとも，ジョルダン標準形には変換可能である．従って，$[\boldsymbol{Q}]$ から伝搬行列 $[\boldsymbol{P}(x)]$ を作れば，式 (10)，(11) の解，すなわち，次式のようなスペクトル領域における電磁界表現式が得られる．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_y(x) \\ \boldsymbol{f}_z(x) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{T}]\,[\boldsymbol{P}(x-x_0)] \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}^+(x_0) \\ \boldsymbol{g}^-(x_0) \end{bmatrix} \tag{17}$$

但し，x_0 は位相基準点の座標で，任意に与えることができる．$2(2M+1)$ 個の固有値 $\{\{\kappa_m\}\ \{\kappa'_m\}\}$ は 付録 A に示すように，$(2M+1)$ 個の固有値 $\{\kappa_m^2\}$ の平方根として計算できる．従って，固有値が 0 で縮退しない限り，固有値の符号は ± 方向別に分類でき，前進波 $\boldsymbol{g}^+$，後退波 $\boldsymbol{g}^-$ が存在する．係数行列 $[C]$ が相異なる固有値を持ち，互いに独立な固有ベクトルを持つなら，変換行列 $[\boldsymbol{T}]$ は $[C]$ の固有ベクトル行列となる．また，$[\boldsymbol{Q}]$ は $2(2M+1)$ 個の固有値 $\{\{\kappa_m^+\},\{\kappa_m^-\}\}$ を要素とする対角行列となり，伝搬行列 $[\boldsymbol{P}(x)]$ は

$$[\boldsymbol{P}(x)] = \begin{bmatrix} [\delta_{mn} e^{j\kappa_m^+ x}] & [0] \\ [0] & [\delta_{mn} e^{j\kappa_m^- x}] \end{bmatrix} \tag{18}$$

のように表される．

影理論が最初に対象とした低入射角極限における計算処理として，固有値が 0 で縮退する場合だけを例外処理と考え，ジョルダン標準形に変換する特異モード振幅 $\boldsymbol{g}^{\oplus}$ を使った例外的な処理法を適用すれば，従来法を用いて成立する．すなわち，固有値が $\kappa_m^2 = 0$ となり，行列 $[C]$ が対角化できない場合は，$[C]$ をジョルダン標準形に変換し，ハミルトン・ケーリーの定理を用いて，$[C]$ の拡張固有空間から特異モード振幅 $\boldsymbol{g}^{\oplus}$ に対応する固有ベクトルを決定すれば，det.$[\boldsymbol{T}] \neq 0$ となる変換行列 $[\boldsymbol{T}]$ が求められる．この場合，特異モード振幅が励振源である [11,12]．

3.3 境界条件と線形方程式

誘電体周期構造の構造と入射波の z 軸方向の変化因子 e^{-js_0z} が与えられれば，各領域 $(n=1,2,\cdots,N)$ における変換行列 $[\boldsymbol{T}_{(n)}]$ と伝搬行列 $[\boldsymbol{P}_{(n)}(x)]$ を決定できる．式 (17) は，電磁界の接線成分を表すことから，電磁界成分の連続性より，

$$
\begin{aligned}
&[\boldsymbol{T}_{(1)}][\boldsymbol{P}_{(1)}(x_2-x_2)]\ \boldsymbol{g}_1(x_2)=[\boldsymbol{T}_{(2)}]\ \boldsymbol{g}_2(x_2)\\
&[\boldsymbol{T}_{(2)}][\boldsymbol{P}_{(2)}(x_3-x_2)]\ \boldsymbol{g}_2(x_2)=[\boldsymbol{T}_{(3)}]\ \boldsymbol{g}_3(x_3)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[\boldsymbol{T}_{(N-1)}][\boldsymbol{P}_{(N-1)}(x_N-x_{N-1})]\ \boldsymbol{g}_{N-1}(x_{N-1})=[\boldsymbol{T}_{(N)}]\ \boldsymbol{g}_N(x_N)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

が得られる．但し，入射波領域，基板領域においては，

$$
\boldsymbol{g}_1(x_2)=\boldsymbol{g}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}_a^+\\ \boldsymbol{g}_a^-\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{g}_N(x_N)=\boldsymbol{g}_s=\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}_s^+\\ \boldsymbol{g}_s^-\end{bmatrix}
\tag{20}
$$

と置くことができ，$\boldsymbol{g}_a^+$ は励振源，$\boldsymbol{g}_s^-\ (=0)$ となる．従って，式 (19) は $(N-1)\times 2(2M+1)$ 元の線形方程式となる．今，何らかの計算法で，未知数 $\boldsymbol{g}_2(x_2)$，$\boldsymbol{g}_3(x_3)$，$\cdots$，$\boldsymbol{g}_{N-1}(x_{N-1})$ を消去すれば，線形方程式 (1) のような 2 媒質境界問題に帰着する．$\boldsymbol{g}_a^+$，$\boldsymbol{g}_a^-$ との対応関係を考えるために，入射波領域の変換行列 $[\boldsymbol{T}_a]$ を

$$
[\boldsymbol{T}_{(1)}]=[\boldsymbol{T}_a]=\Big[[\boldsymbol{T}_a^+]\,[\boldsymbol{T}_a^-]\Big]
\tag{21}
$$

のように分解表現したとき，式 (3) との対応関係は

$$
[\boldsymbol{B}_a^+]=-[\boldsymbol{T}_a^+]
\tag{22}
$$

となり，入射波の振幅ベクトルと励振源ベクトルの関係を表す重要な変換小行列となっている．

4 影理論を用いた解析算法

入射波領域や基板領域のような一様領域では，比誘電率，比透磁率は周期性を持たない定数である．この場合，式 (12) の係数行列 $[\boldsymbol{C}]$ の小行列は全て対角行列となる．これは，空間高調波間に結合が無くなり，単なる平面波の集まりを意味するから，m 次の空間高調波成分だけを取り出し，2×2 元の係数行列 $[c_m]$ について検討すれば良い．m 次の高調波に対応する係数行列 $[c_m]$ の固有値 $\{\kappa_m^+,\kappa_m^-\}$ と固有ベクトル行列 $[t_m]$ は解析的に次式のように求められる．

$$
\kappa_m^{\pm}=\mp\xi_m,\qquad \xi_m=\begin{cases}\sqrt{\varepsilon\mu-s_m^2} & (\varepsilon\mu\ge s_m^2)\\ j\sqrt{\varepsilon\mu-s_m^2} & (\varepsilon\mu< s_m^2)\end{cases}
\tag{23}
$$

$$
[t_m]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\xi_m/\zeta & \xi_m/\zeta\end{bmatrix},\qquad \zeta=\begin{cases}-\mu & (\mathrm{TE})\\ \varepsilon & (\mathrm{TM})\end{cases}
\tag{24}
$$

但し，固有ベクトルは $e_{ym}=1$，あるいは $h_{zm}=1$ に規格化している．従って，固有値が縮退しなければ，m 次の空間高調波成分は，変換行列 $[t_m]$，伝搬行列 $[p_m(x)]$ を用いて，

$$
\begin{bmatrix}f_{ym}^a(x)\\ f_{zm}^a(x)\end{bmatrix}=[t_m]\,[p_m(x-x_0)]\begin{bmatrix}g_m^+(x_0)\\ g_m^-(x_0)\end{bmatrix},\qquad [p_m(x)]=\begin{bmatrix}e^{-j\xi_m x} & 0\\ 0 & e^{j\xi_m x}\end{bmatrix}
\tag{25}
$$

のように表すことができる．

4.1　入射波領域における励振源と散乱因子

入射波領域では，$m=0$ に対応する g_{a0}^{+} は入射波振幅，g_{a0}^{-} は鏡面反射波の振幅を表している．影理論による励振源は，$g_{a0}^{+}=1$ と $g_{a0}^{-}=-1$ の和であり，$m=0$ に対応する電磁界の表現式は，式 (24)，(25) から，次式のように表される (付録 B 参照).

$$\begin{bmatrix} f_{y0}^{a}(x) \\ f_{z0}^{a}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2j\sin(\xi_0^a x) & e^{j\xi_0^a x} \\ -(2\xi_0^a/\zeta_a)\cos(\xi_0^a x) & (\xi_0^a/\zeta_a)\,e^{j\xi_0^a x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ M_{a0}^{-} \end{bmatrix} \tag{26}$$

但し，$M_{a0}^{-}=1+g_{a0}^{-}$ であり，位相基準点は $x_0=0$ に設定している．$x=0$ とすれば，式 (22) の変換小行列に対応する部分は，$[B_a^{+}]=[0\quad 2\xi_0^a/\zeta_a]^t$ となるので，式 (3)，(4)，(5) を考慮し，$(2M+1)$ 元に拡張しすることにより，式 (1) の $\boldsymbol{b}_a$ が次式のように与えられる.

$$\boldsymbol{b}_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \delta_{m0}\,2\xi_0^a/\zeta_a \end{bmatrix} \tag{27}$$

この励振源ベクトルを使った式 (1) の解を，影理論では，M_{am}^{-}，M_{sm}^{+} と表し，変形回折波振幅と呼んでいる．低入射角極限における入射波領域の固有値は $\xi_0^a=0$ になるため，線形方程式の定数項を $2\xi_0^a/\zeta_a$ で規格化し，$\boldsymbol{b}_a$ を単位ベクトルとした線形方程式 (1) の解を，影理論では，散乱因子 S_{am}^{+}，S_{sm}^{+} と名付けている．単位ベクトルを励振源とすれば，入射波領域と周期構造領域の境界面 $(x=x_2)$ における境界条件は，

$$h_{z0}(x_2^{+})-h_{z0}(x_2^{-})=1=K_{y0}^{(\mathrm{J})},\qquad e_{z0}(x_2^{+})-e_{z0}(x_2^{-})=1=K_{y0}^{(\mathrm{M})} \tag{28}$$

となり，$K_{y0}^{(\mathrm{J})}$，$K_{y0}^{(\mathrm{M})}$ は面電流密度，面磁流密度をそれぞれ，表している．従って，散乱因子は，単位面電流密度，あるいは単位面磁流密度として，e^{-js_0z} を励振源に選んだ場合と等価である．一般化して，励振源 e^{-js_mz} とすれば，散乱因子から直接，スペクトル領域のグリーン関数が計算できることを示唆している．従って，散乱因子 S_m は回折波振幅 g_m や変形回折波振幅 M_m と比較して，より根源的な物理量である．散乱因子を用いれば，反射・透過回折効率 η_m^a，η_m^s は次式のように与えられる.

- 伝搬波入射の場合 (ξ_0^a が実数)

$$\eta_m^a = \begin{cases} \left|2\zeta_a\xi_0^a S_0^{a-}-1\right|^2 & (m=0) \\ 4\,\zeta_a(\xi_0^a)^2\,\mathrm{Re}\{\xi_m^a\}\left|S_m^{a-}\right|^2 & (m\neq 0) \end{cases},\qquad \eta_m^s = 4\,\xi_0^a\,\mathrm{Re}\{\xi_m^s\}\left|S_m^{s+}\right|^2 \tag{29}$$

- エバネセント波入射の場 (ξ_0^a が虚数)

$$\eta_m^a = \begin{cases} 0 & (m=0) \\ \dfrac{\zeta_a\,\mathrm{Re}\{\xi_m^a\}\left|S_m^{a-}\right|^2}{\mathrm{Re}\{S_0^{a-}\}} & (m\neq 0) \end{cases},\qquad \eta_m^s = \frac{\zeta_a\,\mathrm{Re}\{\xi_s^m\}\left|S_m^{s+}\right|^2}{\mathrm{Re}\{S_0^{a-}\}} \tag{30}$$

低入射角極限 ($\xi_0^a\to 0$) における回折効率の不連続性を正確に表現できることがわかる.

4.2　任意の一様領域における影理論の適用

本節では，入射波領域に限定せず，任意の一様領域に，影理論を適用する．今，$2(2M+1)$ 個の固有値 $\{\{\kappa_m\}\,\{\kappa'_m\}\}$ について，0 で縮退する可能性がある固有値を $\kappa_{(k)}$，$\kappa_{(k')}$ $(k'=2M+1+k)$ とし，k，k' に対応する係数行列 $[c_{(k)}]$ の固有ベクトル行列を $[t_{(k)}]$ と表現する．$[t_{(k)}]$ から影理論に従って，新しい変換行列 $[t'_{(k)}]$ と伝搬行列 $[p'_{(k)}(x)]$ を導出すれば，

$$\left\{\kappa_{(k)},\ \kappa_{(k')}\right\} = \left\{-\xi_{(k)},\ \xi_{(k)}\right\} \tag{31}$$

$$\left[t_{(k)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\xi_{(k)}/\zeta & \xi_{(k)}/\zeta \end{bmatrix} \longrightarrow \left[t'_{(k)}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/\zeta & \xi_{(k)}/\zeta \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\left[p_{(k)}(x)\right] = \begin{bmatrix} e^{-j\,\xi_{(k)}x} & 0 \\ 0 & e^{j\,\xi_{(k)}x} \end{bmatrix} \longrightarrow \left[p'_{(k)}(x)\right] = \begin{bmatrix} e^{-j\,\xi_{(k)}x} & 0 \\ j\dfrac{\sin(\xi_{(k)}x)}{\xi_{(k)}} & e^{j\,\xi_{(k)}x} \end{bmatrix} \tag{33}$$

が得られる．但し，括弧 (k) は，行列または，列ベクトルの第 k 列目を示し，次数 m との関係は，$m=-M+(k-1)\quad(k=1,2,\cdots,2M+1)$ である．変換行列 $\left[t'_{(k)}\right]$ と伝搬行列 $\left[p'_{(k)}(x)\right]$ を使った次式のような電磁界の表現式が得られる．

$$\begin{bmatrix} f_{y(k)}(x) \\ f_{z(k)}(x) \end{bmatrix} = \left[t'_{(k)}\right]\left[p'_{(k)}(x-x_0)\right]\begin{bmatrix} M^{\oplus}_{(k)} \\ M^{-}_{(k)} \end{bmatrix} \tag{34}$$

但し，$M^{\oplus}_{(k)} = -2\xi_{(k)}g^{+}_{(k)}$，$M^{-}_{(k)} = g^{+}_{(k)} + g^{-}_{(k)}$ である．$\xi_{(k)} = 0$ の場合には，

$$\left[t'_{(k)}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/\zeta & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[p'_{(k)}(x)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jx & 1 \end{bmatrix} \tag{35}$$

となり，$[c_{(k)}]$ が対角化できない場合のジョルダン標準形を用いた表現式に完全に一致することがわかる [11,12]．変換行列 $[t'_{(k)}]$ の第 1 列は，拡張固有空間から得られた固有ベクトル，第 2 列は，通常の固有ベクトルとなり，互いに独立である．従って，従来法では，$[c_{(k)}]$ の固有値が 0 で縮退する場合には，1 次従属の固有ベクトルを使った表現となり，正確では無いことがわかる．また，固有値が縮退しない通常の場合であっても，変換行列 $[t'_{(k)}]$ と伝搬行列 $[p'_{(k)}(x)]$ を使った電磁界の表現式 (34) で表すことができる．なお，$2(2M+1)$ 元に拡張する場合，式 (35) のような変換行列と伝搬行列は，固有値が 0 で縮退する可能性がある部分にだけ適用すれば良く，他の空間高調波成分に対しては，従来の表現式 (25) を用いれば良い．

4.3　周期構造領域への影理論の適用

一般に，周期構造領域においても係数行列 $[C]$ の固有値が 0 で縮退する可能性がある．本節では，周期構造領域において，影理論を適用した新しい変換行列 $[\boldsymbol{T}']$ と伝搬行列 $[\boldsymbol{P}'(x)]$ を使った電磁界の表現式を導出する．但し，周期構造領域では，行列固有値は，計算機による数値解であることに注意が必要である．式 (12) で表される係数行列 $[C]$ は，

$$[C] = \begin{bmatrix} [0] & [\boldsymbol{A}_1] \\ [\boldsymbol{A}_2] & [0] \end{bmatrix} \tag{36}$$

のように，表すことができる．これは，等方性 2 次元解析における電磁界が，ヘルムホルツ型の連立 2 階微分方程式を満たすことから容易に推察できる．係数行列 $[C]$ に対する固有値 $\{\kappa_m\}$ と固有ベクトル行列 $[\boldsymbol{T}]$ は行列次元数が半分の行列 $[[\boldsymbol{A}_2][\boldsymbol{A}_1]]$ の固有値 $\{\xi_m^2\}$ と固有ベクトル行列 $[\boldsymbol{T}_2]$ から，

$$\{\{\kappa_m\}\ \{\kappa'_m\}\} = \{\{-\xi_m\}\ \{\xi_m\}\}, \qquad [\boldsymbol{T}] = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{A}_1][\boldsymbol{T}_2] & [\boldsymbol{A}_1][\boldsymbol{T}_2] \\ -[\boldsymbol{T}_2][\delta_{mn}\xi_m] & [\boldsymbol{T}_2][\delta_{mn}\xi_m] \end{bmatrix} \tag{37}$$

となる (付録 A 参照)．今，$2(2M+1)$ 個の固有値 $\{\{\kappa_m\}\ \{\kappa'_m\}\}$ について，0 で縮退する可能性がある固有値を $\kappa_{(k)}$，$\kappa_{(k')}$ $(k'=2M+1+k)$ とし，固有ベクトル $[\boldsymbol{T}]$ から，第 k 列 $\boldsymbol{t}_{(k)}$，第 k' 列 $\boldsymbol{t}_{(k')}$ を抜き出すと，式 (37) から，次式のように表すことができる．

$$\boldsymbol{t}_{(k)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ -\boldsymbol{q}\,\xi_{(k)} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{t}_{(k')} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{q}\,\xi_{(k)} \end{bmatrix} \tag{38}$$

ここで，これらの 2 つのベクトル $\boldsymbol{t}_{(k)}$，$\boldsymbol{t}_{(k')}$ はそれぞれ，周期構造領域におけるモード振幅 $g_{(k)}^{+}$，$g_{(k)}^{-}$ に対応する固有ベクトルである．$[\boldsymbol{C}]$ の固有値が 0 で縮退する場合，変換行列 $[\boldsymbol{T}]$ の中に，1 次従属の固有ベクトルが存在する．これを回避するために，影理論の手法を適用し，$g_{(k)}^{+}$，$g_{(k)}^{-}$ を $M_{(k)}^{\oplus}$，$M_{(k)}^{-}$ に変換すると，

$$\boldsymbol{t}'_{(k)} = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{t}'_{(k')} = \begin{bmatrix} r \\ q\xi_{(k)} \end{bmatrix} \tag{39}$$

が得られ，伝搬行列 $[\boldsymbol{P}'(x)]$ の第 k 列 $\boldsymbol{p}'_{(k)}(x)$，及び第 k' 列 $\boldsymbol{p}'_{(k')}(x)$ は，

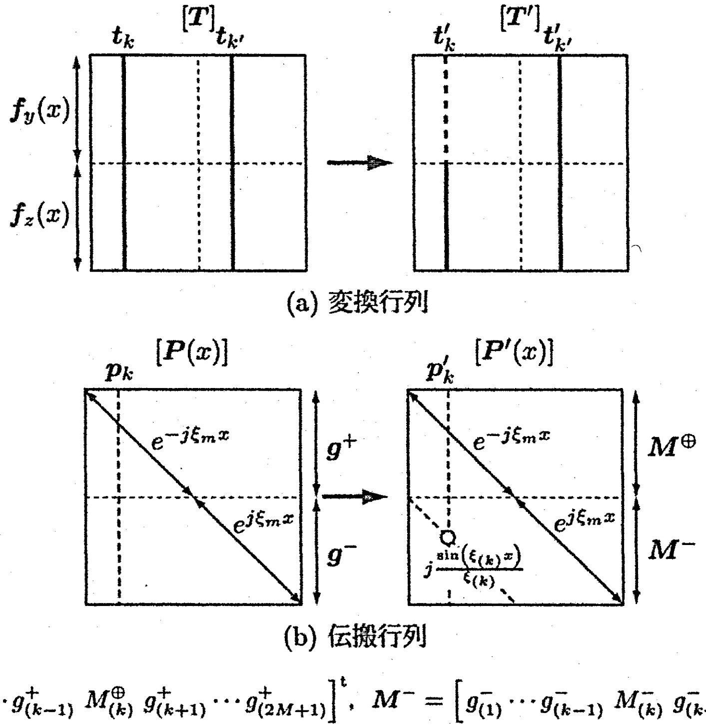
$$\boldsymbol{p}'_{(k)}(x) = \begin{bmatrix} \delta_{kn}\, e^{-j\xi_{(k)}x} \\ \delta_{kn}\, j\dfrac{\sin(\xi_{(k)}x)}{\xi_k} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}'_{(k')}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_{k'n}\, e^{j\xi_{(k)}x} \end{bmatrix} \tag{40}$$

のように導出できる．即ち，変換行列 $[\boldsymbol{T}]$ と伝搬行列 $[\boldsymbol{P}(x)]$ の第 k 列を式 (39)，(40) の第 1 式に置き換えれば，影理論を適用した変換行列 $[\boldsymbol{T}']$ と伝搬行列 $[\boldsymbol{P}'(x)]$ が導出できる．従って，影理論を適用した新しい電磁界の表現式は，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_y(x) \\ \boldsymbol{f}_z(x) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{T}']\,[\boldsymbol{P}'(x-x_0)] \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}^{\oplus} \\ \boldsymbol{M}^{-} \end{bmatrix} \tag{41}$$

のように与えられる．影理論を適用した新しい変換行列 $[\boldsymbol{T}']$ と伝搬行列 $[\boldsymbol{P}'(x)]$ への変換操作を図 3 に示す．同図において，固有値が 0 で縮退する可能性がある列ベクトルの修正部分が変形回折波特異振幅 $M_{(k)}^{\oplus}$ に対応し，他の部分は従来の変換行列 $[\boldsymbol{T}]$，伝搬行列 $[\boldsymbol{P}(x)]$ である．また，新しい変換行列 $[\boldsymbol{T}']$，及び伝搬行列 $[\boldsymbol{P}'(x)]$ は，固有値が 0 で縮退する場合には，式 (12) の係数行列 $[\boldsymbol{C}]$ のジョルダン標準形へ変換行列を用いた電磁界の表現式に一致する．

影理論の素晴らしさは，励振源を $(e^{-j\xi_0^a x} - e^{j\xi_0^a x})$ に選べば，通常の g_{a0}^{+}，g_{a0}^{-} による表現式であるが，低入射角極限における特異モード振幅が自動的に挿入され，電磁界の表現式を形成できている点に



$$\boldsymbol{M}^{\oplus} = \left[g_{(1)}^{+} \cdots g_{(k-1)}^{+}\; M_{(k)}^{\oplus}\; g_{(k+1)}^{+} \cdots g_{(2M+1)}^{+}\right]^t, \quad \boldsymbol{M}^{-} = \left[g_{(1)}^{-} \cdots g_{(k-1)}^{-}\; M_{(k)}^{-}\; g_{(k+1)}^{-} \cdots g_{(2M+1)}^{-}\right]^t$$

図 3　影理論を適用した変換行列 $[\boldsymbol{T}']$，伝搬行列 $[\boldsymbol{P}'(x)]$ への変換操作

ある．本節で述べた変換操作は，影理論において最初に登場する，平面波入射による散乱界に関する一見不可思議な操作

$$e^{-j\xi_0^a x} - e^{j\xi_0^a x} + \sum_m \left(\delta_{m0} + g_{am}^-\right) e^{j\,\xi_m^a x} \tag{42}$$

を全領域に拡張し，固有値が 0 で縮退する可能性がある部分に，影理論の励振源に相当する変形特異振幅 $M_k^{\oplus}$ に置き換えただけである．

5　数値計算例

本節では，図 4 に示すような構造による平面波の散乱問題を考える．厚さ h_1 の中間領域が，入射領域と周期的表面を持つ基板領域に挟まれている．周期的表面は厚さ h_2，z 軸方向に格子周期 Λ，格子幅 W，格子の比誘電率 ε_3 である．ε_1，ε_2，ε_4 はそれぞれ，入射波領域，中間領域，基板領域の比誘電率である．構造パラメータは $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 2.25$，$\varepsilon_2 = 1.0$，$W/\Lambda = 0.5$，$\Lambda/\lambda = 1.2$ とする．以下の数値計算では，固有値が縮退する，あるいは縮退する可能性がある場合について，全領域に影理論を適用している．解の収束性と計算時間の関係から，空間高調波の打ち切り次数を $M = 50$ とした．また，エネルギー誤差は常に 10^{-10} 以下である．

入射波領域と中間領域の比誘電率が $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ の関係の場合，中間領域の 0 次の固有値が 0 で縮退する臨界角 ($\mathrm{CA} = \sin^{-1}\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$) が存在する．この縮退は，全体の特性に及ぼす影響が大きいため，まず，臨界角や臨界角付近の入射角を考える．x/λ に対する 0 次の電磁界成分の分布を，図 5(a)，(b) に示す．パラメータは，$\varepsilon_4 = 2.25(= \varepsilon_1)$，$h_1/\lambda = 1.0$，$h_2/\lambda = 0.5$ である．なお，格子領域の電磁界分布は，0 次のモードに対応する変換行列の要素だけを抽出して計算した推定値である．中間領域においては，入射角が臨界角の場合， 0 次の回折波に影理論が適用され，他の入射角の場合には従来法が適用されている．同図から，臨界角入射時の電磁界分布は，臨界角と僅かに異なる入射角の場合の電磁界分布と，ほぼ近い値になっている．従って，本手法の妥当性がわかると共に，中間領域において固有値が縮退する場合においても，計算を実行できている．また，$0 \le x/\lambda < 1$ の中間領域においては，臨界角付近の入射角では，e_{y0}，h_{y0} は x に，ほぼ比例する界を示し，h_{z0}，e_{z0} は x に無関係な，ほぼ一定値になっている様子がわかる．このことは，式 (34)，(35) と $m = 0$ $(k = M + 1)$ から，臨界角入射における中間領域の 0 次の電磁界分布が，次式のように表され，$f_{y0}(x)$ が x に比例し，$f_{z0}(x)$ が一定値になっていることからもわかる．

$$\begin{bmatrix} f_{y0}(x) \\ f_{z0}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jx\,M_0^{\oplus} + M_0^- \\ (1/\zeta)\,M_0^{\oplus} \end{bmatrix} \tag{43}$$

また，$x/\lambda \ge 1.5$ の基板領域において，トンネル効果による前進波が伝搬している様子がわかる．

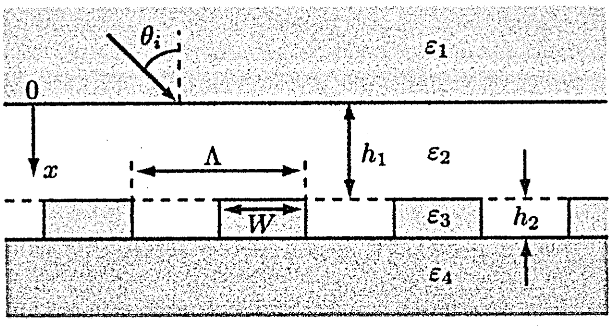
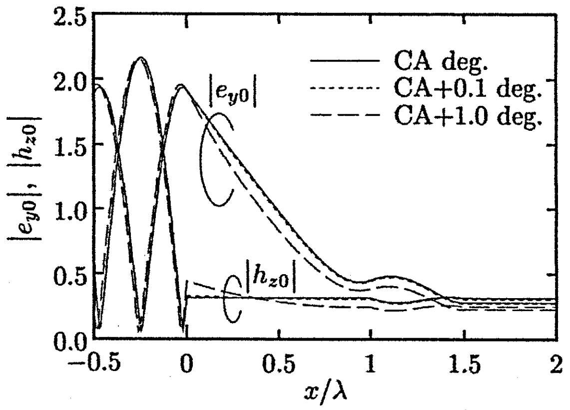
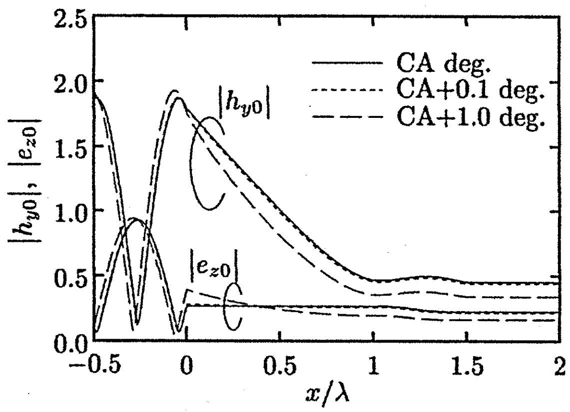


図 4　解析する誘電体格子の構造

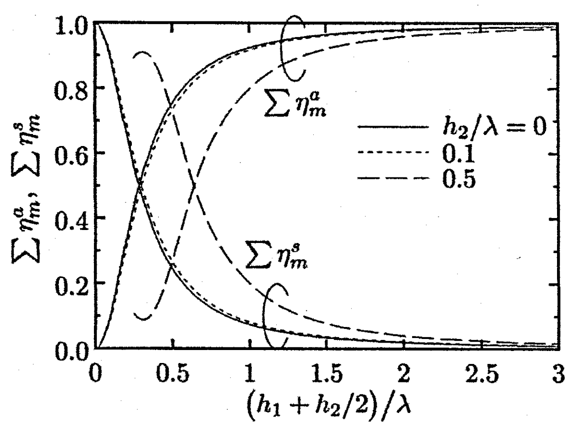


(a) TE-wave

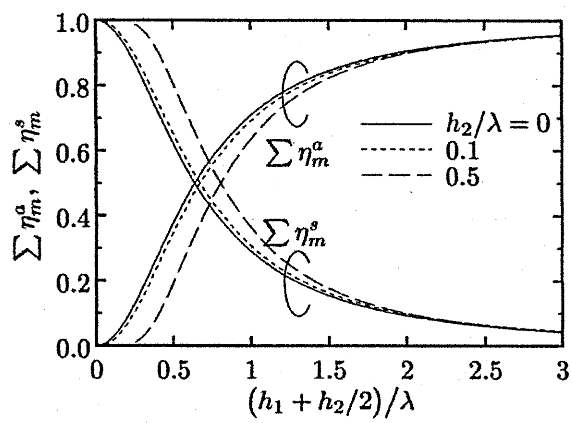


(b) TM-wave

図 5 x/λ に対する 0 次の電磁界分布
($\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 2.25$, $\varepsilon_2 = 1.0$, $h_1/\lambda = 1.0$, $h_2/\lambda = 0.5$, $W/\Lambda = 0.5$, $\Lambda/\lambda = 1.2$, $\theta_i = \sin^{-1}\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$, $M = 50$)



(a) TE-wave



(b) TM-wave

図 6 中間層の平均の厚さ $(h_1 + h_2/2)\ /\lambda$ に対する反射電力，透過電力の変化
($\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 2.25$, $\varepsilon_2 = 1.0$, $W/\Lambda = 0.5$, $\Lambda/\lambda = 1.2$, $\theta_i = \sin^{-1}\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$, $M = 50$)

次に，中間領域の平均の厚さ $(h_1 + h_2/2)\ /\lambda$ に対する反射電力 $\sum\eta_m^a$ と透過電力 $\sum\eta_m^s$ の変化を図 6 に示す．$h_2/\lambda = 0$, 0.1, 0.5 の場合を示している．図 (a), (b) は臨界角入射のそれぞれ，TE 波，TM 波の場合である．全ての領域の比誘電率は図 5 の場合と同じである．$h_2/\lambda = 0.1$ の場合の電力の変化は，$h_2/\lambda = 0$ つまり，周期が無い場合の変化とよく一致している．$h_2/\lambda = 0.1$ の場合は，特性に及ぼす影響が小さいためと考えられる．また，$(h_1 + h_2/2)/\lambda \geq 2$ では，トンネル効果による透過電力が小さくなっている様子がわかる [16]．

最後に，高次の固有値が縮退する場合において，本手法の妥当性を調べる．入射角として，$\theta_i = \sin^{-1}\left\{(\sqrt{\varepsilon_2} - n_k)/\sqrt{\varepsilon_1}\right\}$ を考える．この入射角では，中間領域において，1 次の固有値が 0 で縮退する．今，基板領域を Ag とし，波長 $\lambda = 0.6526\,\mu\mathrm{m}$ における比誘電率 $\varepsilon_4 = (0.14 - j\,4.15)^2$ とする [17]．図 7 は x/λ に対する 1 次の電磁界成分の分布である．なお，同図において，格子領域における値は，基板が金属であるため，次数を特定できない値である．図 5 と同様に，中間領域では，y 成分は x にほぼ比例し，z 成分は，ほぼ一定値となっている様子がわかる．中間領域において，1 次の反射波が，臨界角入射のトンネル効果による 0 次の波のように振る舞っている．$(h_1 + h_2/2)/\lambda$ に対する 1 次反射回

折効率の変化を図 8 に示す．$h_2/\lambda = 0.1$，0.5 の場合である．$(h_1 + h_2/2)/\lambda$ が大きくなると，1 次反射回折効率が小さくなり，この傾向は，図 6 と同じである．以上から，中間領域において，高次の固有値が縮退する場合においても，計算を実行できていることがわかる．

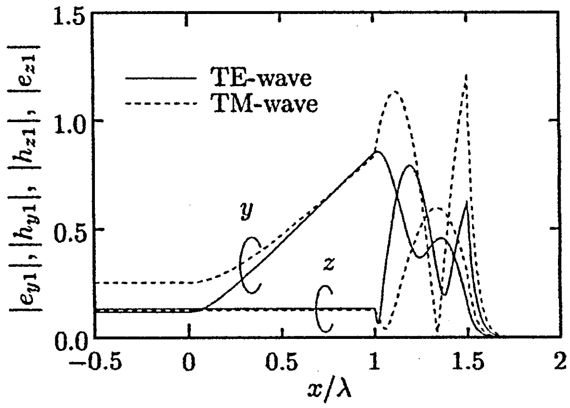


図 7　x/λ に対する 1 次の電磁界分布

$(\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 2.25$，$\varepsilon_2 = 1.0$，$\varepsilon_4 = (0.14 - j4.15)^2$，$h_1/\lambda = 1.0$，$h_2/\lambda = 0.5$，$W/\Lambda = 0.5$，$\Lambda/\lambda = 1.2$，$\theta_i = \sin^{-1}\{(\sqrt{\varepsilon_2} - n_k)/\sqrt{\varepsilon_1}\}$，$M = 50)$

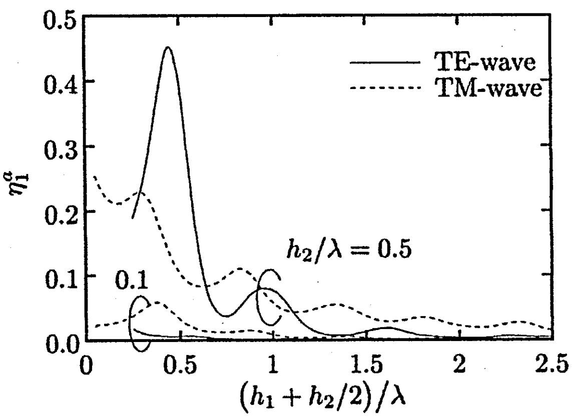


図 8　中間領域の平均の厚さ $(h_1 + h_2/2)\ /\lambda$ に対する 1 次反射回折効率 η_1^a の変化

$(\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 2.25$，$\varepsilon_2 = 1.0$，$\varepsilon_4 = (0.14 - j4.15)^2$，$W/\Lambda = 0.5$，$\Lambda/\lambda = 1.2$，$\theta_i = \sin^{-1}\{(\sqrt{\varepsilon_2} - n_k)/\sqrt{\varepsilon_1}\}$，$M = 50)$

6　むすび

本報告では，多層誘電体周期構造による散乱問題に対する行列固有値を用いた解析算法に影理論を適用し，その妥当性と，物理的解釈について述べた．また，多層誘電体周期構造の中間領域において，固有値が 0 で縮退する場合について，影理論を適用した新しい電磁界の表現式を提案した．

影理論における電磁界の表現式は変換行列 $[\boldsymbol{T}']$ と伝搬行列 $[\boldsymbol{P}'(x)]$ で構成され，これらは，従来の変換行列 $[\boldsymbol{T}]$ と伝搬行列 $[\boldsymbol{P}(x)]$ から簡単な変換操作によって得られることを示した．また，従来法では固有値が縮退する場合のみ，ジョルダン標準形への行列変換操作を行っていたが，本報告で提案した解析算法を用いれば，固有値の縮退・非縮退を意識すること無く，数値計算を実行できる．このことは，プ

ログラム実行者に数値計算に対する安心感を与えることができることにつながる．さらに，中間領域において，0 次だけでなく高次の固有値が縮退する場合について，数値計算を実行し，本報告における数式の定式化の妥当性を示した．

今後の課題は，影理論の真の価値を見い出せる応用例を検討するために，散乱因子とスペクトル領域のグリーン関数の関係を明らかにし，散乱因子を用いて，複数個の導電性ストリップを持つ複合誘電体格子に対する一解析算法を提案したい．

謝辞　影理論の提唱者である中山純一先生から多くのご教示を頂いたことに感謝の意を表する．

参考文献

(1) M. I. Charnotskii, "Wave scattering by periodic surface at low grazing angles : single grazing mode", Progress in electromagnetic Research, PIER 26, pp. 1–41, 2000.

(2) J. Nakayama, K. Hattori and Y. Tamura, "Diffraction amplitudes from periodic Neumann surface : Low grazing limit of incidence", IEICE Trans. Electron., Vol. E89-C, No. 5, pp. 642–644, 2006.

(3) J. Nakayama, K. Hattori and Y. Tamura, "Diffraction amplitudes from periodic Neumann surface : Low grazing limit of incidence(II)", IEICE Trans. Electron., Vol. E89-C, No. 9, pp. 1362–1364, 2006.

(4) J. Nakayama, K. Hattori and Y. Tamura, "Diffraction amplitudes from periodic Neumann surface : Low grazing limit of incidence(III)", IEICE Trans. Electron., Vol. E89-C, No. 2, pp. 536–538, 2007.

(5) J. Nakayama, "Shadow theory of diffraction gratings", IEICE Trans. Electron., Vol. E92-C, No. 1, pp. 17–24, 2009.

(6) J. Nakayama, "Shadow theory of diffraction grating : A numerical example for TE wave", IEICE Trans. Electron., Vol. E92-C, No. 3, pp. 370–373, 2009.

(7) R. Petit editing, Electromagnetic theory of gratings, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1980.

(8) K. Rokushima and J. Yamakita, "Analysis of anisotropic dielectric gratings", J. Opt. Soc. Am., Vol. 73, No. 7, pp. 901–908, 1983.

(9) 山崎恒樹，計算電磁気学，6 章，培風館，2003 年．

(10) R. Ozaki, T. Yamasaki and T. Hinata, "Scattering of electromagnetic waves by dielectric gratings with dielectric rectangular cylinders sandwiched between two multilayers", IEEJ Trans., FM., Vol. 129, No. 10, pp. 718–724, 2009.

(11) 若林秀昭，浅居正充，松本恵治，山北次郎，"影理論を用いた誘電体回折格子による散乱界表現"，電子情報通信学会論文誌 C，Vol. J93-C，No. 3，pp. 81–90，2010 年．

(12) 山北次郎，若林秀昭，松本恵治，浅居正充，"誘電体回折格子への影理論の適用について"，電気学会電磁界理論研究会資料，EMT-08-144，pp. 25–30，2008 年．

(13) 山北次郎，若林秀昭，松本恵治，浅居正充，"多層誘電体周期構造媒質による散乱界解析への影理論の応用"，電気学会電磁界理論研究会資料，EMT-09-119，pp. 103–108，2009 年．

(14) L. Li, "Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures", J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 13, No. 9, pp. 870–876, 1996.

(15) H. Wakabayashi and J. Yamakita, "Analysis of thickness-profiled gratings for oblique incidence using approximate modeling by plane gratings with surface resistance, Radio Science, Vol. 44, RS5009, 2009.

(16) 上崎省吾, 電波工学 第 2 版, p. 73, サイエンスハウス, 1991 年.

(17) Edward D. Palik, Handbook of optical constants of solids, Academic Press, 1997.

付録 A　係数行列の固有値と固有ベクトル

係数行列 $[C]$ に対して，固有値の 2 乗 $\{\xi_m^2\}$ を計算できるので，必ず，$\{\pm\xi_m\}$ が固有値となる．係数行列を $[C]$ を小行列 $[A_1]$，$[A_2]$ を用いて，

$$[C]=\begin{bmatrix}[0] & [A_1]\\ [A_2] & [0]\end{bmatrix} \tag{44}$$

のように表す．$[C]$ の固有値行列を $\overline{[\delta_{mn}\kappa_m]}$，固有ベクトル行列を $[T]$ とすれば，

$$[C][T]=[T]\overline{[\delta_{mn}\kappa_m]} \tag{45}$$

のように表される．ここで，$[T]$ を小行列を用いて表すと，

$$[T]=\begin{bmatrix}[T_1] & [T_1']\\ [T_2] & [T_2']\end{bmatrix} \tag{46}$$

のようになり，式 (45) は，

$$\begin{bmatrix}[0] & [A_1]\\ [A_2] & [0]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[T_1]\\ [T_2]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[T_1]\\ [T_2]\end{bmatrix}[\delta_{mn}\kappa_m],\qquad \begin{bmatrix}[0] & [A_1]\\ [A_2] & [0]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[T_1']\\ [T_2']\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[T_1']\\ [T_2']\end{bmatrix}[\delta_{mn}\kappa_m'] \tag{47}$$

となる．小行列だけを用いて演算すれば，

$$[A_1][A_2][T_1]=[A_1][T_2][\delta_{mn}\kappa_m]=[T_1][\delta_{mn}\kappa_m^2] \tag{48}$$

$$[A_2][A_1][T_2]=[A_2][T_1][\delta_{mn}\kappa_m]=[T_2][\delta_{mn}\kappa_m^2] \tag{49}$$

$$[A_1][A_2][T_1']=[A_1][T_2'][\delta_{mn}\kappa_m']=[T_1'][\delta_{mn}\kappa_m'^2] \tag{50}$$

$$[A_2][A_1][T_2']=[A_2][T_1'][\delta_{mn}\kappa_m']=[T_2'][\delta_{mn}\kappa_m'^2] \tag{51}$$

のようになるので，$\kappa_m^2=\kappa_m'^2=\xi_m^2$，$[T_1]=[T_1']$，$[T_2]=[T_2']$ となることがわかる．つまり，$[[A_1][A_2]]$ の対角化行列は $[T_1]$，$[[A_2][A_1]]$ の対角化行列は $[T_2]$ であり，両行列の固有値は共に，$\{\kappa_m^2\}$ である．$\kappa_m^2\neq 0$ であれば，全体の固有値行列 $\overline{[\delta_{mn}\kappa_m]}$ は，

$$\overline{[\delta_{mn}\kappa_m]}=\begin{bmatrix}[\delta_{mn}\kappa_m] & [0]\\ [0] & [\delta_{mn}\kappa_m']\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-[\delta_{mn}\xi_m] & [0]\\ [0] & [\delta_{mn}\xi_m]\end{bmatrix} \tag{52}$$

となり，対角化行列は，

$$[T]=\begin{bmatrix}-[A_2]^{-1}[T_2][\delta_{mn}\xi_m] & [A_2]^{-1}[T_2][\delta_{mn}\xi_m]\\ [T_2] & [T_2]\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}[A_1][T_2] & [A_1][T_2]\\ -[T_2][\delta_{mn}\xi_m] & [T_2][\delta_{mn}\xi_m]\end{bmatrix} \tag{53}$$

のように表される．ここで，記号 "⇒" は固有値ベクトルを適切に規格化したことを意味する．さらに，計算誤差の関係から，逆行列演算を含まないように，固有ベクトルを変形している．一般に，非可逆媒質以外の波動問題においては，係数行列 $[C]$ は全て，このタイプの行列である．また，本計算法を用いれば，$\kappa_m^2=0$ すなわち固有値が 0 で縮退しても固有ベクトル 1 つは必ず決定できる．

付録B　影理論における 2 × 2 固有ベクトル行列

電磁界の表現式 (25) を入射波領域に適用し，影理論の手法に従い，励振源を $g_{a0}^{+} = 1$ と $g_{a0}^{-} = -1$ の和に選べば，次式のように変形できる．

$$\begin{bmatrix} f_{y0}^{a}(x) \\ f_{z0}^{a}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{a0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\xi_0^a x} & 0 \\ 0 & e^{j\xi_0^a x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ g_{a0}^{-} \end{bmatrix} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\xi_0^a/\zeta_a \end{bmatrix} 1\, e^{-j\xi_0^a x} + \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_0^a/\zeta_a \end{bmatrix} g_{a0}^{-}\, e^{j\xi_0^a x} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\xi_0^a/\zeta_a \end{bmatrix} e^{-j\xi_0^a x} - \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_0^a/\zeta_a \end{bmatrix} e^{j\xi_0^a x} + \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_0^a/\zeta_a \end{bmatrix} \left(1 + g_{a0}^{-}\right) e^{j\xi_0^a x} \\ &= \begin{bmatrix} -2j\sin(\xi_0^a x) & e^{j\xi_0^a x} \\ -2(\xi_0^a/\zeta_a)\cos(\xi_0^a x) & (\xi_0^a/\zeta_a)e^{j\xi_0^a x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + g_{a0}^{-} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{55}$$

さらに，変換行列と伝搬行列の積として，次式のように表すことができる．

$$\begin{bmatrix} f_{y0}^{a}(x) \\ f_{z0}^{a}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/\zeta_a & \xi_0^a/\zeta_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\xi_0^a x} & 0 \\ j\dfrac{\sin(\xi_0^a x)}{\xi_0^a} & e^{j\xi_0^a x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\xi_0^a \\ M_{a0}^{-} \end{bmatrix} \tag{56}$$

発行　　財団法人　輻射科学研究会
連絡先　佐藤　亨
事務局　京都大学大学院情報学研究科通信情報システム専攻
〒606-8501　京都市左京区吉田本町