

2014年度

# 輻射科学研究会資料集

RS14-01~RS14-15

(June 2014~March 2015)

開催会場(月・日)

第1回：京都大学, 吉田キャンパス(6月16日)

RS14-01~RS14-04

第2回：大阪大学, 豊中キャンパス(8月27日)

RS14-05~RS14-07

第3回：大阪管区気象台(11月27日)

RS14-08

第4回：近畿大学, 本部キャンパス(12月22日)

RS14-09~RS14-11

第5回：大阪電気通信大学, 駅前キャンパス(3月26日)

RS14-12~RS14-15

2015年6月1日発行

## 2014年度 輻射科学研究会資料集目次

### ■ 第1回研究会

日時 平成26年6月16日(月) 13時30分～16時45分

会場 京都大学吉田キャンパス工学部3号館北館2階セミナー室  
京都市左京区吉田本町

- RS14-01 橋本大志、西村耕司、堤雅基、佐藤亨(京都大学)  
"Meteor Trail Echo Rejection in Atmospheric Phased Array Radars  
using Adaptive Sidelobe Cancellation" ..... 1
- RS14-02 今坂良平、阪本卓也、佐藤亨(京都大学)  
"UWB ドップラーレーダを用いた呼吸と心拍の同時推定法" ..... 12
- RS14-03 松本正行、西村亮(和歌山大学)  
"キャリア成分を含まない位相変調光信号からの光キャリア抽出" ..... 20
- RS14-04 酒井道、中村嘉浩、伊丹豪、西尾祐亮、岩井亮憲、木原直也(京都大学)  
"プラズマを構成要素とするマイクロ波メタマテリアルの展開" ..... 29

### ■ 第2回研究会

日時 平成26年8月27日(水) 13時30分～16時

会場 大阪大学豊中キャンパス基礎工学研究科J棟セミナー室  
大阪府豊中市待兼山町1-3

- RS14-05 前田祐人、塩見英久、岡村康行(大阪大学大学院)  
"電力回収機構を備えたアウトフェーズ型増幅器に関する一検討" ..... 41
- RS14-06 山本勝之、河合正、榎原晃(兵庫県立大学大学院)、川西哲也(情報通信研究機構)  
"LiNbO<sub>3</sub>基板上でのブランチラインカップラの小型化の検討と  
電気光学光SSB変調素子への応用" ..... 60
- RS14-07 若林秀昭\*、浅居正充\*\*、松本恵治\*\*\*、山北次郎\*  
(\*岡山県立大学、\*\*近畿大学、\*\*\*大阪産業大学)  
"全領域に影理論を適用した多層誘電体格子の斜め入射波散乱解析" ..... 80

■ 第3回研究会・大阪管区気象台見学会

日時 平成26年11月27日(木) 13時30分～15時30分

会場 大阪管区気象台

大阪市中央区大手前4-1-76 大阪合同庁舎第4号館

RS14-08 金森祥一(大阪管区気象台)

“大阪管区気象台における気象・地震観測及びデータ処理手法について” ..... 91

■ 第4回研究会

日時 平成26年12月22日(月) 14時～16時30分

会場 近畿大学本部キャンパス プロッサムカフェ3階 ルームA

大阪府東大阪市小若江3-4-1

RS14-09 菅原賢悟(近畿大学)

“有限要素法解析における開領域解法” ..... 92

RS14-10 浅居正充(近畿大学), 若林秀昭, 山北次郎(岡山県立大学)

“準等方性キラル粒子の周期配列に対する等価媒質特性” ..... 110

RS14-11 菊池博史, 田島拓朗, 商進, 呉亭, 金寛, 牛尾知雄(大阪大学),

後藤秀人, 水谷文彦(東芝)

“気象用2重偏波フェーズドアレイレーダにおけるMMSE法の適用と実用化”

..... 115

■ 第5回研究会

日時 平成27年3月26日(木) 13時30分～16時45分

会場 大阪電気通信大学駅前キャンパス

大阪府寝屋川市早子町12-16

RS14-12 Fatemeh ABRISHAMIAN, 森下 克己(大阪電気通信大学)

“Multi- and Single-Channel Bandpass Filters Composed of Two

Long-Period Fiber Gratings and High Attenuation Fiber” ..... 128

RS14-13 田村安彦(京都工芸繊維大学大学院), 中山純一(京都工芸繊維大学名誉教授)

“周期境界を持つ二層一様媒質での平面波散乱回折理論(I)

RS14-14 田村安彦(京都工芸繊維大学大学院)

“周期境界を持つ二層一様媒質での平面波散乱回折理論(II)

— 連立イメージ積分方程式の数値解析 —”

} 135

RS14-15 岡本啓汰, 岸岡清(大阪電気通信大学)

“フォノンニック結晶内を伝搬する弾性波の特性

— 導波路への応用を目指して —” ..... 174

輻射科学研究会資料

RS14-01

# Meteor Trail Echo Rejection in Atmospheric Phased Array Radars using Adaptive Sidelobe Cancellation

橋本 大志

京都大学大学院情報学研究科

2014年6月16日

於 京都大学

# Meteor Trail Echo Rejection in Atmospheric Phased Array Radars using Adaptive Sidelobe Cancellation

TAISHI HASHIMOTO, \*

*Department of Communications and Computer Engineering, Kyoto University, Kyoto, Japan.*

KOJI NISHIMURA,

*National Institute of Polar Research, Tachikawa, Japan*

MASAKI TSUTSUMI,

*National Institute of Polar Research, Tachikawa, Japan*

AND TORU SATO

*Department of Communications and Computer Engineering, Kyoto University, Kyoto, Japan.*

## ABSTRACT

Strong meteor trail echoes are interferences in the wind velocity estimates made from mesosphere radar observations. Contaminated spectra are detected by their discontinuity and are removed at the risk of greater fluctuations of spectra, leading to a severe reduction of the signal-to-noise ratio (SNR) and inaccurate wind estimates for weak atmospheric echoes. This paper presents an adaptive signal processing technique for the suppression of spectral contaminations by meteor trail echoes. The method is based on the norm-constrained and directionally-constrained minimization of power (NC-DCMP), which balances the capability of canceling the clutter and the robustness of beam shaping, at the cost of a slight decrease in the SNR, which can be determined in advance. Simulation results show that with a 3 dB decrease of the SNR being allowed, the method improves the signal-to-interference ratio (SIR) by 15 dB, giving wind estimates that are about  $8 \text{ m s}^{-1}$  better in terms of root-mean-square error and providing four times as wide an observable range when compared with the results of the ordinary non-adaptive beamforming method. The results for an actual observation show that the improvement of both the SIR and the observable range are achieved as in the simulations, which implies that the method should provide the simulated accuracy for the estimation of wind velocity from actual observations.

## 1. Introduction

In observations of mesosphere wind employing Doppler radars, strong meteor echoes often contaminate spectra as shown in Fig. 1. Usually, these spectra with meteor echoes are automatically detected by their discontinuity in time and height and are discarded before the incoherent integration and wind velocity estimation are made (Tsuda et al. 1985). However, only outstanding echoes can be removed employing this method. Additionally, decreasing the number of spectra for incoherent integration increases the fluctuations of spectra, which introduces estimation errors of the wind velocity of weak mesosphere echoes.

This paper presents an adaptive signal processing technique for reducing interferences from meteor trail echoes in mesosphere wind observations. The basic method has been shown to be a good solution for the rejection of interference from the ground (Kamio et al. 2004) and accurate estimation of the vertical wind velocity (Nishimura et al. 2012). However, this is not the case for rapidly moving objects

such as aircraft. Meteor trail echoes are also moving objects and have strong echo intensity, but they are relatively slow and the method works well for them.

The contents of this paper are as follows. In section 2, the theory and implementation of the method are stated. Section 3 explains the simulation model and gives the result of applying the adaptive meteor clutter rejection technique to the model. In Section 4, we apply the method to an actual observation and show the result. Section 5 summarizes the proposed method and gives conclusions.

## 2. Methods and implementations

In this section, adaptive signal processing methods and their implementations are stated.

### a. Directionally constrained minimization of power

The directionally constrained minimization of power (DCMP) algorithm is one of an adaptive beamforming algorithms for the special case of known desired directions.

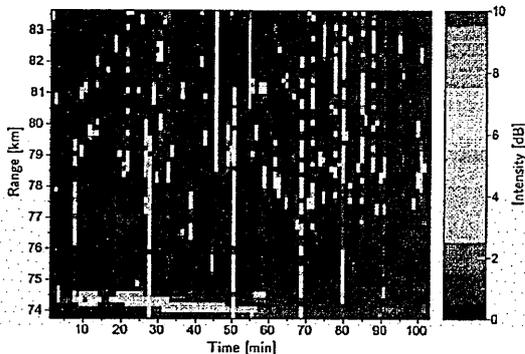


FIG. 1. An example of range-time-intensity plot of mesosphere region observed by the MU radar on October 8 th, 2011. The horizontal axis is time (min), the vertical axis is ranges (km), and contours indicate the echo power (dB).

According to Takao et al. (1976), the basic theory of DCMP is written as a non-linear optimization problem:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{W}} \left( P_{\text{out}} = \frac{1}{2} \mathbf{W}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W} \right) \\ \text{subject to } \mathbf{C}^T \mathbf{W}^* = \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $(\cdot)^*$  denotes the complex conjugate,  $(\cdot)^T$  for the transposition and  $(\cdot)^H$  for the adjoint (conjugate transpose) matrix. Assuming  $M$  receivers,  $\mathbf{R}_{xx} \equiv \mathbf{X}\mathbf{X}^H$  is the covariance matrix of the received signals  $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_M]^T$  and  $\mathbf{W}$  is the optimal weight vector.  $\mathbf{C}$  is called the directional constraint, which is a function of the geometric location of each receiver  $\mathbf{L}_i (i = 1, \dots, M)$  and the desired direction (zenith, azimuth)  $(\theta, \phi)$ . Using an array manifold function  $\mathbf{A}(\theta, \phi)$ ,  $\mathbf{C}_i$  can be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i &= A_i(\theta, \phi) = \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{V}\right) \\ \mathbf{V} &= [\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta]^T. \end{aligned} \quad (2)$$

$\lambda$  is the radar wave length and  $H$  is called the constraint response against each corresponding  $\mathbf{C}$ .  $H$  takes a value from 0 to 1 and determines the null depth or the peak height of the beam pattern in the specific direction defined by  $\mathbf{C}$ .  $\mathbf{V}$  is a unit vector to the radial direction  $(\theta, \phi)$ . The combined outputs of beam synthesis  $Y$  is obtained by

$$Y = \mathbf{W}^H \mathbf{X}. \quad (3)$$

#### b. Norm-constrained DCMP

The norm-constrained DCMP (NC-DCMP) has an additional constraint of the magnitude of the norm of  $\mathbf{W}$  in

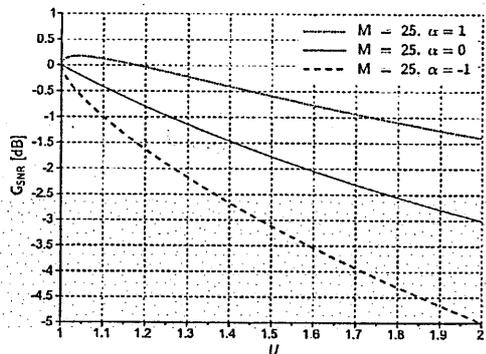


FIG. 2. Relationship between norm constraint  $U$  and SNR loss  $G_{\text{SNR}}$  in the 25-channel radar system assuming the MU radar. The abscissa is the norm constraint  $U$  and the ordinate is the SNR loss  $G_{\text{SNR}}$ . Each line corresponds to a different phase rotation:  $\alpha = 1$  (in-phase; upper line),  $\alpha = -1$  (opposite-phase; lower line) and  $\alpha = 0$  (intermediate; center line). We use the center line for deciding norm constraint  $U$ .

Eq. (1):

$$\mathbf{W}^H \mathbf{W} \leq U. \quad (4)$$

Here,  $U$  is the norm constraint that preserves the shape of the main lobe even when only an incorrect steering vector is available.

For the NC-DCMP algorithm, one can determine  $U$  from the permissive loss in the signal-to-noise ratio (SNR). The relationship between the SNR loss  $G_{\text{SNR}}$  and the norm constraint  $U$  is described in Kamio et al. (2004):

$$G_{\text{SNR}} = \frac{(1 + \alpha \sqrt{U/(M-1)})^2}{1 + U}, \quad (5)$$

where  $\alpha$  takes a value from -1 to 1 and represents the phase rotational relation between each channel.  $\alpha = 1$  means an in-phase relation, which is obtained employing the ideal beamforming method without availability of clutter rejection.  $\alpha = -1$  means an opposite-phase relation, which is the worst case suppressing the desired signals.  $\alpha = 0$  is intermediate of these two cases and used to decide the norm constraint  $U$  in later sections. Figure 2 is an example of plotting Eq. (5) at each  $\alpha = -1, 0, 1$  for  $M = 25$ , which corresponds to the number of channels of the MU radar.

#### c. Norm-constrained tamed adaptive antenna

As mentioned above, NC-DCMP requires the solving of a nonlinear optimization problem with an inequality constraint, which severely increases the calculation cost. However, according to Wang et al. (2003), the norm  $\mathbf{W}^H \mathbf{W}$  is

known to decrease monotonically as  $\beta$  increases and in the special case of the equality of Eq. (4) being satisfied, the solution can be easily obtained as

$$\mathbf{W} = \frac{\hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{C}}{\mathbf{C}^H \hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{C}} \mathbf{H}^* \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} \equiv \mathbf{R}_{xx} + \beta \mathbf{I},$$

where  $\mathbf{I}$  is a unit matrix and  $\beta > 0$  represents the magnitude of the pseudo noise added to the covariance matrix. The solution in Eq. (6) is exactly the same as the optimal weight vector of the tamed adaptive antenna array mentioned in Takao and Kikuma (1986), but  $\beta$  cannot be obtained directly.  $\beta$  is thus determined as follows.

- i. Estimate the boundary of the norm constraint  $U$  from the permissive SNR loss  $G_{\text{SNR}}$  using Eq. (5).
- ii. Set  $\beta = 0$  and calculate  $\mathbf{W}_{\beta=0}$ . If Eq. (4) is already satisfied by  $\mathbf{W}_{\beta=0}$ , this solution is optimal. Otherwise, continue to the next.
- iii. Find the minimum  $\beta$  that satisfies the equality condition of Eq. (4). This can be effectively calculated employing a one-dimensional root-finding algorithm such as Newton's method.

We call this method, which is an effective way to calculate the optimal weight of NC-DCMP, the norm-constrained tamed adaptive (NC-TA) method in later sections. Depending on the selection of  $U$ , the NC-TA method may fail in finding the optimal weight vector  $\mathbf{W}$ . Thus in practice, one can start this routine with small  $U$  and then iterate by increasing  $G_{\text{SNR}}$ .

### 3. Simulation of adaptive meteor clutter rejection

In this section, we show the result of simulations of the adaptive meteor clutter rejection technique for mesospheric radar observations.

#### a. Generating simulation data of atmospheric and meteor echoes

In this simulation, each spectrum contains two kinds of echoes, atmospheric and meteor echoes. In the following subsections, detailed procedures of generating atmospheric and meteor echoes are stated.

##### 1) ATMOSPHERIC ECHOES

Power spectra of atmospheric echoes returned by backscattering from turbulences are modeled by a Gaussian function as follows (Yamamoto et al. 1988).

$$S_m(v) = \frac{P_S}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(v - v_d)^2}{2\sigma^2}\right] + P_N, \quad (7)$$

where  $v$  is the radial wind velocity,  $P_S$  is the echo intensity of the atmospheric echo,  $P_N$  is the noise floor level,  $v_d$  is the mean Doppler velocity of the wind, and  $\sigma$  is the spectral width. Additionally, the time series of complex outputs at each receiver has random fluctuations following a Gaussian distribution for both real and imaginary components. This results in the model spectrum having the statistical fluctuation following a  $\chi^2$  distribution with two degrees of freedom, because the power spectra are the squared sum of complex received signals. The model spectrum with these fluctuations,  $S'_m(v)$ , can now be obtained as the product of  $S_m(v)$  and random numbers following a  $\chi^2$  distribution with two degrees of freedom.

For the adaptive signal processing, we need complex outputs at each receiver  $s_i(t)$  ( $i = 1, \dots, M$  where  $M$  is the number of receivers). To reproduce these from  $S'_m(v)$ , we can use the inverse Fourier transform and the array manifold, which is stated in the previous section. First, we perform the inverse Fourier transform to obtain the basic complex outputs at the phase origin,  $s_o(t)$ , which is a time series:

$$s_o(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \sqrt{S'_m(v)} \angle \rho(v) \right], \quad (8)$$

where  $A \angle B$  represents a complex number with its amplitude  $A$  and phase  $B$ ,  $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$  stands for the inverse Fourier transform and  $\rho(v)$  is a uniform random-number generator having a range of  $[0, 2\pi]$ . As shown by Eq. (8), amplitudes are set to the square root of  $S'_m(v)$  and phases are assumed to be uniform random variables in the range of  $[0, 2\pi]$ . A time series at each receiver  $s_i$  can then be calculated by rotating phases of  $s_o(t)$  by using the array manifold Eq. (2),

$$s_i(t) = A_i(\theta, \phi) s_o(t), \quad (9)$$

where  $(\theta, \phi)$  is the desired direction of the radar system.

##### 2) METEOR ECHOES

Meteor trail echoes are returned from ionized electrons left along the paths of meteoroids. These trails usually remain at most a second with 50 MHz and provide strong backscattering. For example, the echo power from these trails may reach 80 dB over the noise level (McKinley 1961). In radar observations of the mesosphere, successive spectra are usually averaged to reduce statistical fluctuations. This procedure is called incoherent integration. Although these meteor trails fade out in less than a second, their strong intensity contaminates the spectra severely even after the incoherent integration.

In this simulation, a meteor trail echo is modeled as a backscattering from a linearly shaped hard target with exponentially decreasing echo power that is moved by the background wind; i.e. underdense meteor trail. Phases of the meteor echo  $p_i(t)$  can be calculated from the distance to each receiver,  $d_i(t)$ . Amplitudes are the square root of

the meteor echo power  $P_M(t)$ , which is known to decay exponentially as

$$P_M(t) = P_M(0) \exp \left[ -\frac{32\pi^2 D t}{\lambda^2} \right], \quad (10)$$

where  $D$  is the ambipolar diffusion coefficient (Cepiccha et al. 1998). We use  $D \sim 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  at 90 km. Consequently the time series of meteor trail echoes  $s_i(t)$  can be obtained as

$$s_i = P_M(t) \exp ip_i(t) \quad (11)$$

### 3) SIGNAL PROCESSING

After generating received signals for both atmospheric and meteor echoes, we add them together and obtain the complex time series

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)]^T \quad (12)$$

for each channel. The covariance matrix  $R_{xx}$  for sample number  $k_t$  is generated and updated using the following set of expressions.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx}(0) &= \mathbf{s}(0)\mathbf{s}^H(0) \\ \mathbf{R}_{xx}(k_t) &= \gamma \mathbf{R}_{xx}(k_t - 1) \\ &+ (1 - \gamma) \mathbf{s}(k_t) \mathbf{s}^H(k_t), \end{aligned} \quad (13)$$

where  $k_t = 1, 2, \dots$  and  $0 \leq \gamma < 1$  is the forgetting factor. In this simulation, we use  $\gamma = 0.995$ , which is the equivalent of accumulating received signals of about 1500 samples to obtain one covariance matrix. The time series of received signals  $\mathbf{s}(t)$  is synthesized employing two methods to make a comparison, the NC-TA method and non-adaptive beamforming (NA-BF) method. For each renewal of the covariance matrix, an optimal weight vector  $\mathbf{W}(t)$  is calculated using Eq. (6) for the NC-TA method, with  $\alpha = 0$  and  $M = 25$ . The permissive SNR loss  $G_{\text{SNR}}$  is set as an increasing sequence of five equal intervals in the range from 0.5 to 3 dB. For the NA-BF method,  $\mathbf{W}(t) = \mathbf{A}(\theta, \phi)$  using an array manifold. The desired direction  $(\theta, \phi)$  is set to  $(0^\circ, 0^\circ)$ . The beam synthesis of the received signals using the weight vector  $\mathbf{W}$  is performed through Eq. (3).

### 4) INCOHERENT INTEGRATION

After the beam synthesis of the received signals and calculation of spectra, we perform incoherent integration by accumulating  $N_i$  successive spectra. The fluctuation of amplitudes is expected to be reduced to  $1/\sqrt{N_i}$  in this manner. In practice, spectra with strong meteor clutters should be removed from the integration. We set a threshold  $B_t$  as +3.5 dB over the peak power of atmospheric echo  $P_S$  for deciding which spectrum contains a clutter and should be discarded. In this simulation, the peak power of an atmospheric echo is known; e.g., +1.0 dB over the noise

TABLE 1. Radar system settings for the simulation based on standard mesospheric observations of the MU radar.

IPP	3120 $\mu\text{s}$
Time resolution	3.12 ms
Range resolution	900 m
Ranges	75 – 127 km
No. of time samples $N_v$	128
No. of range samples $N_r$	59
No. of incoherent integration $N_i$	38
No. of total records $N_R$	100

level. The probability of random fluctuations being at least +3.5 dB over the actual peak power, e.g. +13.5 dB over the noise level in this case, is less than 5% in the  $\chi^2$  distribution with two degrees of freedom. Any peak over  $B_t$  is thus assumed to be a clutter.

#### b. Wind velocity estimation employing the least-squares fitting method

After the incoherent integration, we estimate the mean wind velocities  $v_d$  from the averaged spectra employing the least-squares fitting method (Yamamoto et al. 1988). This method fits a Gaussian spectrum  $\hat{S}(k_v; P_S, v_d, \sigma)$  to the simulated observed spectrum  $S'_m(k_v)$  such that the root-mean-square (RMS) of the residue

$$\epsilon = \sqrt{\frac{1}{k_v} \sum_{k_v} [\hat{S}(k_v; P_S, v_d, \sigma) - S'_m(k_v) - P_N]^2} \quad (14)$$

is minimized by changing parameters  $P_S$ ,  $v_d$  and  $\sigma$ . Here,  $k_v$  is the discrete sample number of frequency components. Note that the noise level of the observed spectrum  $P_N$  must be obtained in advance employing other methods (Hildebrand and Sekhon 1974; Woodman 1985).

#### c. Simulation settings

##### 1) RADAR SYSTEM

The target radar system is based on the MU radar at Shigaraki MU Observatory, Japan. Figure 3 shows the antenna position and the group number of the MU radar. The MU radar has 475 crossed Yagi antennas and the signals received from each of the 19 receivers are combined into one channel, forming an adaptive antenna with 25 channels. The radar frequency is 46.5 MHz. Observational parameters are listed in Table 1. Note that using  $N_i = 38$  successive spectra for incoherent integration is equivalent to averaging over about 1 minute.

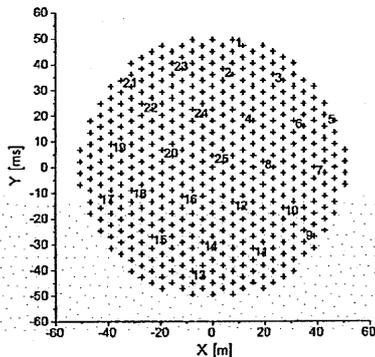


FIG. 3. Antenna position and channel number assignment for the simulation based on the MU radar.

## 2) EXPERIMENTAL PARAMETERS

We conduct two types of simulations. First, assuming an arbitrary range with both atmospheric and meteor echoes observed, we vary the SNR of the atmospheric echoes and calculate the RMS error of the wind velocity estimation at each SNR. We call this "simulation 1". In this simulation, we set the meteor clutter to have echo intensity of +15 dB over the noise level, and consider a radial velocity of +5 m s<sup>-1</sup>. Appearance rate of meteor echoes is 100 %, i.e. each spectrum contains a meteor echo. Note this is not a realistic setting about the number of meteor trails, but this simulation is intended to test the maximum capability of the method and the more realistic situation is given to simulation 2. The SNR of the atmospheric echo is changed from 0 to +30 dB over the noise level, in steps of 5 dB. The signal-to-interference ratio (SIR) is then moved from -15 to +15 dB. We run this simulation 100 times to obtain the averaged RMS error of the wind velocity estimations. The thresholding of the contaminated spectra stated in section 3.a.4 is not used in simulation 1.

Second, we apply the same procedure to multiple ranges and records assuming actual mesosphere observations. We call this "simulation 2". Again, we generate  $N_R = 100$  successive records of simulation data and average the results. The thresholding of the spectra is introduced in this simulation to conform to the actual observations. We also consider several additional variabilities. Appearance rate of meteor echoes is 33 %, i.e. one-third of all spectra contain a meteor echo. The height distribution of meteor trails has a Gaussian-like form, and has a maximum at about 90 km, as stated in Nakamura et al. (1991) for example. We therefore simulate the range of each meteor using a random variable that follows a Gaussian distribution with mean of 90 km and standard deviation of 6.7 km. For the atmospheric echoes, decays of the echo power  $P_S$  with range

TABLE 2. Parameters for generating atmospheric echoes in simulation 2.

Decay factor for ranges $D_S$	-3 dB km <sup>-1</sup> = 0.5
Range at the maximum power $r_m$	78 km
Maximum echo power $P_S^0 = P_S(r_m)$	15 dB
Spectral width	1 m s <sup>-1</sup>
Amplitude of the gravity wave $v_g$	5 m s <sup>-1</sup>
Wave period of the gravity wave $T_g$	33 min

TABLE 3. Parameters for generating meteor echoes in simulation 2.

Mean of power dist. $P_0$	20 dB
Standard deviation of power dist. $\sigma_P$	2.5 dB
Mean of range dist.	90 km
Standard deviation of range dist.	6.7 km
Appearance rate	33 %
Radial velocity	0 - 25 m s <sup>-1</sup>
Diffusion coefficient $D$	1.0 m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
Orientation	Uniformly random

from the radar and the cyclic variations of the mean wind velocity  $v_d$  assuming a gravity wave are introduced:

$$P_S(r) = P_S^0 D_S^{|r-r_m|} \quad (15)$$

$$v_d(t) = v_d(0) + v_g \sin\left(\frac{2\pi}{T_g} t\right), \quad (16)$$

where  $r_m$  is the range having maximum echo power,  $D_S$  is the decay factor for echo power and  $v_g$  and  $T_g$  are the amplitude and wave period of the gravity wave, respectively.

Tables 2 and 3 give the detailed parameters for generating atmospheric and meteor echoes in simulation 2. Note that decibel values are against the noise level.

### d. Results

Figure 4 is an example of the spectra generated in simulation 1. The horizontal axis is the Doppler velocity (m s<sup>-1</sup>) and the vertical axis is the echo intensity (dB). In this case, the SNR of the atmospheric echo is set to +10 dB. The results of wind velocity estimation are also marked. Figure 5 is the RMS error in the Doppler velocity estimations for each SIR averaged 100 times, obtained employing the NA-BF method and the NC-TA method. The horizontal axis is the SIR we tested from -15 to 15 dB, and the vertical axis is the RMS error at each SIR.

Next, Fig. 6 shows the relationship between the accuracy of wind velocity estimations and the echo intensities of the desired or undesired signals for each beam synthesis method. The left panel of Fig. 6 shows the averaged RMS error of the estimated wind velocity in simulation 2. The horizontal axis is the RMS error of the estimated Doppler velocity (m s<sup>-1</sup>). The right panel shows the maximum echo intensity of the atmospheric and meteor echoes

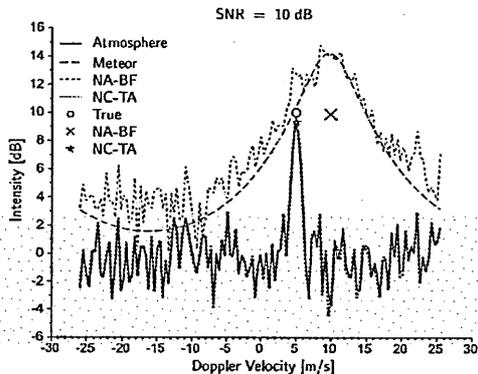


FIG. 4. Example of the spectra generated in simulation 1. The SNR of the atmospheric echo is +10 dB. Lines are the spectra of the atmosphere only, meteor only, and the synthesized spectra of the NA-BF method and the NC-TA method. Marks show the actual peak powers and Doppler velocities and the peak powers and Doppler velocities estimated employing the NA-BF method and the NC-TA method.

averaged in simulation 2. Here, the atmospheric echo has peak power around 78 km, while the intensity of meteor echoes increases with range. The vertical axes of the two panels have units of kilometers. Figure 7, 8 and 9 are the time height section of the estimated wind velocity by NA-BF without meteors, NA-BF and NC-TA with meteors, respectively. The horizontal axes are time (min), the vertical axes are range (km) and the colors indicate the estimated wind velocity (m/s).

### c. Discussion

In simulation 1, all spectra are used without thresholding. In such a case, the adaptive meteor clutter rejection technique is found to improve the accuracy of the wind velocity estimations especially when the interference is stronger than or almost equal to the atmospheric echoes. As seen in Fig. 4, the meteor clutter is suppressed well by the NC-TA method. Thus, wind velocities are estimated near the true peak by the NC-TA method, while the NA-BF method gives wrong values contaminated by meteor clutters. Consequently, Fig. 5 shows that with SIRs under 0 dB, like in Fig. 4, the echo intensity of meteor clutters is stronger than that of atmospheric echoes and the NA-BF method gives incorrect estimations of wind velocity because of the interference. As a result, the observable echo intensity improves by about 15 dB when employing the NC-TA method. In addition, we should mention that meteor trail echoes can be extracted employing the same method if needed, by simply subtracting the obtained

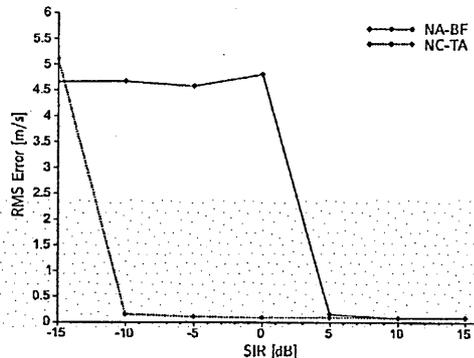


FIG. 5. RMS error of wind velocity estimated with the NA-BF method and NC-TA method. The horizontal axis is the SIR and the vertical axis is the RMS error between the true velocity and the estimated velocity.

meteor-suppressed signals from the original received ones.

In simulation 2, strong interference is suppressed by spectral thresholding. Employing this procedure, the initial guess of the peak search is made accurate to some extent by discarding contaminated spectra in incoherent integration, while fewer spectra result in more fluctuation in the integrated spectra, which can bring low accuracy. Additionally, interferences below the threshold remain with no change with the NA-BF method, and this leads to an increase in the RMS error in the spectral fitting for the NA-BF method. On the contrary, the NC-TA method suppresses interferences automatically in advance, and improves both the number of spectra discarded in incoherent integration and the RMS error in the spectral fitting. These trends are clearly shown in Fig. 6. Here, the NC-TA method discards only 1.3 % of spectra, while 10.9 % with the NA-BF method. The average RMS errors at 78 km are  $1.5 \text{ m s}^{-1}$  for the NC-TA method and  $10.1 \text{ m s}^{-1}$  for the NA-BF method. As seen in Fig. 6 (b), the average SIR of simulation 2 is at most -10 dB at 78 km. Figure 5 shows that even the NC-TA method give low accuracy with the SIR under -10 dB and thus the result is consistent with simulation 1. At higher ranges, where there are more meteor echoes, the accuracy of the estimated wind velocity is low for both methods, but the error is about  $8 \text{ m s}^{-1}$  less for the NC-TA method. Additionally, the RMS error has a flat floor from 76 to 78 km with the NC-TA method, which is about four times as wide as that with the NA-BF method. This is the benefit of the adaptive clutter rejection technique and implies the effectiveness of the technique in mesosphere observations. Also comparing Fig. 7, 8 and 9, the oscillation of the wind velocity along time is well reproduced by the NC-TA method, and these

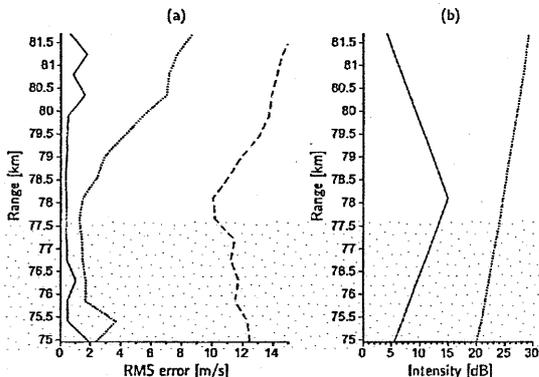


FIG. 6. (a) RMS errors of the wind velocity estimations of the NA-BF method and NC-TA method. The ordinate has a unit of kilometers. (b) Intensities of the atmospheric and meteor echoes for each range.

TABLE 4. Radar system settings for the observation made by the MU radar on 14:05 to 15:46 (UT), October 8 th, 2011.

IPP	3120 $\mu$ s
Time resolution	3.12 ms
Range resolution	900m
Valid ranges	75 – 127 km
No. of time samples $N_v$	512
No. of range samples $N_r$	59
No. of incoherent integration $N_i$	38
No. of total records $N_R$	100

results reinforce the discussion above.

#### 4. Applying the adaptive meteor clutter rejection technique to an actual observation

This section presents results of applying the adaptive meteor clutter rejection technique to actual mesospheric observations.

##### a. Observational settings of the radar system

A series of meteor observations was made on October 8 th, 2011 at Shigaraki MU Observatory, Japan. We use  $N_R = 100$  successive records taken from 14:05 to 15:46. The observational parameters are listed in Table 4. As done in simulation 2 of section 3, the time resolution of the adaptive beam synthesis is 3.12 ms. After the clutter cancellation,  $N_i = 38$  successive spectra are used for incoherent integration to obtain each record, which is equivalent to averaging over about 1 minute.

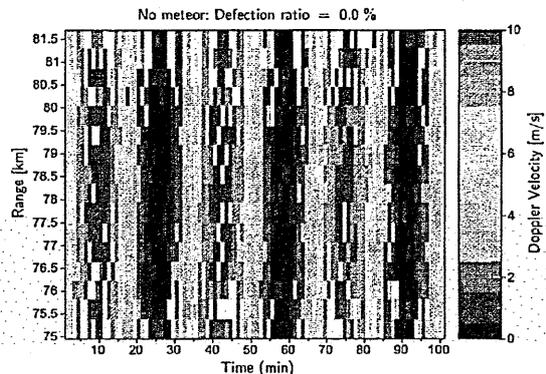


FIG. 7. Estimated wind velocity by the NA-BF method in Simulation 2 under the condition without meteor trail echoes. The horizontal axis is time (min), the vertical axis is ranges (km), and contours indicate the wind velocity (m/s).

##### b. Signal processing

We apply the NA-BF method and the NC-TA method to the same observed data sequence to compare the ability of the two methods to suppress clutter. Procedures of the signal processing are exactly the same as those described in section 3. Additionally, thresholding and accumulation of spectra are performed as in the previous section. However, the threshold  $B_t$  for removing contaminated spectra is unknown for the actual observation, and we determine it as follows. First, we perform adaptive beam synthesis on all received signals employing the NA-BF method and the NC-TA method, and then convert them into spectra by taking the Fourier transform to obtain synthesized spectra  $S(k_T, k_v)$ , where  $k_T = 1, \dots, N_i \times N_R$  is the spectrum index and  $k_v = 1, \dots, N_v$  is the frequency component index. We then take the frequency-wise sum of  $S(k_T, k_v)$  as

$$\hat{S}(k_T) = \sum_{k_v=1}^{N_v} S(k_T, k_v). \quad (17)$$

Finally, we choose the threshold  $B_t$  to satisfy the relation

$$p[\hat{S}(k_T) > B_t] \leq 5\%. \quad (18)$$

at ranges of 74–80 km. Here,  $p[\hat{S}(k_T) > B_t]$  is the probability of peaks in  $\hat{S}(k_T)$  being larger than the current threshold  $B_t$ . The objective of the Eq. (18) is to make the number of discarded spectra the same as the number in the simulation of the previous section. To compute  $B_t$ , we iteratively enlarge  $B_t$  to find the minimum value that satisfies Eq. (18). The overlaid spectral peaks are shown in Fig. 10 and 11 for the NA-BF method and the NC-TA methods, respectively. The horizontal axis is the peak

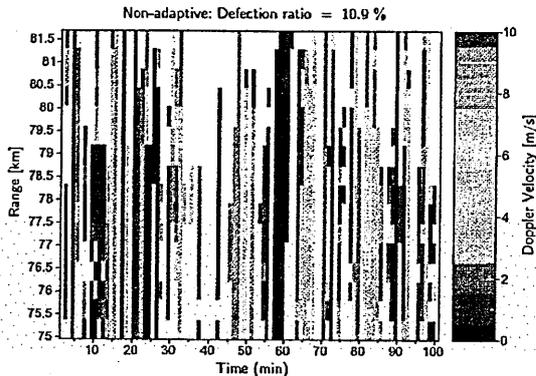


FIG. 8. Same as Fig. 7 except for the existence of meteor trails.

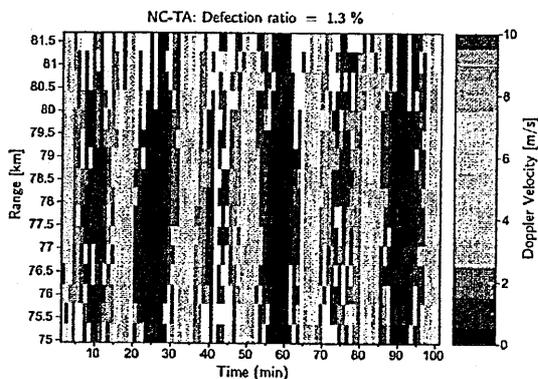


FIG. 9. Same as Fig. 8 but estimated by the NC-TA method.

power for each range (dB) and the vertical axis is the range (km). Dashed lines are the threshold  $B_t$  for the spectra of processed employing the two methods.

### c. Results

Table 5 gives the threshold  $B_t$  we selected for removing spectra with contaminations, the defection ratio  $\Phi_D$  in incoherent integration, and the equivalent number of incoherent integration  $\eta$ . Figure 12 shows the average errors of wind velocity estimation versus the range (74 – 84 km) estimated from spectra processed with the NA-BF method and the NC-TA method. Thin lines are biased by the standard deviation  $\sigma$  for each range.

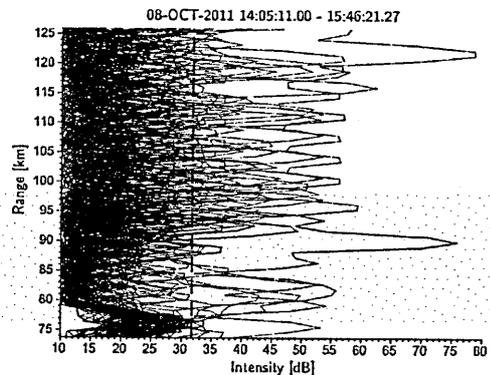


FIG. 10. Peaks of spectra processed by the NA-BF method for each range overlaid throughout the observation period on October 8 th, 2011. The horizontal axis is the peak power for each range (dB) and the vertical axis is the range (km). The dashed line is the threshold  $B_t$  we selected.

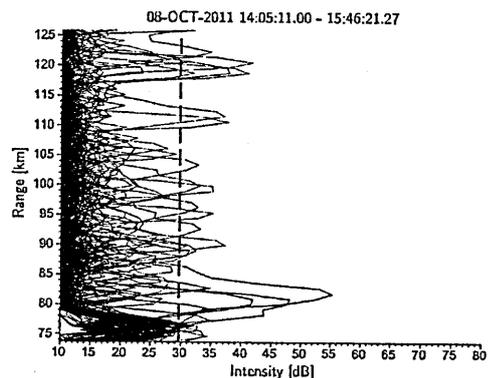


FIG. 11. Same as figure 10 but processed with the NC-TA method.

TABLE 5. Threshold  $B_t$  for discarding contaminated spectra in incoherent integration, the defection ratio  $\Phi_D$  with thresholding and the equivalent number of incoherent integration  $\eta$  for the observation.

	BF	NC-TA
$B_t$	31.4 dB	28.6 dB
$\Phi_d$	13.5 %	4.37 %
$\eta$	$\approx 32.9$	$\approx 36.3$

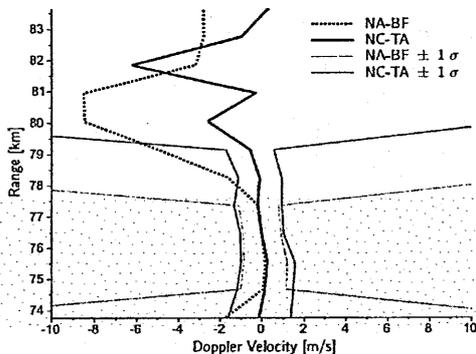


FIG. 12. Average RMS errors in wind velocity estimation for each range calculated with the NA-BF method and NC-TA method. Thin lines are biased by  $\pm 1\sigma$ .

#### d. Discussion

##### 1) COMPARISON OF THE DEFLECTION RATIO

Table 5 shows that the NC-TA method discards only about one-third of the spectra discarded by the NA-BF method through thresholding in incoherent integration. Additionally, comparing Fig. 10 and 11, it is clear that the number of peaks in spectra processed by the NC-TA method that are considered to be meteor clutters is much less than that in the case of the NA-BF method. The average suppression ratio of meteor clutters is nearly 15 dB, which is the same result as for simulation 1 in section 3.

##### 2) DIFFERENCES IN WIND VELOCITY ESTIMATION

As seen in Fig. 12, the standard deviations of the average wind velocities at ranges of 78–80 km and 73.7 km estimated with the NC-TA method are much lower than those estimated with the NA-BF method. These ranges are considered to be the boundary regions where atmospheric echoes are weak and meteor clutters are dominant. However, the NC-TA method works for both clutter suppression and decreasing fluctuations of spectra and these benefits lead to observable ranges that are almost twice as wide.

#### 5. Summary and Conclusion

This paper presented the result of applying an adaptive meteor-clutter rejection technique to an actual mesosphere observation.

In section 3, we presented two simulational results. First, we examined the capability of the NC-TA method to suppress contaminations. The NC-TA method reproduced the desired signals with the SNRs exceeding +5 dB (SIR of

-5 dB), which is an improvement of +15 dB compared with the result of the ordinary non-adaptive beamforming method. Second, we performed a more realistic simulation of a mesosphere observation. In this case, the method estimates the wind velocity with RMS error of about  $1.5 \text{ m s}^{-1}$  with the SIR of -10 dB, and the spectral fitting was successful for ranges four times as wide as in the case of the non-adaptive beamforming method.

In section 4, the NC-TA method was applied to an actual observation made on October 8 th, 2011. The proposed method suppressed meteor clutters by about 15 dB on average, and the number of spectra discarded through spectral thresholding in incoherent integration with the NC-TA method was about one-third of the number for the non-adaptive beamforming method. Additionally, the standard deviation of the wind velocity estimation was less than  $2 \text{ m s}^{-1}$  for ranges twice as wide those for the conventional method; i.e., the observable range doubled.

The above simulation and observational results show that the NC-TA method is a good solution for mesosphere observations contaminated by meteor clutters.

#### REFERENCES

- Cepelcha, Z., J. Borovička, W. G. Elford, D. O. ReVelle, R. L. Hawkes, V. Porubčan, and M. Šimek, 1998: Meteor phenomena and bodies. *Space Science Reviews*, **84** (3-4), 327–471.
- Hildebrand, P. H. and R. Sekhon, 1974: Objective determination of the noise level in doppler spectra. *Journal of Applied Meteorology*, **13** (7), 808–811.
- Kamio, K., K. Nishimura, T. Sato, et al., 2004: Adaptive sidelobe control for clutter rejection of atmospheric radars. *Annales Geophysicae*, Vol. 22, 4005–4012.
- McKinley, D. W. R., 1961: Meteor science and engineering. *New York, McGraw-Hill*, 1961., 1.
- Nakamura, T., T. Tsuda, M. Tsutsumi, K. Kita, T. Uehara, S. Kato, and S. Fukao, 1991: Meteor wind observations with the mu radar. *Radio Science*, **26** (4), 857–869.
- Nishimura, K., T. Nakamura, T. Sato, and K. Sato, 2012: Adaptive beamforming technique for accurate vertical wind measurements with multi-channel inst radar. *J. Atmos. Oceanic Technol.*, **29** (12), 1769–1775.
- Takao, K., M. Fujita, and T. Nishi, 1976: An adaptive antenna array under directional constraint. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, **24** (5), 662–669.

- Takao, K. and N. Kikuma, 1986: Tamed adaptive antenna array. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, **34** (3), 388–394.
- Tsuda, T., M. Yamamoto, T. Sato, S. Kato, and S. Fukao, 1985: Comparison observations between the mu radar and the kyoto meteor radar. *Radio Science*, **20** (6), 1241–1246.
- Wang, Z., J. Li, and P. Stoica, 2003: Comparison between norm constrained and robust capon beamformers. *Phased Array Systems and Technology, 2003. IEEE International Symposium on*, IEEE, 170–175.
- Woodman, R. F., 1985: Spectral moment estimation in most radars. *Radio Science*, **20** (6), 1185–1195.
- Yamamoto, M., T. Sato, P. MAY, T. Tsuda, S. Fukao, and S. Kato, 1988: Estimation error of spectral parameters of mesosphere-stratosphere-troposphere radars obtained by least squares fitting method and its lower bound. *Radio Science*, **23** (6), 1013–1021.

# UWB ドップラーレーダを用いた 呼吸と心拍の同時推定法

今坂 良平

京都大学大学院情報学研究科

2014年6月15日

於 京都大学

## 概要

超広帯域 (Ultra-Wide-Band:UWB) ドップラーレーダは照明条件の影響を受けず、高い距離分解能を有する非接触測定装置として人体イメージングの分野などで注目を集めている。近年、その UWB ドップラーレーダを呼吸・心拍数及び目標位置の同時測定に応用しようと試みる研究が活発に行われている。しかし、これらの先行研究において、呼吸・心拍成分の混合に起因した測定誤差により、実用に十分な精度を得ることが困難であった。そこで本稿ではまず、最大エントロピー法を用いた呼吸・心拍成分抽出法を提案・評価する。次に、レーダの呼吸時距離データに着目した新たな心拍成分抽出法の検討を行う。

## 1 序論

近年、1人暮らしの高齢者の増加に伴う孤独死の増加や、個人の健康管理意識の向上などによって、在宅でのバイタル（生体情報）監視システム構築の重要性が増加している。しかし、心拍計等の従来の接触型バイタルモニターは常に体に接触させなければならず、エアマットは就寝時以外は呼吸・心拍の測定を行えないという欠点がある。現在、非接触な測定装置としては主に光学カメラ、超音波が挙げられる。しかし、光学カメラは光が十分に得られない環境での感度低下や距離分解能不足が問題となり、超音波は距離分解能は高いが距離減衰が激しい等の問題を有する<sup>1</sup>。

これらの問題を回避するために、高い距離分解能を有する超広帯域 (Ultra-Wide-Band:UWB) ドップラーレーダによる呼吸、心拍及び目標位置の同時測定法が注目されている。そして近年、この UWB ドップラーレーダを用いて、心拍と呼吸による胸部の位置変化を検出し、心拍・呼吸の周波数を推定する技術の研究が盛んである。

しかし、現状の UWB ドップラーレーダを用いた先行研究では、体の他の部位の動作や、呼吸の高調波成分によって呼吸・心拍の周波数推定で十分な精度を得られない<sup>2</sup>。これらの問題

を解決するために、2012年に Xu らにより、4次キュムラントを用いた高精度な呼吸・心拍抽出法が提案された<sup>3</sup>。同手法はフーリエ変換のみを用いる手法と比較して、呼吸成分抽出において劇的な検出性能改善が示されており、心拍成分抽出においても良い特性が示されている。よって、呼吸・心拍成分の高精度抽出が可能と期待される。

以上を踏まえ、本研究では UWB ドップラーレーダによる非接触な呼吸・心拍成分抽出法の確立を目指す。まず、実環境において UWB ドップラーレーダを用いた人体胸部測定を行い、受信データに4次キュムラント推定法を適用し特性評価を行う。さらに最大エントロピー法 (Maximum Entropy Method:MEM)<sup>5</sup>を用いた心拍抽出法の提案、および特性評価を行う。そして最後に、レーダの呼吸時距離データに着目した新たな心拍成分抽出法の検討を行う。

## 2 呼吸・心拍測定システム

図1に UWB ドップラーレーダを用いた呼吸・心拍測定システムの概略を示す。人体胸部の正面に送信アンテナと受信アンテナを設置し、距離分解能  $\Delta R=30[\text{cm}]$  のパルスを繰り返し周期  $T_p=1.285[\text{ms}]$  で複数回送信すると受信信号が得られる。即ち、受信信号は図2のよ

うな 2 次元信号となる。縦軸の fast time はアンテナと測定対象との距離に対応し、これは受信パルスの遅延時間から計算できる。横軸の slow time はパルスの送受信時刻である。まず、得られた 2 次元信号にコヒーレント積分を行い白色ガウス雑音を除去する。次にこの 2 次元信号から測定状況に応じて胸の位置に相当するレンジ番号を選び、2 次元信号を 1 次元信号に配列し直す。そして、1 次元信号に FFT を適用すると、取得信号の周波数成分を観察することができる。一般的に人の安静時の呼吸成分は 0.15~0.5Hz 付近の、心拍成分は 1~1.5Hz 付近の周波数をもつことが知られており、0~2Hz を見ると呼吸・心拍両方の成分を見ることができる。また、ドップラーシフトによる位相変化  $\phi$  [rad] を検出し、距離変化  $\phi \times \lambda / 2\pi$  [mm] を観察する事も出来る。

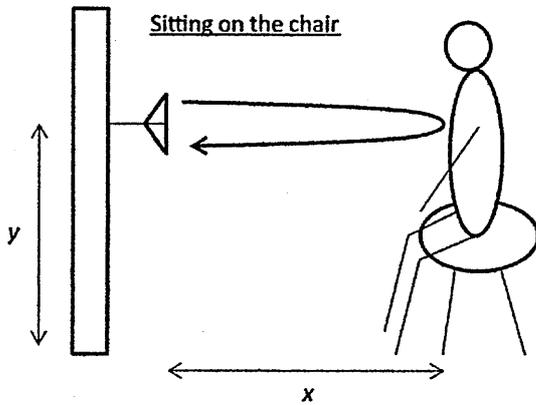


図 1 測定システムの概略

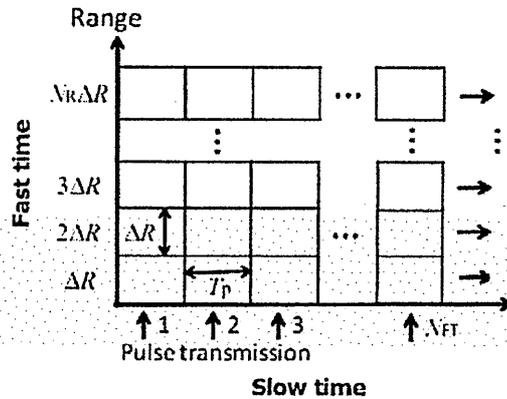


図 2 受信信号の概略

### 3 実験による受信信号取得及び FFT による周波数解析

図 1 において、中心周波数  $f_0=26.4\text{GHz}$ 、帯域幅  $f_{bw}=500\text{MHz}$ 、ビーム幅  $22^\circ (\pm 11^\circ)$ 、 $T_p=1.285\text{ms}$ 、アンテナ距離  $x=90\text{cm}$ 、アンテナ高さ  $y=80\text{cm}$ 、安静時、座位で呼吸時、無呼吸時に分けて実験を行った。無呼吸時のデータは、被験者が意図的に息を止めた状態を無呼吸状態であると仮定して測定した。図 3 に呼吸時、無呼吸時の距離変化を、図 4 に FFT により求めた受信信号のパワースペクトル密度を示す。図 3 の受信信号の時系列データでは、無呼吸時は周期がほぼ一定であるが、呼吸時は時間によって周期が様々に変化している。また、図 4 より無呼吸時では 1.25Hz 付近にピークを持つ心拍成分が、呼吸時では高調波成分に埋もれてしまい、心拍成分の周波数推定が困難になっている。

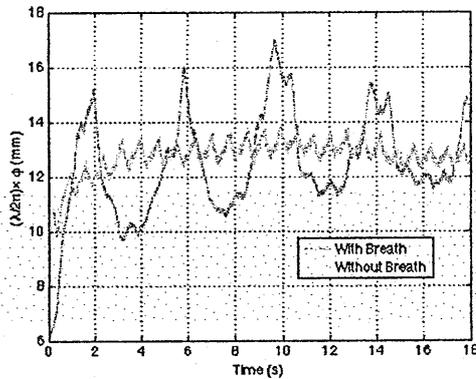


図3 呼吸時・無呼吸時の距離変化

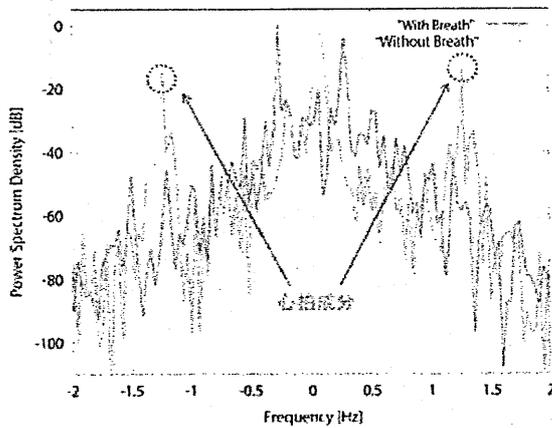


図4 FFT スペクトル

## 4 4次キュムラント推定法を用いた、従来の呼吸・心拍信号検出法

本章では先行研究において最も有効な手法と考えられる、4次キュムラント法について説明し、実験データからその有効性の検証を行う。

### 4.1 4次キュムラント法による周波数解析

キュムラントとはモーメント母関数  $M(\theta)$  の対数 ( $\log M(\theta)$ : キュムラント母関数) から求めた展開係数であり、離散型確率変数  $X$  と変数  $\theta$  に対して次式のように表される。

$$M(\theta) = E[e^{\theta X}] \quad (1)$$

$$\log M(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \theta^n \quad (2)$$

ただし、 $c_n$  は  $n$  次のキュムラントである。特に4次キュムラント  $c_4$  には「ガウス性である散乱波成分と観測雑音成分の項は0となり、確定的な反射波成分の項だけが得られる」という性質<sup>4</sup>と、「時系列信号に対して4次キュムラント推定を1回行うと、そのスペクトルは呼吸・心拍の基本波振幅の大きさに対する高調波振幅の大きさが1/4に抑圧される」という性質<sup>3</sup>がある。これらの性質により心拍成分と呼吸の高調波成分とが混合している信号からでも、呼吸の高調波を抑圧することで両者を分離し、心拍成分の検出能が向上すると期待される。

### 4.2 4次キュムラント推定法の検証

図4の周波数スペクトルに、LPFのみを適用したスペクトル(緑線)とLPF後の4次キュムラント推定を2回行った信号のスペクトル(赤線)を図5に示し、BPFのみをかけたスペクトル(青線)とBPF後の4次キュムラント推定を2回行った信号のスペクトル(呼吸時=赤線、無呼吸時=緑線)を図6に示す。呼吸成分を持たない無呼吸時データは図5には掲載していない。図5に関して、4次キュムラント推定前は0~1Hzに4~5本のピークが存在するが、推定後は0.35Hz付近に呼吸の基本波成分、

0.7Hz 付近に呼吸の高調波成分の 2 本のピークが確認できる。よって、前節で述べたように雑音成分が抑圧されたことがわかる。次に、図 6 に関して、呼吸時と無呼吸時を比較すると、1.2Hz のピークが心拍成分であるとわかる。しかし、1Hz 付近にも呼吸の高調波成分があり、この成分が心拍成分より大きくなる事例が確認された。これより、4 次キュムラント推定法を適用しても、呼吸の高調波成分を十分に抑圧できないケースが確認された。

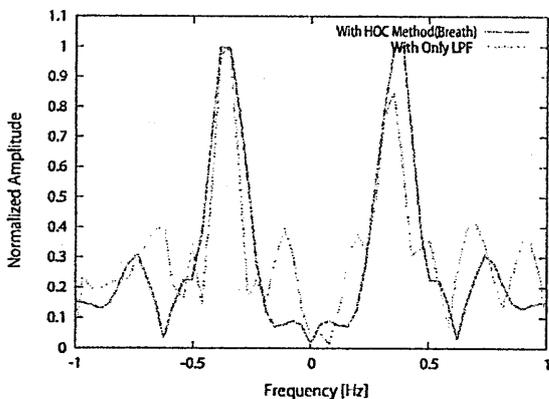


図 5 各手法によるスペクトル (LPF)

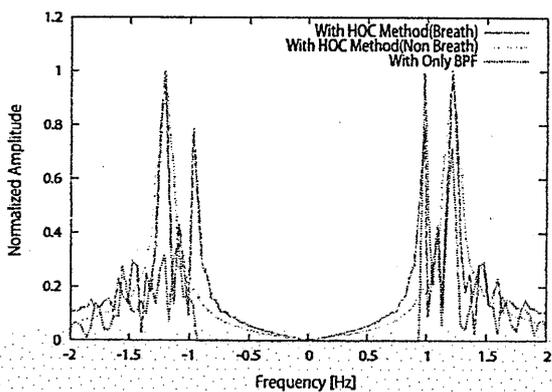


図 6 各手法によるスペクトル (BPF)

## 5 MEM を用いた周波数解析法

受信信号からわかる呼吸・心拍信号の特徴として、無呼吸信号は周期がほぼ一定であること、呼吸信号は時間により周期が様々に変化することが挙げられる。これらの特徴より、呼吸成分の周波数は時間変動が大きい、心拍成分はほぼ一定の周波数成分を持つと考えられる。よって、時間周波数解析により、これらの識別が可能と考えられる。しかし、FFT では短時間長の窓を用いると周波数分解能が劣化する。そこで短時間データからでも高分解能なスペクトル推定が可能な MEM を用いた心拍成分抽出法を提案する。

### 5.1 移動窓 MEM を用いた心拍周波数抽出法

MEM とは、与えられた有限個のデータ点から、予測誤差が最小になるようなデータ点を補うことでデータ点を増やし、高分解能なスペクトル推定を可能にするデータ処理法である<sup>5)</sup>。これを用いて、区間長  $\tau$  の窓を時間方向に  $T_0$  ずつ移動し、そのそれぞれに MEM を適用することで、スペクトログラム推定を行う。これに  $\pm 1\text{Hz} \sim \pm 2\text{Hz}$  の BPF を適用し、各時刻のパワースペクトル密度を全て足し合わせる。最後に、得られた波形のパワースペクトル密度が最大となる点の周波数を抽出し、これを心拍成分の周波数とする。

### 5.2 実験データへの適用

前節の手法を用いて、実験データからスペクトログラムを推定した結果を図 7 に、また、パワースペクトル密度を足し合わせた結果を図 8 に示す。今回は  $t=29\text{s}$ 、 $\tau=80\text{ms}$  とした。図 7

より、 $\pm 1.2\text{Hz}$  付近に周波数がほぼ一定かつ信号強度が強い成分が存在することがわかる。また、図 8 より、最大値をもつ周波数は  $1.2219\text{Hz}$  と  $-1.215\text{Hz}$  となった。図 4 より、安定状態の心拍の周波数成分は約  $\pm 1.25\text{Hz}$  なので、これらの成分が心拍成分であることがわかる。しかし、 $\pm 1.5\text{Hz}$  付近にも狭帯域、高強度成分が生じている。これは MEM の予測次数が大きいため、余分な周波数成分も抽出されている可能性がある。また、長時間で推定を行うと、STFT との差異をそれほど感じられなく、リアルタイムな心拍成分抽出は不可能である。よって次節では、距離データの特徴に着目した心拍抽出法について検討する。

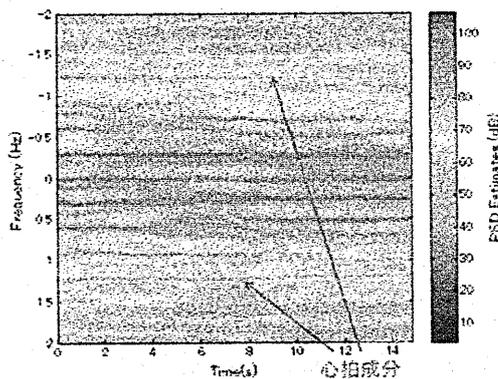


図 7 MEM を用いたスペクトログラム

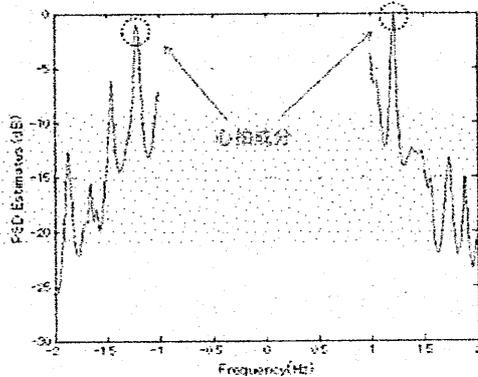


図 8 時間ごとの MEM スペクトログラムの加算波形

## 6 呼吸時データの特徴を活かした心拍成分抽出法の検討

前章までの 4 次キュームラント推定法や、SWMEM ではレーダ信号の周波数成分に注目して解析を行ってきた。しかし図 3 の呼吸時データに注目すると、呼吸成分に心拍らしき高周波成分が特徴として現れていることがわかる。よって本節では距離データの特徴、その特徴を用いた心拍成分抽出手法について検討する。

### 6.1 レーダ信号と ECG から得られるリファレンスとの比較

図 9、10 にそれぞれ無呼吸時および呼吸時の実験環境で UWB ドップラーレーダにより測定した距離データ (赤線) と、無線心臓電位計 RF-ECG により測定した心電位 (青線) とを重ねて示す。また、人間の目で見て、レーダ信号の山のピーク時間と ECG の R 波の立ち上がり時間が一致している場所を图中的の  $\circ$  印に示し、一致しない場所を图中的の  $\times$  印に示す。図 9 (無呼吸時) では、レーダ信号の山のピーク時間と ECG の R 波の立ち上がり時間が高精度で一致し、両者は対応関係にある。また、図 11 に両者のデータから推定した心拍のパルス間隔を示す。レーダでは距離データの山のピーク間隔を、ECG では R 波の立ち上がり時間間隔をそれぞれ表示している。この図からもレーダから心拍信号が 10% 以内の精度で取得できており、無呼吸時データから心拍数推定が可能であることがわかる。次に、図 10 (呼吸時) のレーダ信号では、 $0.15\sim 0.5\text{Hz}$  の呼吸成分の上に、

それよりも周波数が高い心拍成分が重載している事がわかる。この心拍らしき高周波成分の山のピーク時間と ECG の立ち上がり間隔とを比較すると、距離データの山や谷のような振幅変化率の低い停留区間では高精度で一致し、両者は対応関係にある。これにより、呼吸時信号の停留区間（低周波成分中の振幅変化率の低い区間）では心拍成分が特徴として顕著に現れている事を確認した。理由としては停留区間は呼吸の吸い終わり、吐き終わりに相当するため、呼吸に伴う胸部の運動が相対的に小さくなり、心拍成分が顕著に現れていると推定できる。次節ではこの特徴を用いて心拍成分抽出を行うために、この呼吸時データに 0.9Hz 以下の呼吸周波数成分を遮断するような高域通過フィルタ (High Pass Filter:HPF) を適用し、呼吸成分を低減することで心拍成分抽出が行えるかを検証した。

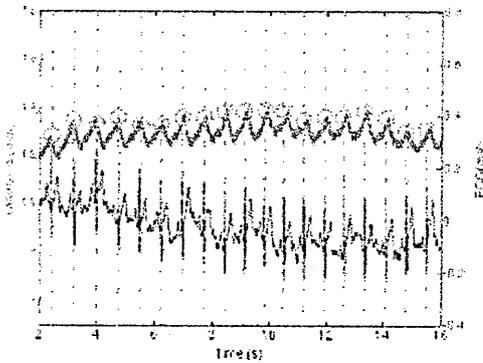


図 9 無呼吸時データと ECG との比較

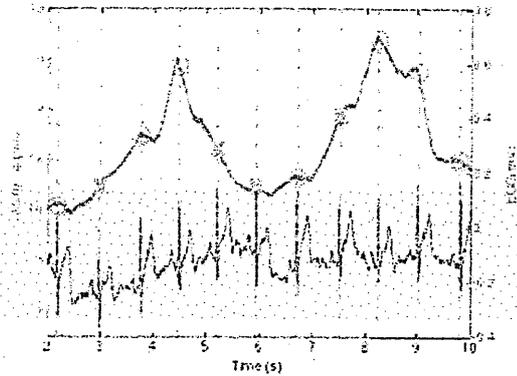


図 10 呼吸時データと ECG との比較

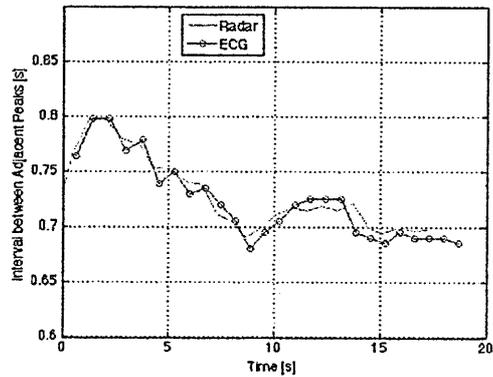


図 11 レーダの無呼吸時データから求めた心拍数と ECG による心拍数との比較

## 6.2 呼吸時信号中の低周波呼吸成分を除去

図 10 の呼吸時データに 0.9Hz 以下の周波数成分を遮断する矩形 HPF を適用したものを図 12 に示す。図 10 と図 12 とを比較すると、呼吸時信号の山、または谷の停留区間（図中の四角で囲まれた部分）において、心拍成分が検出しやすくなっている。しかし、単に HPF 後の山のピーク時間を取り出しても、停留区間以外では心拍成分に対応していない部分が存在する。よって、呼吸時データ中の心拍成分が現れ

る区間のみを自動検出し、心拍数推定を行うアルゴリズムを考える必要がある。

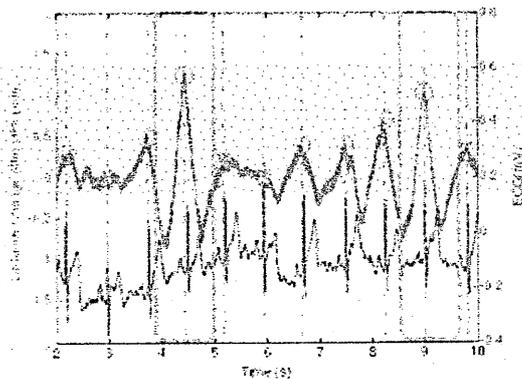


図 12 HPF 適用後の呼吸時データと ECG との比較

## 7 結論

本稿では UWB ドップラーレーダで取得されたデータから心拍成分を抽出するために、まず、先行研究である 4 次キウムラント推定法の検証、MEM を用いた心拍抽出法について示した。4 次キウムラント推定法では、心拍数付近の呼吸の高調波成分が心拍成分よりも大きくなり、心拍成分抽出が困難になる事象を発見した。さらに MEM を用いた心拍抽出法では、MEM のピーク抽出に不安定があることを発見した。それらの結果を受けて、別のアプローチとして、呼吸時の距離変化データの停留点では心拍成分が顕著に現れ、その特徴を用いた心拍成分抽出の可能性について示した。今後は呼吸時データ中の心拍成分が現れる区間のみを自動検出し、心拍数推定を行うアルゴリズムを考える。

## 参考文献

- [1] S. D. Min, J. K. Kim, H. S. Shin, Y. H. Yun, C. K. Lee, and M. Lee, "Noncontact Respiration Rate Measurement System Using an Ultrasonic Proximity Sensor," *IEEE Sensors J.*, vol. 10, no. 11, pp.1732-1739, 2010.
- [2] D. Nagae and A. Mase, "Measurement of Heart Rate Variability and Stress Evaluation by Using Microwave Reectometric Vital Signal Sensing," *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 81, no. 9, Article ID 094301, 2010.
- [3] Y. Xu, S. Dai, S. Wu, J. Chen, and G. Fang, "Vital Sign Detection Method Based on Multiple Higher Order Cumulant for Ultrawideband Radar," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 50, no. 4, pp.1254-1265, 2012.
- [4] Y. Shimamura, K. Araki, and J. Takada, "Application of Fourth-Order Cumulants to Delay Time and DOA Estimation of Multiple Delayed Waves by the MMP Method," *IEICE Trans. Commun. B-II*, vol. J81-B-II No.4, pp.289-296, 1998.
- [5] 日野幹雄, "スペクトル解析 (新装版)", 朝倉書店, 2010.

キャリア成分を含まない位相変調光信号からの  
光キャリア抽出

Optical Carrier Extraction from Carrier-Less Optical Phase Modulated  
Signals

松本 正行 , 西村 亮

和歌山大学システム工学部

Masayuki Matsumoto and Ryo Nishimura

Faculty of Systems Engineering, Wakayama University

2014年6月16日

於 京都大学

あらし キャリア成分を含まない位相変調光信号からの光キャリア抽出方法を提案する。本方法では、信号光のホモダイン検波、信号光に対する位相再変調によるデータ消去、および半導体レーザの注入同期発振による位相同期連続光の生成、をフィードバックループ内に組込んでキャリアの再生を行う。速度 10Gb/s の RZ-BPSK 信号からのキャリア抽出および無エラーのホモダイン検出を実験で確認した。また、本方法を速度 10Gbaud の RZ-QPSK 信号からのキャリア抽出に適用することを試みた。

## 1. まえがき

ホモダイン検出によって光信号の複素振幅情報を読みとるためには、光源光と位相同期した局部発振光を用いるか、または、光源光と局部発振光の位相差を検出後に推定し補償する必要がある。近年実用化が進んでいるデジタルコヒーレント受信方式では、検波後のデジタル電気信号処理によって局部発振光の位相ずれを推定・補償しているが[1, 2]、電力消費が少ないコンパクトなコヒーレント受信器の実現のために、光領域で位相同期をとるホモダイン受信方式への期待も依然として高い[3, 4]。

コヒーレント信号伝送では、多くの場合、位相変調信号が用いられる。信号位相が  $0 \sim 2\pi$  の間で偏りなく選ばれる場合、信号に含まれるキャリア成分がゼロになり、局部発振光の位相を光源光に同期させるための基準がなくなる。この場合、光源光と位相同期した局部発振光を生成するためには、光領域または電気領域において何らかの非線形な信号処理を行う必要がある。これまでに、(1)  $90^\circ$ ハイブリッドを用いたホモダイン検出における同相検波出力と直交位相検波出力の積を位相同期ループのフィードバック信号として用いるコスタスループ法や判定駆動 (decision-driven) ループ法[5]、(2)遅延検出したデータを電気領域においてデコーディングし、信号光を再変調してキャリア成分を再生する方法[6]、(3)2 値位相変調 (BPSK) 信号を光縮退パラメトリック発振器のポンプ光として用いることによってキャリア光を生成する方法[7]、(4)ポンプ光と信号光、および、ポンプ光と参照光との間の高次四光波混合光の差周波電気信号を分周し、その値に等しい周波数シフトを参照光に与える方法[8]、などが提案され、実験で検証されている。それぞれ優れた特徴を持つが、(1)および(2)ではシンボル速度以上の速度の電気信号処理が必要であり、(3)および(4)では効率の良い光非線形媒質および/または大きな光信号電力が必要になる。

本報告では、信号光のホモダイン検波、信号光に対する位相再変調によるデータ消去、および半導体レーザの注入同期発振による位相同期連続光の生成、をフィードバックループ内に組込んだ光キャリア抽出方法を提案する[9-12]。本方法では、光非線形信号処理と高速の RF 演算が不要である。BPSK および 4 値位相変調 (QPSK) 信号からのキャリア抽出を試みた結果を報告する。

このような位相同期光キャリア抽出は、光ホモダイン検出だけでなく、位相感応型光増幅などのコヒーレント全光信号処理の際にも必須の信号処理であり[13-17]、種々のサブシステムへの応用が期待される。

## 2. 無キャリアの BPSK 信号からのキャリア抽出

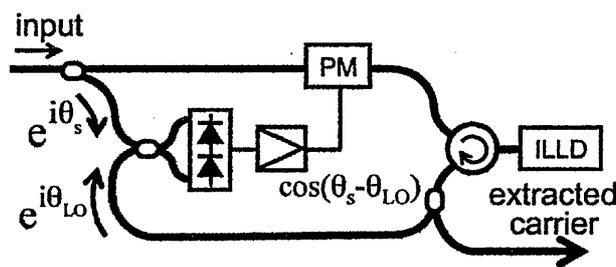


図1 BPSK 信号からのキャリア抽出回路

図1に、提案する BPSK 信号からの光キャリア抽出回路の概略を示す。注入同期レーザダイオード (ILLD) の出力光を局部発振光 (LO 光) として入力信号の一部をホモダイン検波し、その検波出力を用いて位相変調器 (PM) を駆動することによって入力 BPSK 信号の位相を変調する。信号光の位相を  $\theta_s$ 、LO 光の位相を  $\theta_{LO}$  とすると、位相変調量は  $k \cos(\theta_s - \theta_{LO})$  の形で表される。ここで  $k$  は入力信号光および LO 光の電力、検波器の応答度、ドライバ増幅器の利得、変調器の  $V_\pi$  で決まる値である。入力信号が位相変調器に到達するまでの時間と、検波信号が PM を駆動するまでの時間が等しければ、位相変調された光の複素振幅は  $E(\theta_s, \theta_{LO}) = \exp(i\theta_s) \exp[ik \cos(\theta_s - \theta_{LO})]$  となる。BPSK 変調の場合、 $\theta_s$  は  $0$  または  $\pi$  のいずれかの値をとる。 $\theta_{LO} = 0$  の場合、 $k$  を  $k = \pi/2$  に選べば、位相変調が完全に消去され光源のキャリアが回復する。このキャリア成分に ILLD を同期させれば、光源光と位相同期した LO 光が生成される。なお、BPSK 信号の位相値が  $0$  と  $\pi$  である確率が等しい場合、PM 後の信号に含まれるキャリア成分の電力は、

$$P_{\text{BPSK}}(\theta_{LO}) = |E(0, \theta_{LO}) + E(\pi, \theta_{LO})|^2 = 4 \sin^2(k \cos \theta_{LO})$$

に比例する。図2に、 $k$  をパラメタとした場合の  $P_{\text{BPSK}}$  と  $\theta_{LO}$  の関係を示す。 $k \leq \pi/2$  のとき、 $\theta_{LO} = 0$  において  $P_{\text{BPSK}}$  が最大になる。つまり、 $k = \pi/2$  として PM 後のキャリア成分電力が最大になるように LO 光位相  $\theta_{LO}$  を制御することによって、変調雑音を含まないキャリア光が ILLD に注入され、光源光と位相同期した LO 光を発生させることができる。

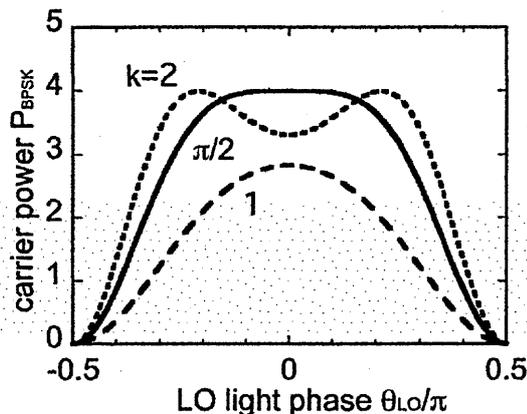


図2 位相が再変調された BPSK 信号に含まれるキャリア成分電力と  $\theta_{LO}$  の関係

### 3. BPSK 信号からのキャリア抽出／ホモダイン検出実験

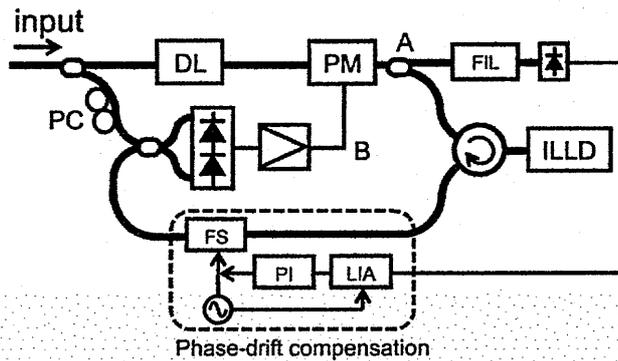


図3 キャリア抽出/ホモダイン検出の実験系. PC:偏波コントローラ, DL:遅延線, FIL:光フィルタ, FS:ファイバストレッチャー, PI:比例積分制御

中心波長 1555.9nm の 10Gb/s RZ-BPSK 信号 (デューティ比 50%) からのキャリア抽出およびホモダイン検出実験を行った. 図3に実験回路を示す. PM 後の信号に含まれるキャリア成分電力を測定するための光フィルタとして遅延時間 100ps の遅延干渉計を用いた. ILLD 出力光 (LO 光) の位相を 24kHz の微小振幅の正弦波で変調し, PM 後のキャリア成分電力に含まれる 24kHz の振動成分の大きさをロックイン増幅器 (LIA) を用いて検出する. この値がゼロになるように ILLD 出力光の位相を制御する.

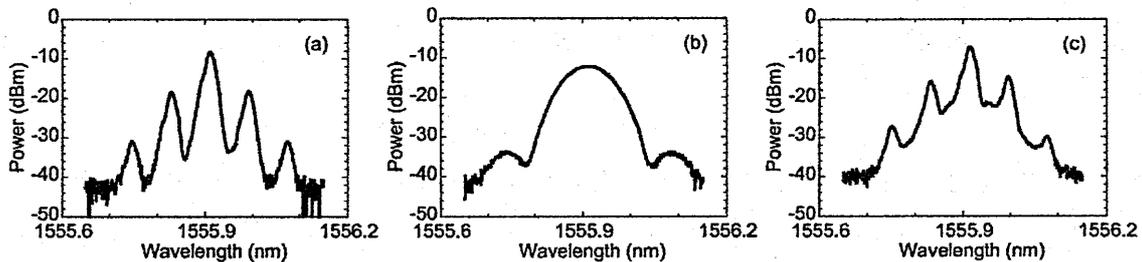


図4 信号の光スペクトル. (a)無変調の 10GHz RZ パルス列, (b)RZ-BPSK 信号, (c)位相が再変調されてデータが消去された RZ パルス列 (分解能 0.01nm)

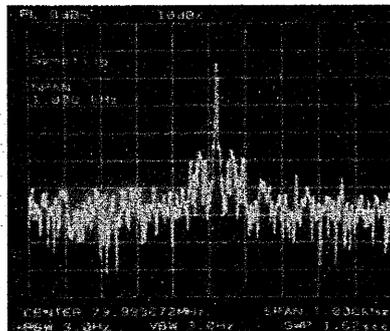


図5 光源光と抽出したキャリア光との間のビートスペクトル (光源光の周波数は 80MHz シフトされている). スパン幅 1kHz、分解能 3Hz、縦方向の目盛り 10dB/div.

図4(a)はBPSK変調前の10GHz RZパルス列の光スペクトル, 図4(b)はRZ-BPSK信号の光スペクトル, 図4(c)は位相変調を加えて位相データを消去した信号の光スペクトルである. 図4(c)より, 検出したデータで位相を再変調することによって, データ変調がかなりの程度消去されていることがわかる.

データ変調が消去された信号(RZパルス列)を注入光としたILLDからの同期出力光と, 送信器光源から分岐した連続光との間のビートをRFスペクトラムアナライザで観測した結果を図5に示す. 観測されたビート信号のスペクトル幅はスペクトラムアナライザの分解能(3Hz)で制限されており, 忠実なキャリア抽出が行われていることがわかる.

図3の点Bで観測したアイパターンを図6に示す. (a)は光源レーザの線幅が約120kHzの場合, (b)は光源レーザの線幅が約12kHzの場合である. どちらの場合もアイは良く開いているが, (a)の場合は線幅とフィードバック遅延(約90ns)の積が十分に小さくないため, BER=10<sup>-3</sup>程度のビット判定誤りが生じている. (b)の場合は, 無エラーのデータ検出が達成されている.

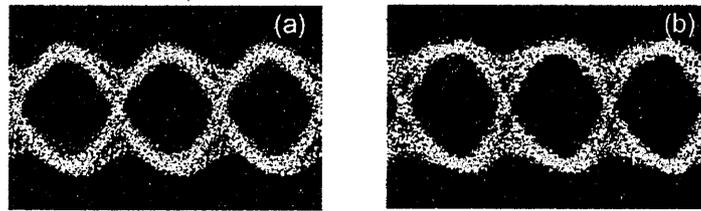


図6 ホモダイン検波したアイパターン. (a)光源線幅~120kHzの場合 (BER~10<sup>-3</sup>), (b)光源線幅~12kHzの場合 (無エラー)

#### 4. 無キャリアのQPSK信号からのキャリア抽出

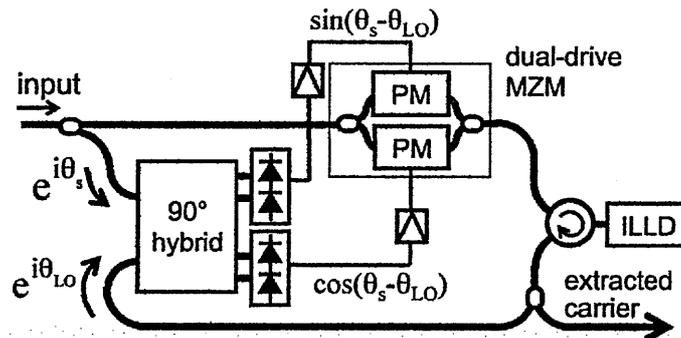


図7 QPSK信号からのキャリア抽出回路

次にQPSK信号からのキャリア抽出を検討する. 図1と同じ回路を用いてQPSK信号を再変調することによっても, キャリア成分を回復することができるが[9], 1個の位相変調器ではQPSKの位相データを完全に消去することができず, 再変調後の信号に変調雑音が残るため, ILLDによるキャリア発生が困難である. そこでここでは, 図7に示すように, 2電極マ

ツハツェンダー変調器 (MZM) の各アームを通過する光を、 $90^\circ$  光ハイブリッドと平衡検波器で検出した同相検波出力と直交位相検波出力のそれぞれで位相変調する。なお、2つのアーム間には $\pi/2$ の位相バイアスが与えられている。各アームの位相変調量を  $k \cos(\theta_s - \theta_{LO})$  および  $k \sin(\theta_s - \theta_{LO})$  とすると、2電極 MZM 通過後の光信号の複素振幅は

$$E(\theta_s, \theta_{LO}) = \exp(i\theta_s) \{ \exp[ik \cos(\theta_s - \theta_{LO})] - i \exp[ik \sin(\theta_s - \theta_{LO})] \} / 2$$

となる。2電極 MZM 通過後の信号に含まれるキャリア成分の電力は

$$P_{QPSK}(\theta_{LO}) = |E(0, \theta_{LO}) + E(\pi/2, \theta_{LO}) + E(\pi, \theta_{LO}) + E(3\pi/2, \theta_{LO})|^2 = 4[\sin^2(k \cos \theta_{LO}) + \sin^2(k \sin \theta_{LO})]$$

に比例する。

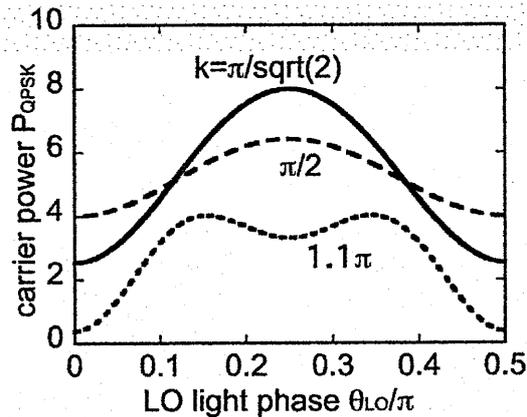


図8 位相が再変調された QPSK 信号に含まれるキャリア成分電力と $\theta_{LO}$ の関係

図8に、 $k$  をパラメタとした場合の  $P_{QPSK}$  と  $\theta_{LO}$  の関係を示す。 $k \leq \pi$  のとき、 $\theta_{LO} = \pm\pi/4$  において  $P_{QPSK}$  が最大になる。 $k = \pi/\sqrt{2}$  のときは、 $\theta_{LO} = \pm\pi/4$  において  $P_{QPSK}$  が最大になると同時に QPSK データ変調が完全に消去される。したがって、BPSK 信号からのキャリア抽出の場合と同様に、 $k = \pi/\sqrt{2}$  として2電極 MZM 後のキャリア成分電力が最大になるように LO 光位相  $\theta_{LO}$  を制御することによって、変調雑音を含まないキャリア光成分が ILLD に注入され、光源光と位相同期した LO 光を発生させることができる。

##### 5. QPSK 信号からのキャリア抽出／ホモダイン検出実験

前節で述べた方法に従って QPSK 信号からのキャリア抽出/ホモダイン検波の実験を行った。速度 10Gbaud、デューティ比 50% の RZ-QPSK 信号の光スペクトルを図9(a)に示す。この RZ-QPSK 信号に対して、2電極 MZM で位相再変調を加えた後の光スペクトルを図9(b)に示す。位相データの除去は不完全であるが、キャリア成分がある程度回復していることがわかる。この信号が ILLD に注入されて LO 光が生成される。

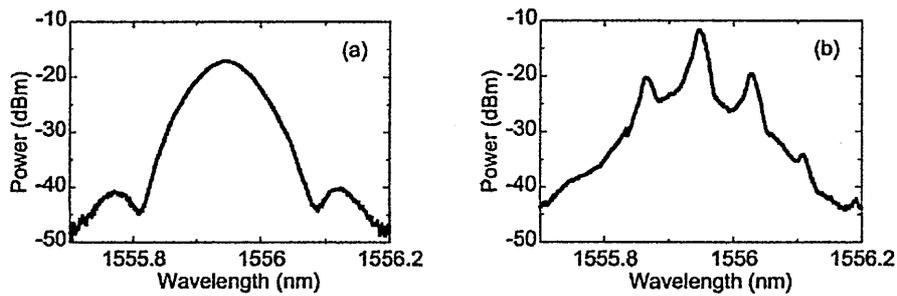


図9 信号の光スペクトル。(a) RZ-QPSK 信号, (b)位相が再変調されてデータがある程度消去された RZ パルス列 (分解能 0.01nm)

図10は2つの平衡検波器から出力される同相信号と直交位相信号のアイパターンである。短い時間内ではアイが開き、正しいホモダイン検波出力が得られることがわかる。しかしながら、QPSK 信号からの位相データ除去が完全に行えておらず、長時間にわたる安定な LO 光生成とホモダイン検波を達成することが困難であった。安定なキャリア抽出/ホモダイン検波を行うためには、できる限り正確な位相逆変調を行い、ILLD に注入される信号に混入する変調雑音を小さくするとともに、ILLD にも制御を加え同期引き込み範囲を広げることが有効であると考えられる[18, 19].

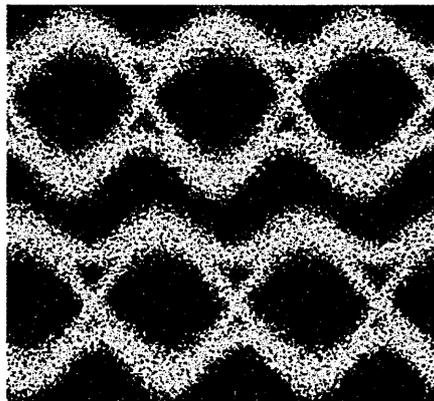


図10 QPSK 信号の受信アイパターン (上段：同相信号, 下段：直交位相信号)

## 6. まとめ

キャリア成分を含まない位相変調光信号からのキャリア抽出方法を提案した。本方法では高速の RF 信号処理や、全光非線形信号処理が不要である。速度 10Gb/s の RZ-BPSK 信号からのキャリア抽出と無エラーのホモダイン検出の実験を行った。さらに、本方法を QPSK 信号からのキャリア抽出に拡張した。

## 参考文献

- [1] 菊池和朗, “コヒーレント光ファイバー通信の新展開”, 応用物理, vol.78, no. 9, pp. 856-861

- (2009).
- [2] T. J. Xia and G. A. Wellbrock, "Commercial 100-Gbit/s coherent transmission systems," in *Optical Fiber Telecommunications VIB*, I. Kaminow, T. Li, and A. E. Willner Eds., Academic Press, pp. 45-82 (2013).
  - [3] M. Lu, H.-C. Park, E. Bloch, A. Sivananthan, J. S. Parker, Z. Griffith, L. A. Johansson, M. J. W. Rodwell, and L. A. Coldren, "An integrated 40 Gbit/s optical Costas receiver," *J. Lightwave Technol.*, vol. 31, no. 13, pp. 2244-2253 (2013).
  - [4] M. Koga and A. Mizutori, "Decision-directed Costas loop stable homodyne detection for 10-Gb/s BPSK signal transmission," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 26, no. 4, pp. 319-322 (2014).
  - [5] S. Norimatsu, K. Iwashita, and K. Noguchi, "10 Gbit/s optical PSK homodyne transmission experiments using external cavity DFB LDs", *Electron. Lett.*, vol. 26, no. 10, pp. 648-649 (1990).
  - [6] S. K. Ibrahim, S. Sygletos, R. Weerasuriya, and A. D. Ellis, "Novel real-time homodyne coherent receiver using a feed-forward based carrier extraction scheme for phase modulated signals," *Opt. Exp.*, vol. 19, no. 9, pp. 8320-8326 (2011).
  - [7] I. Kim, K. Croussore, X. Li, and G. Li, "All-optical carrier synchronization using a phase-sensitive oscillator," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 19, no. 13, pp. 987-989 (2007).
  - [8] R. Slavik, J. Kakande, and D. Richardson, "Feed-forward true carrier extraction of high baud rate phase shift keyed signals using photonic modulation stripping and low-bandwidth electronics," *Opt. Exp.*, vol. 19, no. 27, pp. 26594- 26599 (2011).
  - [9] M. Matsumoto, "Optical carrier extraction for homodyne detection of BPSK signals", *The 18th OptoElectronics and Communications Conference/ Photonics in Switching (OECC/PS) 2013, TuPR-6* (2013).
  - [10] 西村亮, 松本正行, "QPSK信号からの光キャリア抽出手法", 電子情報通信学会2014年総会大会, B-10-72 (2014).
  - [11] M. Matsumoto and R. Nishimura, "Optical carrier extraction from carrier-less QPSK signals," *IEEE Photonics Society Summer Topicals Meeting Series, Nonlinear-Optical Signal Processing*, to be presented (2014).
  - [12] 松本正行, 西村亮, "キャリア成分を持たない位相変調信号からの光キャリア抽出", 電子情報通信学会光通信システム研究会, 発表予定(2014).
  - [13] M. E. Marhic and C. -H. Hsia, "Optical amplification and squeezed-light generation in fibre interferometers performing degenerate four-wave mixing," *Quantum. Opt.* 3, pp. 341-358 (1991).
  - [14] W. Imajuku and A. Takada, "In-line optical phase-sensitive amplifier with pump light source controlled by optical phase-lock loop," *J. Lightwave Technol.*, vol. 17, no. 4, pp. 637-646 (1999).
  - [15] K. Croussore and G. Li, "Phase and amplitude regeneration of differential phase-shift keyed signals using phase-sensitive amplification," *IEEE J. Selected Topics in Quantum Electron.*, vol.

- 14, no. 3, pp. 648-658 (2008).
- [16] X. Yi, R. Yu, J. Kurumida, and S. J. B. Yoo, "A theoretical and experimental study on modulation-format-independent wavelength conversion," *J. Lightwave Technol.*, vol. 28, no. 4, pp. 587-595 (2010).
- [17] R. Slavík, F. Parmigiani, J. Kakande, C. Lundström, J. Sjödin, P. A. Andrekson, R. Weerasuriya, S. Sygletos, A. D. Ellis, L. Grüner-Nielsen, D. Jakobsen, S. Herstrøm, R. Phelan, J. O'Gorman, A. Bogris, D. Syvridis, S. Dasgupta, P. Petropoulos, and D. J. Richardson, "All-optical phase and amplitude regenerator for next-generation telecommunications systems," *Nat. Photon.*, vol. 4, pp. 690-695 (2010).
- [18] A. C. Bordonalli, C. Walton, and A. J. Seeds, "High-performance phase locking of wide linewidth semiconductor lasers by combined use of optical injection locking and optical phase-lock loop," *J. Lightwave Technol.*, vol. 17, no. 2, pp. 328-342 (1999).
- [19] J. Pezeshki, M. Saylor, H. Mandelberg, and J. Goldhar, "Generation of a cw local oscillator signal using a stabilized injection locked semiconductor laser," *J. Lightwave Technol.*, vol. 26, no. 5, pp. 588-599 (2008).

**プラズマを構成要素とするマイクロ波メタマテリアルの  
展開**

**Various aspects of microwave metamaterials composed  
of plasmas**

**酒井 道、中村嘉浩、伊丹豪、西尾祐亮、岩井亮憲、木原直也**

**Osamu Sakai,  
Yoshihiro Nakamura, Go Itami, Yusuke Nishio, Akinori Iwai and Naoya Kihara  
京都大学大学院工学研究科  
Kyoto University**

**2014年6月16日  
於 京都大学**

## 概要

電磁波媒質としてのプラズマは、最近研究が伸展しているメタマテリアル構造と整合性良く組み合わせることができる。そのような複合体(以下、プラズマ・メタマテリアルと呼称する)は、通常の固体によるメタマテリアルに対して動的性質や非線形性を帯びた特徴を備え、特に現在はマイクロ波帯でその実験・理論研究が行われている。我々は、この“プラズマ・メタマテリアル”研究を最初に提唱して学術的基盤を整備するとともに、その産業応用・高周波数化を目指した研究を展開しており、本報告ではその概要を報告する。

## Abstract

Plasmas, which can be unique media for electromagnetic waves, match so well metamaterials which have attracted much scientific interests. Such functional composites, which we refer to as “plasma metamaterials,” exhibit dynamic, tunable, and nonlinear properties in comparison with conventional metamaterials composed of solids, and recent experimental and theoretical researches confirm their advantages in microwave ranges. While we propose this concept for plasma metamaterials and establish the research bases, we are now expanding this study to elevate their working frequencies as well as to develop industrial applications, which will be briefly reviewed in this report.

## Keywords

Plasma, metamaterial, electromagnetic wave

## 1. はじめに

プラズマと電磁波の相互作用、すなわちプラズマ中の電磁波の線形・非線形伝搬、電磁波によるプラズマ生成・加熱、ならびに電磁波応答の分析によるプラズマパラメータ診断について、その研究の歴史は長い[1-3]。また、2000年前後から、波長より十分小さいサイズの機能性構造体を設計して、種々の個体材料により巨視的に特異な電磁波パラメータを示す“材料”として、メタマテリアルが注目されて種々の研究が行われている（メタマテリアル研究の源流としては、人工誘電体の研究等、これも歴史として十分に長い）[4,5]。我々は、これら2つの電磁波媒質が有機的に融合すると考え、「プラズマ・メタマテリアル」と提唱して2007年頃研究を始めた[6,7]。その後、研究は世界中に広がり、米国、欧州、南米、中国、アジア各国で多種多様な研究が行われている。米国では、複数の研究機関にまたがる研究プロジェクトも開始された。

我々がこの研究を推進するにあたっては、まずは2000年頃から伸展した「マイクロプラズマ」の研究[8,9]が大変重要であった。それまでに我々が研究対象としてきたプラズマは、少なくともcm以上のサイズがあって真空チャンバーの中で低圧下で生成されるものであったし、半導体工場中で多用されたプロセスプラズマも同様であった。プラズマ分野の研究の動向は、フラットパネルディスプレイや太陽電池のプロセスを念頭において、大型化（大面積化）に重点が置かれていた。しかし、プラズマテレビの開発において数100ミクロンの寸法の微小なプラズマ現象が現れ、ナノテクノロジーのブームと共にプラズマの微小化によっても新たな学術的側面が開ける、という期待の下に、研究が進められた。結果として、ミリメートルサイズ以下、最小のものとしては数100ナノメートル程度のプラズマの生成が可能となり、これは微小な固体構造の中にプラズマ媒体を埋め込むことができるようになったことを意味する。その“微小な固体構造”は、メタマテリアルであってもよいのである。

まず、我々は、プラズマをmmサイズ以下に微小化して、そのマイクロプラズマそのものの電磁波媒質としての特性を調べた。例えば、マイクロプラズマの周期的な2次元集合体に電磁波（マイクロ波～ミリ波）を入射することで、禁制帯が発現し、フォトニック結晶と同様の特徴が明らかとなった[10-15]。そして、2次元配置の格子定数を変化させると禁制帯位置が制御でき、プラズマのオンオフの変化で動的に禁制帯を制御できることがわかった。さらに、そのような構造体の解析において、周期的な集合体中を伝搬する電磁波の分散関係（バンド図でもある）を計算すると、電磁波の周波数がプラズマ周波数より低い領域で、群速度が遅い特異なブランチが多数出てくることに気付いた[12-15]。実際に1次元のマイクロプラズマ列に沿ってマイクロ波を導波する実験をしてみても、同様の波動伝搬が多数見られ、最終的に表面プラズモンと同様の局在表面波伝搬であると結論付けた[16]。

そして、次にプラズマと固体のメタマテリアル構造の複合体を作製し、その電磁波応答を調べた[6,7,17-20]。これまでに、メタマテリアルとして、巨視的透磁率が負となる2つの

構造と、巨視的誘電率を制御する構造を用いて、それらにプラズマを組み合わせることで検討をおこなってきている。また、複合する機能の第1番目としては、プラズマの誘電率とメタマテリアルの透磁率（あるいは誘電率）で屈折率が融合的に決まることであるが、最近の検討でさらに高次に非線形性の発現がそれぞれ単独では得られない効果として特筆できることがわかり[19,20]、これらについて本稿で説明を行う。以下、まず2章でプラズマ・メタマテリアルの一般的な特質を示し、3章で具体例について説明する。4章の今後の展望にも重きをおいて、さらに広がりうる領域と可能性について説明したい。

## 2. プラズマ・メタマテリアルの特質：電磁波媒質としての有用性

もしプラズマが、ナイフでチーズを切り取るようにどんな形状・大きさにも加工できるとすれば、またそのそれぞれの形状・大きさでチーズの濃さを調整するように誘電率の値が制御可能であれば、大変素晴らしい電磁波媒質となるだろう。しかし、現実はそのようではなく、このような大きさならば誘電率値はどれくらい、という制限がつく。一般的には、プラズマのサイズが小さくなれば、電子密度が高くなり、誘電率値（ただし負の値）が大きくなる。しかも、プラズマは周波数分散性を持ち、その誘電率は周波数によって大きく変化する。これらの制約条件がうまくクリアできれば、プラズマはメタマテリアルの構成要素となりえるが、このように考えてみると、本当にうまくいくのか、と一見気が遠くなるだろう。この複雑な事情は、実は極めてうまいパラメータセットで解決できて、我々が3章で示すような検討においてほとんど支障を感じることはなかった。いわば、天の配剤とでも言えるような絶妙な（偶然の？ それとも何らかの必然性の有る？）現実を、本章で説明する。

### 2.1 プラズマの寸法と電磁波の波長の関係

プラズマ状態を作り出すためにはいろいろな方法を取ることができるが、我々は単一のプラズマを作りたいのではなく、メタマテリアル構造間に埋め込むようなアレイ状のプラズマ集合体を生成したいので、ここでは2つの電極間のグロー状放電を利用すると仮定しよう。すると、電極間距離と（放電形成用の）中性気体（アルゴン

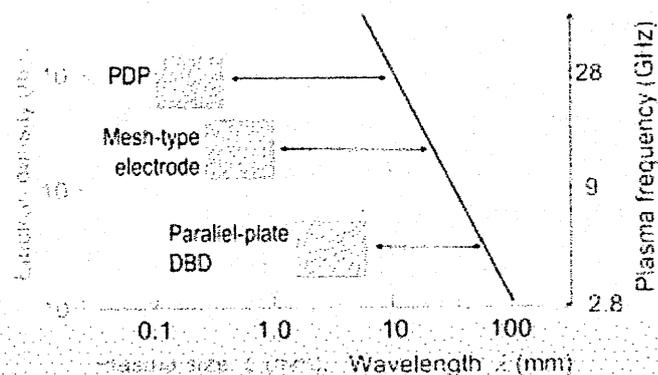


図1. 種々のプラズマと電子密度、ならびにプラズマ周波数と電磁波の波長の関係。図中のプラズマの診断結果は、“PDP” (Plasma Display Panel) は[22]、“Mesh-type electrode”は[23,24]、“Parallel Plate DBD” (Dielectric Barrier Discharge)は[25]を参照した。

など)の密度(圧力)の間には、古くからパッシェンの法則として知られた法則がある[21]。これは、もし電極間距離(今の場合、個々のプラズマの寸法)を固定したら、動作圧力は大体2桁程度の変化の幅で限定される(逆に2桁の幅で変えられる、とも言える)ことを意味する(中性粒子密度の別の効果に関しては、再び2.2節で取り上げる)。さて、ではこのとき、電極間距離に対して、生成されたプラズマ内の(誘電率値を規定する)電子密度はどのように変化するだろうか。この事柄に関する法則は、これまで明確には指摘されていないので、我々のグループで行ってきたプラズマ診断結果[22-25]をまとめて経験則として示すことにする(図1)。このように、電極間距離(プラズマのサイズ)が小さくなると電子密度は高くなるのは、一連のマイクロプラズマの研究成果からほぼ間違いない。

電子密度が決まると、プラズマ内部の誘電率が決まる。比誘電率は、

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2(1 + j\nu_m/\omega)} \quad (1)$$

と表される。ここで、 $\omega_{pe}$ はプラズマ周波数であり、 $\omega_{pe}^2$ が電子密度に比例する。また、 $\omega$ は電磁波の角周波数であり、 $\nu_m$ はプラズマ中の電子と中性気体粒子の間の衝突周波数である(当然、中性気体粒子の密度に強く依存する)。この式は、プラズマを流体と見なした運動方程式とマクスウェル方程式から導かれる[7]。

ここで出てきたプラズマ周波数という量は、無衝突プラズマ(中性粒子密度をゼロ、電子が中性粒子と衝突しないとしたときの完全電離プラズマ)の場合に誘電率がゼロになる値である。大まかな評価をするために、プラズマ周波数においてプラズマ・メタマテリアルが動作すると仮定しよう。すなわち、プラズマ周波数と同じ周波数の電磁波を考えて、その波長を見積もってみる。すると、図1のようになり、電磁波の波長よりもプラズマのサイズは数分の1から約1桁以上小さく、そのようなプラズマのサイズは、メタマテリアルの成立条件を満たして、1波長内にいくつもプラズマを埋め込んで巨視的パラメータ制御に資することが可能となる。おまけに、この傾向は、マイクロ波からミリ波帯においては、周波数が変わっても同様に成り立っている。つまり、この周波数帯では、プラズマ・メタマテリアルにおいて、プラズマの誘電率はメタマテリアルの特性にうまく反映させることができそうである。

さて、形状に関連して出てくる可能性のあるもう一つの指摘は、「たとえプラズマが適切なサイズで生成できても、プラズマ内部の電子密度の分布は不均一であり、制御できないのではないか」という点がある。この指摘はその通りであるが、個々のプラズマのパラメータをプラズマ間で揃えることができれば、プラズマ内部の不均一分布は我々の検討の中では大きな問題とはなっていない。つまり、形状とその中での最大の電子密度値が制御できていれば、プラズマ内部の電子密度分布は流体モデルの方程式と境界条件でほぼ一定に決まる。そして、例えば、プラズマの2次元周期構造の場合、まずプラズマ内部に大きな電子密度分布があっても、理論的には無いときとほぼ同様の分散関係・禁制帯生成が期待

でき、さらに実験的にも、理論予測通りの禁制帯を観測した[12,13]。もちろん、プラズマ内部の電子密度分布をきちんと制御できればさらに高機能化する可能性は有る。

## 2.2 プラズマの誘電率可変性

次に、では誘電率ゼロの周波数の近辺で、プラズマの誘電率値はどのように可変であるかを考えてみよう。先に示した式

(1) で示したプラズマの複素誘電率を、様々なパラメータでプロットしてみた(図2)[7,14]。

経験的には、電子密度の実際の

制御性は、ある固定した電極構造において約1桁(場合によっては2桁程度)は確保できる。また、先に述べたように、中性粒子密度(気体圧力)も、1~2桁の変化が可能である。ここで示した電子密度値や気体圧力値は、3章で示す我々の研究結果の領域の値である。すなわち、気体の圧力を適切に設定し、その上でプラズマ生成用電力を制御しながら投入すると、比誘電率の複素平面のうち、実軸として+1以下の負の広範囲の領域にわたって実部・虚部の制御が可能であることがわかる。

## 2.3 種々のプラズマ・メタマテリアル構造

以上にみてきたように、プラズマはメタマテリアルの構成要素として、サイズの上でも誘電率の値でも、うまく機能しそうであり、他の固体材料と比較して可変性という大きな優位性を主張できそうである。そこで、実際にどのような形態がありえるのかを、以下で概観してみたい。ここでは、メタマテリアル研究で注目されてきた、負誘電率状態に特化して説明する。(正の比誘電率領域の制御も、禁制帯制御[10-13]や擬似表面プラズモン制御[12,15,16]で十分に価値があるが、以下では省略する。)

ただ単に、単一のバルクプラズマが負の誘電率値を持つとすると、自由空間を伝搬してきた電磁波はその中には入り込めない(エバネッセント波となる)(図3(a))。実はこのようなシンプルな系でも、完全吸収体への応用[26,27]などで興味深い物理はあるが、機能性構造体とは言い難いので、メタマテリアルとしては除外してよいだろう。

一方で、負の誘電率値を持つ単一のバルクプラズマに電磁波が入射する状態であっても、その境界領域に着目すると、表面波の伝搬媒質となりうる[28-33](図3(b))。この正/負の

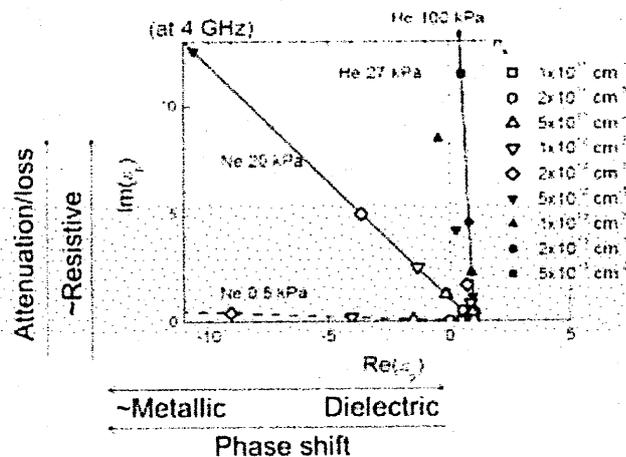


図2. プラズマ中の電子密度と中性気体の圧力・種類により決まる、プラズマの比誘電率[7,14]。+1.0+0j の点が、真空中の比誘電率を表す。

誘電率境界領域の波動伝搬の研究の歴史は古いが、プラズマの場合は端部に有意な大きさの電子密度勾配領域があるので比較的広い周波数範囲で表面波を支持できることを我々は指摘した[16]。

すると、孤立した負誘電率プラズマがマイクロプラズマとして複数隣接して存在するとき、表面波がプラズマ周囲に巻きつくように伝搬することが容易に推定できる(図3(c))。これは、負誘電率プラズマの周期構造体について伝搬電磁波を計算すると、誘電率が負となるプラズマ周波数以下の領域で、群速度が極めて小さなフラットバンドとして分散曲線が現れることにも現れている[12,15]。そして、3.1節で説明するように、我々の実験検討や数値計算において、この局在表面波の存在が確認されている。

そして、固体のメタマテリアル構造と複合したプラズマ・メタマテリアル[7,17,18]においては、プラズマの誘電率が負、メタマテリアル部の透磁率が負、という設定において、入射電磁波は構造内で伝搬波として存在する(図3(d))。屈折率が負となり、伝搬波動のポインティングベクトルは入射電磁波の入射方向に、位相速度は入射方向と反対方向の向きとなる。この特性については、実験結果について3.2節で説明する。

### 3. プラズマ・メタマテリアルの具体例

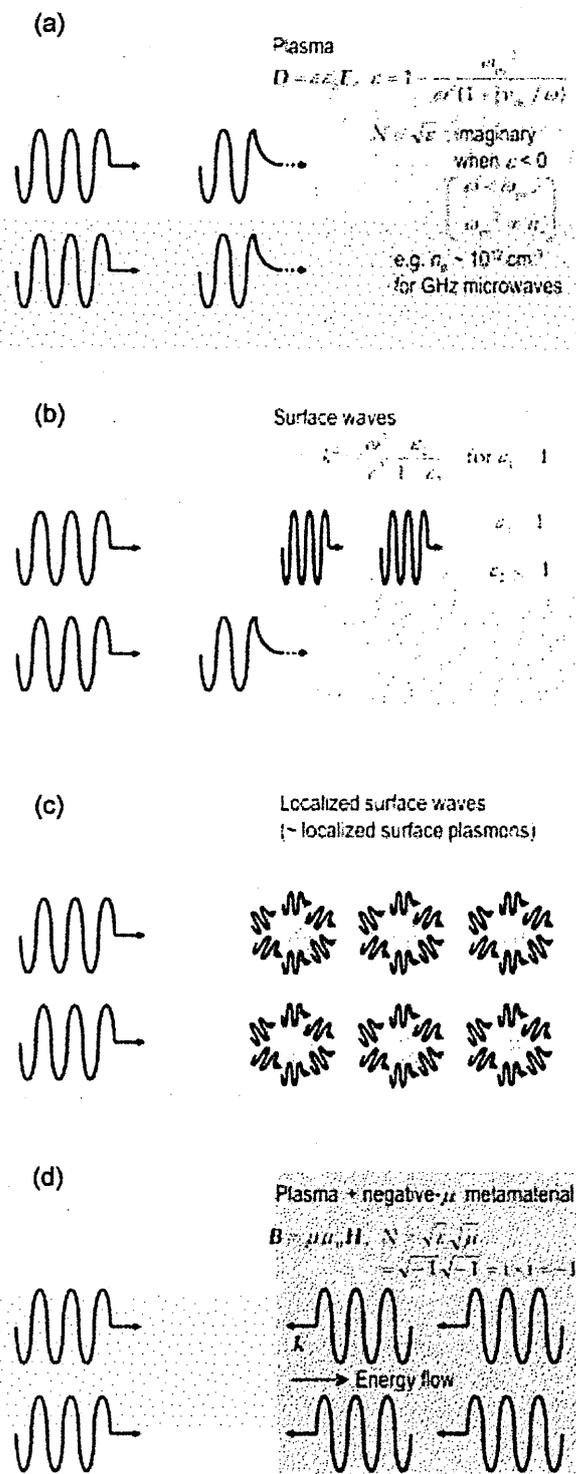


図3. 誘電率が負のプラズマによる、種々の電磁波制御。(a)電磁波反射体・吸収体。(b)表面波支持媒質。(c)局在表面波伝搬形態。(d)透磁率が負の媒質との複合体。

### 3.1 可変導波路および可変位相シフター兼アッテネータ（複素振幅制御器） [34]

まず、小電力マイクロ波の伝搬の制御について、プラズマ・メタマテリアルを用いた2つの例を示そう。

先に示した負の誘電率のマイクロプラズマアレイを用いて、機能性構造体を作ることができる。すなわち、1次元等のチェーン状構造を作製し、端部からマイクロ波を入射／励起すると、チェーン構造に沿って伝搬する。チェーン構造が真っ直ぐの場合、もちろんマイクロ波は直進する。一方、チェーン構造が90度曲がっていても、マイクロ波もプラズマ列に沿って曲がる。これは、先の図に示したように、表面波伝搬状態においては、微視的には波長が自由空間の場合よりも短くなるため、マイクロプラズマの周囲をぐるっと回り、どの方向の伝搬にも適度に結合できることによる。おまけに、チェーン列が分岐している場合にも、列に沿ってマイクロ波は分波する。これも同様の理由による。さらに、分岐先の誘電率（電子密度）が変われば、分散関係に応じて電力分配率が異なる。このように、負の誘電率のマイクロプラズマアレイは、極めて柔軟な可変導波路・電力分配器として働く。

次に、負の透磁率体と組み合わされた負の誘電率のマイクロアレイについて説明する。負の透磁率体は、金属細線の2重らせん構造により実現し[17,18]、負誘電率マイクロプラズマアレイは前述と同様の寸法・パラメータである。負の透磁率体を追加することで、構造全体としては負屈折率体となり、表面波は伝搬しなくなり、複素的な振幅を制御可能なフィルターとして動作する。すなわち、金属細線の2重らせん構造のアレイの透磁率が正の領域では、位相は変わらずに振幅だけ制御するアッテネータとなる。一方で、金属細線の2重らせん構造のアレイの透磁率が負の領域では、位相も振幅も変化させる位相シフター兼アッテネータとして働く。我々の実験セットアップにおいては、プラズマ生成の条件が比較的高圧力の状態に限定されたため、純粋な位相シフターのための機能は観測されなかったが、原理的にはより低圧力での動作を可能とすることでこれも実現可能であろう。屈折率値としては、電子密度が最大となる条件で-2から-3の値であることが確認できた。

以上の2例に示したように、プラズマの動的性質が良く現れた可変マイクロ波素子をプラズマ・メタマテリアルで実現できた。

### 3.2 マイクロ波大電力スイッチ（双安定な非線形素子） [20,35]

元来、プラズマは、かなり強い非線形性を帯びている。つまり、プラズマ・メタマテリアルの場合においても、伝搬マイクロ波の電力を増やして非線形性が顕在化する条件では、その特性はどうなるだろうか。この観点でも、プラズマとメタマテリアルの複合構造は新規の状態を示すことが我々のこれまでの理論検討と実験検証で明らかになっている。

まず、理論的にどのようなことが予測できたかについて示そう。負の透磁率体をメタマテリアル構造で実現し、そこに大電力のマイクロ波を入射する。電力レベルは、通常のマ

マイクロ波プラズマ生成と同様に、せいぜい1 kW程度と、電子レンジレベルである。プラズマ生成の背景となる透磁率が正か負かで、高密度プラズマ（誘電率が負）生成前後のマイクロ波の伝搬が大きく異なる。つまり、透磁率が正なら、プラズマ生成前（誘電率が正）はマイクロ波が構造内に伝搬するが、プラズマ生成後（誘電率が負）は屈折率が虚数となってマイクロ波は伝搬できなくなる。故に、通常のマイクロ波によるプラズマ生成では、誘電率がゼロとなる遮断密度までしか、プラズマ生成が難しい（周波数が2.45 GHzのとき、遮断密度は $7 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ 。この密度は半導体プロセス用のプラズマ源としては十分な値とは言えない）。一方、透磁率が負なら、プラズマ生成前（誘電率が正）はマイクロ波が構造内に伝搬できないが、プラズマ生成後（誘電率が負）は屈折率が負の実数となってマイクロ波は伝搬可能となり、容易に高密度プラズマが生成されることが期待される。従って、問題となるのは、誘電率が正の領域で負の領域に入るまで、エバネッセント波で何とか電子密度が上昇しないとイケない。詳細は省略するが、結果として透磁率が負の場合は、（非線形動力学用語を用いると）2つのサドルノード分岐現象が起き、双安定状態（同じ入射電力に対し、正負2つの誘電率が安定解として存在する）が起これる。

実際に実験してみると、背景の透磁率が正と負の場合で明らかな違いが観測された。マイクロ波電力を上下させると、透磁率が正の場合は、誘電率の正負の入れ替わりの閾値入射電力が一定とはならない。これは、プラズマ生成のタイミングが統計的にばらばらとなっていることを意味する。一方で、透磁率が負の場合は、誘電率の正負の入れ替わりの閾値入射電力がほぼ一定となり、10~100 Wの範囲で双安定状態を示した。これは、この構造（透磁率が負で、気体がプラズマ生成条件を満たすような低圧力で封入してある容器）が数10 W オーダーのマイクロ波のスイッチとして動作可能であることを示している。封入気体の圧力を種々に調整することで、kW オーダーまでのマイクロ波のスイッチ機能を果たせるだろう。

#### 4. まとめと今後の展望

プラズマ・メタマテリアルについて、これまで固体材料を用いて研究されてきたメタマテリアルとは異なる特徴を示し、可変性や非線形性の点で（学術的興味深さも産業応用上も）有望である。特に、プラズマ・メタマテリアルが、プラズマにより誘電率を制御し、メタマテリアル構造により透磁率を制御することができ、屈折率を負とすることができるこ

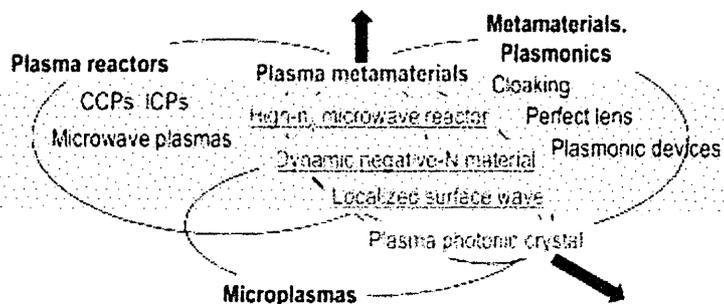


図4. プラズマ・メタマテリアル研究の学術的位置づけ。

とが示せた。非線形動力学上の分岐現象も誘発し、大電力マイクロ波素子としての応用も期待される。この研究は、これまでプラズマ分野で行われてきたプラズマ源に関する研究と、メタマテリアル分野の研究、そしてマイクロプラズマの研究の3者にまたがる学際領域研究である(図4)。

最後に、今後の研究の展開として、以下の可能性を指摘しておきたい。指摘した関連3分野の枠に留まらず、発展していくものと考えている。

#### 4.1 非線形光学素子への展望

非線形動力学としての解釈の他に、非線形光学素子としての機能も期待できる。基本波のマイクロ波を投入すると、高調波生成が観測される可能性があり、現在詳細なデータ取りを行いつつ、その機構を明らかにする検討を行っている。

#### 4.2 高周波化への展望

我々のプラズマ・メタマテリアルの報告に対し、「通常のメタマテリアルは可視光領域を目指した検討に入っているが、プラズマ・メタマテリアルはどうか」、「通常のメタマテリアルに対して、何が一番の特質なのか」という指摘をいただくことがある。つまり、周波数はどこまで上げられるか、ということに関心が集まっているといえるだろう。高周波化は、同様のプラズマ生成法の延長線上として、マイクロプラズマ研究の成果からテラヘルツ領域まで対応可能と考えている。一方、それ以上高い周波数への対応については、産業応用可能な条件をつけると、そのままでは難しい。

その対策の1つとして、我々は光応答性を示すプラズマ類似の可変性媒質を設計しようとしている。例えば、可動性のある粒子、その粒子への導体メタマテリアル構造の付与、といった取り組みである。導体メタマテリアル構造の付与については、フォトマスクなどのトップダウン設計はあまりに高価であり、利用が難しい。そこで、プラズマプロセスにおける自己組織化効果の適用を検討している。

#### 4.3 欠陥誘起ツールとしてのマイクロプラズマ利用

メタマテリアルとプラズマの組み合わせについて、通常の固体メタマテリアルの一部にマイクロプラズマを生成し、マイクロプラズマ部を実質的にメタマテリアル構造内への動的欠陥誘起として使うアイデアがある[36]。このアイデアを我々も利用しようとしていて、メタマテリアル構造内に、1つの可動な $\mu$ プラズマを生成することで点欠陥を誘起する検討に着手している。目標として、誘電率イメージングセンサーとしての可能性を探っており、将来的には病変部の安価なベッドサイド診断手法への適用を考えている。

#### 謝辞

本研究の一部は、独立行政法人新エネルギー・産業技術総合開発機構の平成18年度産業

技術研究助成事業、ならびに日本学術振興会（文部科学省）の科学研究費補助金により行われました。

#### 参考文献

- [1] T.H. Stix, *The Theory of Plasma Waves* (McGraw-Hill, New York, 1962).
- [2] V.L. Ginzburg, *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma* (Pergamon Press, Oxford, 1964).
- [3] D.G. Swanson, *Plasma Waves* (Academic Press, Boston, 1989).
- [4] *Advances in Electromagnetics of Complex Media and Metamaterials*, edited by A. Sihvola, (Kulwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002).
- [5] L. Solymar and E. Shamonina, *Waves in Metamaterials* (Oxford University Press, Oxford, 2009).
- [6] O. Sakai, T. Sakaguchi, T. Naito, D.-S. Lee, and K. Tachibana, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **49**, B453 (2007).
- [7] O. Sakai and K. Tachibana, *Plasmas Sources Sci. Technol.* **21**, 013001 (2012).
- [8] K. Tachibana, *IEEJ Trans. Electr. Electron. Eng.* **1**, 145 (2006).
- [9] F. Iza, G. J. Kim, S. M. Lee, J. K. Lee, J. L. Walsh, Y. T. Zhang and M. G. Kong, *Plasma Process. Polym.* **5**, 322 (2008).
- [10] O. Sakai, T. Sakaguchi, and K. Tachibana, *Appl. Phys. Lett.* **87**, 241505 (2005).
- [11] O. Sakai, T. Sakaguchi, and K. Tachibana, *Contrib. Plasma Phys.* **47**, 96 (2007).
- [12] O. Sakai, T. Sakaguchi, and K. Tachibana, *J. Appl. Phys.* **101**, 073304 (2007).
- [13] T. Sakaguchi, O. Sakai, and K. Tachibana, *J. Appl. Phys.* **101**, 073305 (2007).
- [14] O. Sakai, T. Naito, and K. Tachibana, *Phys. Plasmas* **17**, 057102 (2010).
- [15] O. Sakai and K. Tachibana, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **35**, 1267 (2007).
- [16] O. Sakai, T. Naito, and K. Tachibana, *Plasma Fusion Res.* **4**, 052 (2009).
- [17] O. Sakai, T. Naito, T. Shimomura, and K. Tachibana, *Thin Solid Films* **518**, 3444 (2010).
- [18] O. Sakai, T. Shimomura, and K. Tachibana, *Phys. Plasmas* **17**, 123504 (2010).
- [19] O. Sakai, *J. Appl. Phys.* **109**, 084914 (2011).
- [20] O. Sakai, S. Iio and Y. Nakamura, *Plasma Fusion Res.* **8**, 1406167 (2013)
- [21] A. von Engel, *Ionized Gases* (Clarendon, Oxford, 1965), p. 171.
- [22] K. Tachibana, Y. Kishimoto, S. Kawai, T. Sakaguchi and O. Sakai, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **47**, A167 (2005).
- [23] O. Sakai, Y. Kishimoto and K. Tachibana, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **38**, 431 (2005).
- [24] Y. Ito, O. Sakai and K. Tachibana, *Plasma Sources Sci. Technol.* **19**, 025006 (2010).
- [25] K. Tachibana, Y. Kishimoto and O. Sakai, *J. Appl. Phys.* **97**, 123301 (2005).
- [26] R. J. Vidmar, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **18**, 733 (1990).
- [27] Y. P. Bliokh, J. Felsteiner and Y. Z. Slutsker, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 165003 (2005).
- [28] A. W. Trivelpiece and R. W. Gould, *J. Appl. Phys.* **30**, 1784 (1959).
- [29] J. C. Nickel, J. V. Parker and R. W. Gould, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 183 (1963).
- [30] J. V. Parker, J. C. Nickel and R. W. Gould, *Phys. Fluids* **7**, 1489 (1964).
- [31] H. C. Hoh, *Phys. Rev.* **133**, A1016 (1964).
- [32] D. J. Cooperberg, *Phys. Plasmas* **5**, 862 (1998).

- [33] Y. Yasaka and H. Hojo, *Phys. Plasmas* **7**, 1601 (2000).
- [34] O. Sakai, J. Maeda, T. Shimomura and K. Urabe, *Phys. Plasmas* **20**, 073506 (2013).
- [35] Y. Nakamura and O. Sakai, *Jpn. J. Appl. Phys.* **53**, 03DB04 (2014).
- [36] J. Lo, J. Sokoloff, Th. Callegari and J. P. Boeuf, *Appl. Phys. Lett.* **96**, 251501 (2010).

電力回収機構を備えたアウトフェーズ型増幅器  
に関する一検討

前田 祐人      塩見 英久      岡村 康行

大阪大学大学院基礎工学研究科

平成 26 年 8 月 27 日

於 大阪大学

## 概要

現在,基地局における消費電力削減への要求が高まっており,将来の基地局は小型で安価,低消費電力を実現するために CMOS 集積化されたものになると考えられている.そこで,当研究室ではアウトフェーズ増幅器に注目している.アウトフェーズ増幅器は CMOS 集積化に適した高効率アンプであると考えられている.しかし,現在のアウトフェーズ増幅器には信号合成の際に逆相モード電力が抵抗で消費されて損失になるという課題がある.そこで,本研究では,逆相モード電力を回収し,安定化した電源にした後にアンプの電源として再利用する電力回収機構を組み込んだアウトフェーズ増幅器を構成することを目指す.

電力回収機構について検討し,電力回収回路を構成するために必要な $180^\circ$ ハイブリット結合器と整流回路を設計,試作し動作を確認した.電力回収回路を構成し,正弦波とその逆相の正弦波を合成して出力する際に失われる逆相モード電力の回収実験を行った.この時,最大で14.69%の逆相モード電力を回収することができた.また,高効率な F 級増幅器を設計し最大電力付加効率 71.096%を達成できることを確認した.

## 1. はじめに

現在,基地局における消費電力削減への要求が高まっている.近年の携帯無線端末の爆発的な普及や,LTE 等の新たな通信方式に対応するための基地局数の増加等の理由で,通信網全体での消費電力が増大していることが原因である.図 1.1 のグラフに示したように,基地局における消費電力は年々増加の一途をたどると予想されている.

また,情報伝送量増加に伴い,将来的にはミリ波等の,現在より高い周波数を通信に利用すると考えられており,それに伴い伝送距離が短くなる.そこで1つの基地局で広い範囲をカバーする現在のマクロセルから,狭い範囲をカバーする基地局を多数配置するマイクロセルの形態へと移行すると予想されており,小型で安価,低消費電力といった基地局が求められる[1].そこでこれからの基地局は,安価で大量生産が可能であり,デジタル処理が行い易いといった特徴を持つ CMOS 集積化されたものになると考えられている.

基地局における電力削減法として高効率な非線形増幅器を使用することが挙げられるが,非線形増幅器には信号の歪みによる情報の誤りが生じるという問題がある.実際に使用されている高効率アンプに,図 1.2 に示す線形増幅器と非線形増幅器を組み合わせて使用するドハティ増幅器があるが,化合物半導体で構成されているため小型化が困難であり,今後の基地局に期待される CMOS 集積化には適さないと考えられる.

そこで,当研究室ではアウトフェーズ増幅器に注目している.アウトフェーズ増幅器は図 1.3 に示すアウトフェーズ型変調器における増幅方法であり,簡素なアナログ回路で構成可能なため,CMOS 集積回路化するのに適していると考えられる.しかし,現在のアウトフェーズ増幅器には信号合成の際に逆相モード電力が抵抗で消費されて損失になるという課題がある.そこで,本研究では,図 1.4 のように,逆相モード電力を回収し,安定化した電源にした後にアンプの電源として再利用する電力回収機構を組み込んだアウトフェーズ増幅器を構成することを目指す.

電力回収回路を構成し,正弦波とその逆相の正弦波を合成して出力する際に失われる逆相モード電力の回収実験を行った.この時,最大で14.69%の逆相モード電力を回収することができた.また,高効率な F 級増幅器を設計し最大電力付加効率 71.096%を達成できることを確認した.

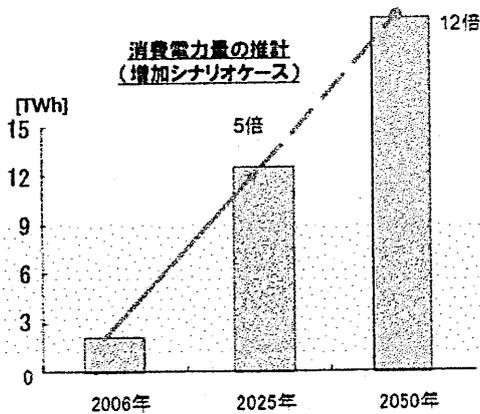


図 1.1: 基地局における消費電力の推移 [2]

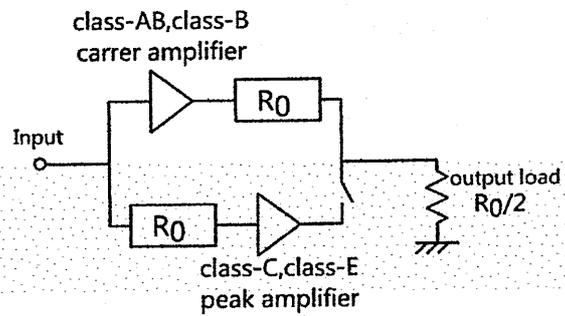


図 1.2: ドハティ増幅器

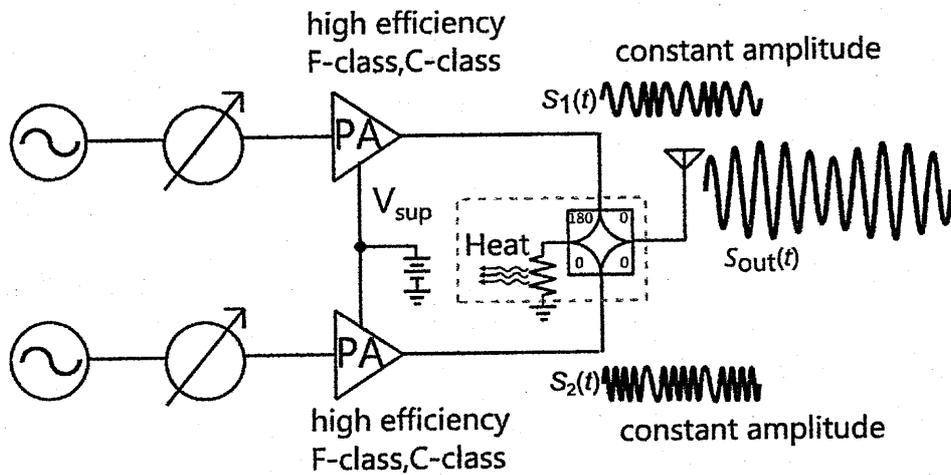


図 1.3: アウトフェーズ型変調器

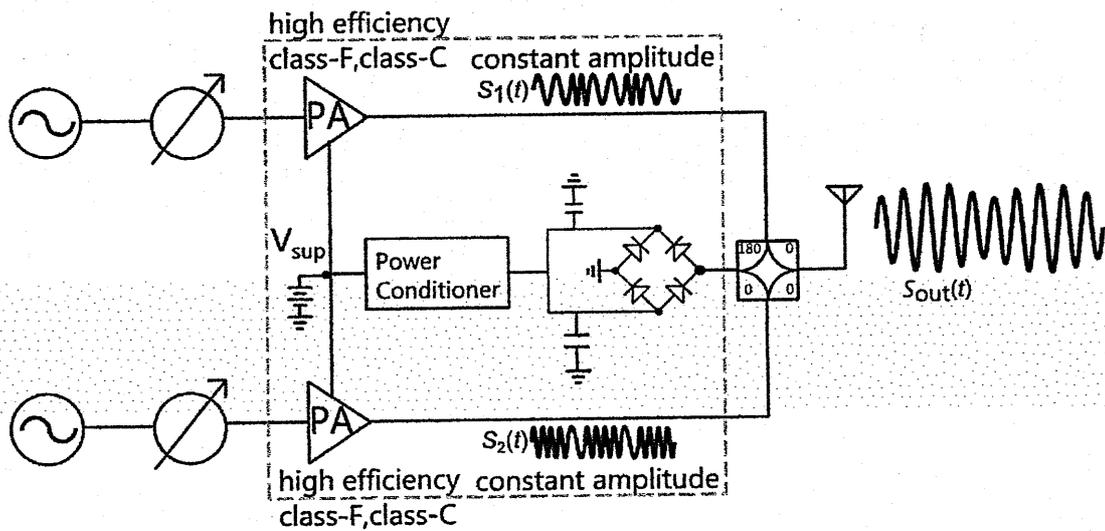


図 1.4: 電力再利用機構を組み込んだアウトフェーズ型変調器

## 2. 原理

### 2.1. マイクロストリップ線路 [3]

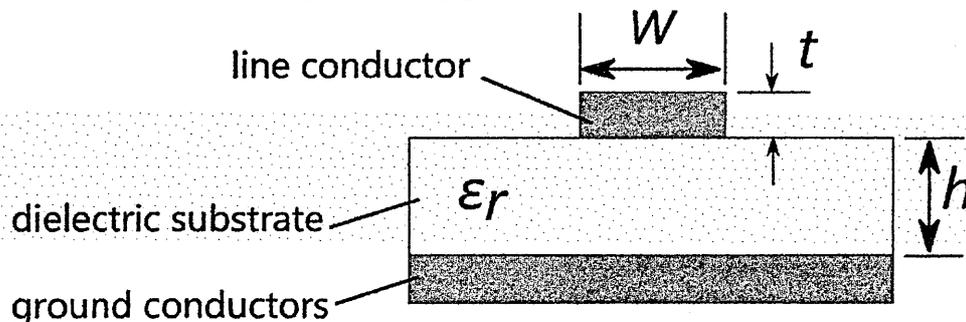


図 2.1.1: マイクロストリップ線路の構造

図2.1.1にマイクロストリップ線路の構造を示す。基板の厚さ $h$ 、比誘電率 $\epsilon_r$ の誘電体基板の片面に接地導体を、もう一方の面に厚さ $t$ 、幅 $W$ の線路導体をつけた構造となっている。このとき、マイクロストリップ線路の実効比誘電率 $\epsilon_w$ は(2.1.1)式のように表される。

$$\epsilon_w = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{10h}{W}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\epsilon_r - 1}{4.6} \frac{t/h}{\sqrt{W/h}} \quad (2.1.1)$$

マイクロストリップ線路の周りの媒質が真空である場合の特性インピーダンスを $Z_c^a$ とすると、(2.1.2)、(2.1.3)式のように表される。

$$Z_c^a = 30 \ln \left[ 1 + \frac{4h}{W_0} \left\{ \frac{8h}{W_0} + \sqrt{\left(\frac{8h}{W_0}\right)^2 + \pi^2} \right\} \right] \quad (2.1.2)$$

$$\Delta W = \frac{t}{\pi} \ln \left. \frac{W_0 = W + \Delta W}{4e} \left[ \left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2 \left(\frac{W}{t} + 1.1\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.1.3)$$

以上の関係より、マイクロストリップ線路の特性インピーダンスは(2.1.4)式のように表される。

$$Z_c = \frac{Z_c^a}{\sqrt{\epsilon_w}} \quad (2.1.4)$$

また、マイクロストリップ線路での実効波長 $\lambda_g$ は、真空中の波長 $\lambda$ を用いて(2.1.5)式のように表される。

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_w}} \quad (2.1.5)$$

## 2.2. アウトフェーズ増幅器[4]

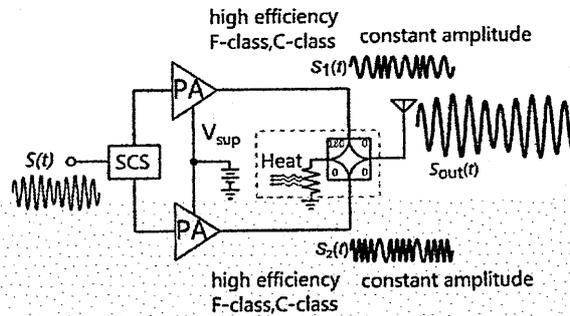


図 2.2.1: アウトフェーズ増幅器の基本構成

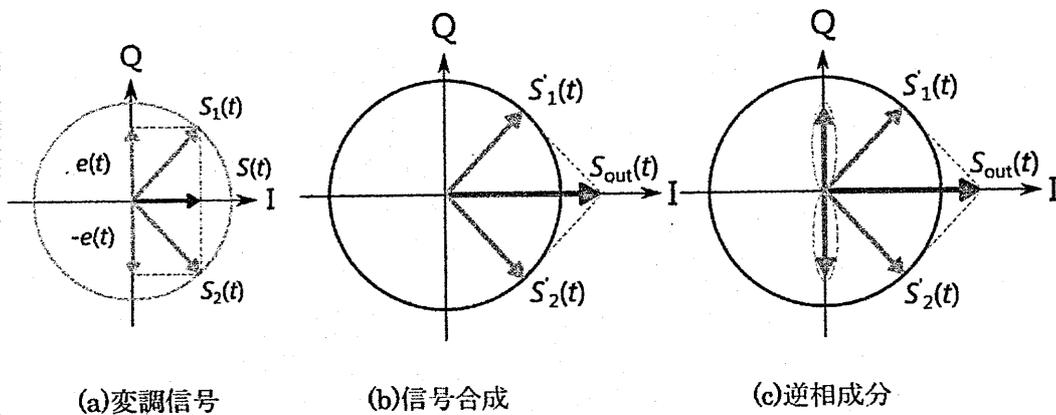


図2.2.2: アウトフェーズ増幅器における信号成分

アウトフェーズ増幅器の考え方は、線形性と高い電力効率を両立させる技術として1935年にHenri Chireixによって提唱された.LINC (Linear amplification with Nonlinear Components)と表記されることもある。

アウトフェーズ増幅器の基本構成を図2.2.1に、図2.2.2にアウトフェーズ増幅器における信号成分を示す。各成分は(2.2.1)~(2.2.4)式のように表される。

$$2S(t) = S_1(t) + S_2(t) \quad (2.2.1)$$

$$S_1(t) = S(t) + e(t) \quad (2.2.2)$$

$$S_2(t) = S(t) - e(t) \quad (2.2.3)$$

$$S_{out}(t) = S'_1(t) + S'_2(t) \quad (2.2.4)$$

アウトフェーズ増幅器は発振器と変調回路、電力増幅器、電力結合器で構成されている。変調回路から出力される信号 $S_1(t)$ 、 $S_2(t)$ は図2.2.2(a)に示すような形になり、ベクトル合成によって任意の変調信号 $2S(t)$ を作り出す。

この際、 $S_1(t)$ 、 $S_2(t)$ それぞれ周波数変調波で定振幅の波形である。定振幅の信号において、振幅成分は情報伝達と無関係になり信号の歪みによる影響はなくなる。よってC級、D級、E級、F級などの効率の良い非線形増幅器を使用することができる。増幅器

で増幅された信号は電力結合器で図2.2.2(b)に示すように足しあわされ,任意の変調信号が線形かつ高効率に増幅された $S_{out}(t)$ として出力される.しかし,この信号合成の方法では図2.2.2(c)で点線で囲んだ部分に示すように,出力に関係しない逆相モードが存在する.

アウトフェーズ増幅器において重要となるのは電力結合器である.高効率なアンプでは特に負荷インピーダンスの変化に影響を受けやすく,それによってアウトフェーズ増幅器内の2つのアンプ間で干渉し合い効率を大幅に下げてしまうことに繋がる.

アンプ間の干渉を防ぐための手法として,アウトフェーズ増幅器内の電力結合器にアイソレーションのとれた結合器を使用することが挙げられる.アイソレーションのとれた結合器として $180^\circ$ ハイブリッド結合器を用いられており, $S'_1(t), S'_2(t)$ の値に関わらずアンプに対して常に一定の入力インピーダンスを示すため,アンプ間の干渉を防ぐことができる.その結果として $S'_1(t), S'_2(t)$ の電力の総和は常に変わらない.

$180^\circ$ ハイブリッド結合器では,図 2.2.2(c)に示した逆相モード,つまり出力されない電力はアイソレーションポートから取り出されて抵抗などで消費される.よって,アンプから送られてくる電力が一定であることから,この逆相モード電力がアウトフェーズ増幅器全体の効率を下げる原因となっている.

### 2.3. ラットレース型 $180^\circ$ ハイブリッド回路

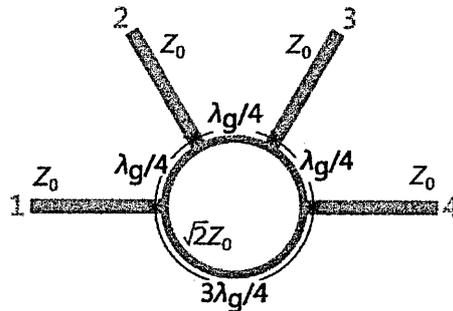


図 2.3.1: ラットレース型 $180^\circ$ ハイブリッド回路の構造

図 2.3.1 にラットレース型 $180^\circ$ ハイブリッド回路の構造を示す. $180^\circ$ ハイブリッド回路は,円周が $3\lambda_g/2$ で特性インピーダンスが $\sqrt{2}Z_0$ の円形のマイクロストリップ線路に,特性インピーダンスが $Z_0$ のマイクロストリップ線路が4つ接続された形状である.

#### 2.3.1. 分配器としての特性

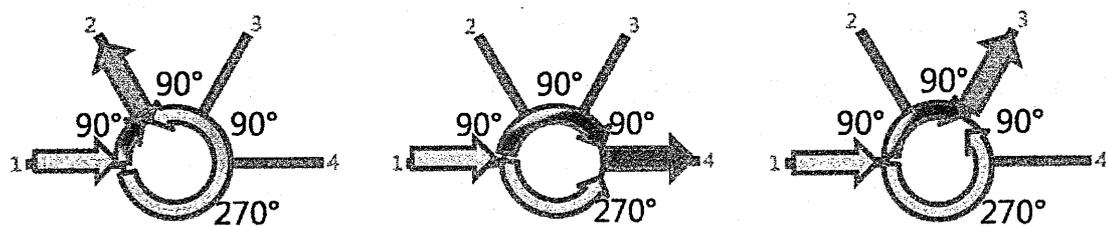
ラットレース型 $180^\circ$ ハイブリッド回路を分配器として使用することを考える.マイクロストリップ線路を伝搬する信号は $\lambda_g/4$ ごとに $90^\circ$ 位相が変化する.よって,1ポートから入力された信号が2ポートに出力される場合,1ポートから時計回りに2ポートへ伝搬する信号は $\lambda_g/4$ の長さのマイクロストリップ線路を伝搬するので $90^\circ$ 位相が変化する.一方,反時計回り

に伝搬する信号は $5\lambda_g/4$ の長さのマイクロストリップ線路を伝搬するので $360^\circ + 90^\circ$ 位相が変化する.この2つの信号が足しあわされた結果,図 2.3.1.1(a)に示したように,1ポートから入力された信号の一部は $90^\circ$ 位相が変化して2ポートに出力されることになる.

次に,1ポートから入力された信号が4ポートに出力される場合について考えると,時計回り,反時計回りに関わらず $3\lambda_g/4$ の長さのマイクロストリップ線路を伝搬するので $270^\circ$ 位相が変化する.つまり,1ポートから入力された信号の一部は $270^\circ$ 位相が変化して4ポートに出力されることになる(図 2.3.1.1(b)).

また,1ポートから入力された信号が3ポートに出力される場合について考えると,時計回りに伝搬する信号は $\lambda_g/2$ の長さのマイクロストリップ線路を伝搬するので $180^\circ$ 位相が変化する.一方,反時計回りに伝搬する信号は $\lambda_g$ の長さのマイクロストリップ線路を伝搬するので $360^\circ$ 位相が変化する.よって,時計回りと反時計回りで伝搬する信号が逆相となって打ち消しあうため,3ポートからは出力されない(図 2.3.1.1(c)).

以上の内容を2~4ポートから入力した場合についても同様に考えることによって決定した $180^\circ$ ハイブリッド分配器の特性を表 2.3.1.1 にまとめる.また,出力ポートから出力される電力は全て等しい.



(a)2ポート出力

(b)4ポート出力

(c)3ポート出力

図 2.3.1.1: 出力ポート別の入力信号の位相変化

表 2.3.1.1:  $180^\circ$ ハイブリッド分配器の特性

入力ポート	出力ポート	出力ポート間の位相差	アイソレーションポート
1	2, 4	$180^\circ$	3
2	1, 3	$0^\circ$	4
3	2, 4	$0^\circ$	1
4	1, 3	$180^\circ$	2

### 2.3.2. 結合器としての特性

ラットレース型 $180^\circ$ ハイブリッド回路を結合器として使用することを考える.図 2.3.2.1に示すように,1ポートと3ポートに信号 $N_{in}, P_{in}$ がそれぞれ入力されたとする.この時,図 2.3.2.2(a)に示すように $N_{in} = S(t) - e(t), P_{in} = S(t) + e(t)$ で表されるものとする.

まず,2ポートから出力される信号について考える.1ポートおよび3ポートと2ポートの間の線路長が等しいため,入力前の位相差を保ったまま2ポートで足しあわされる.よって,図2.3.2.2(b)のように in-phase out(同相成分)として $N_{in}$ ,  $P_{in}$ による任意の変調信号が出力される.

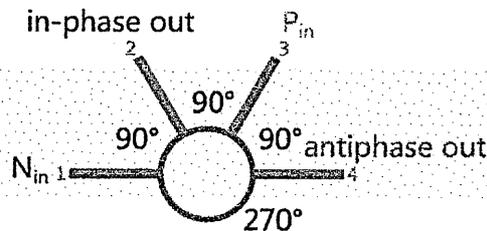
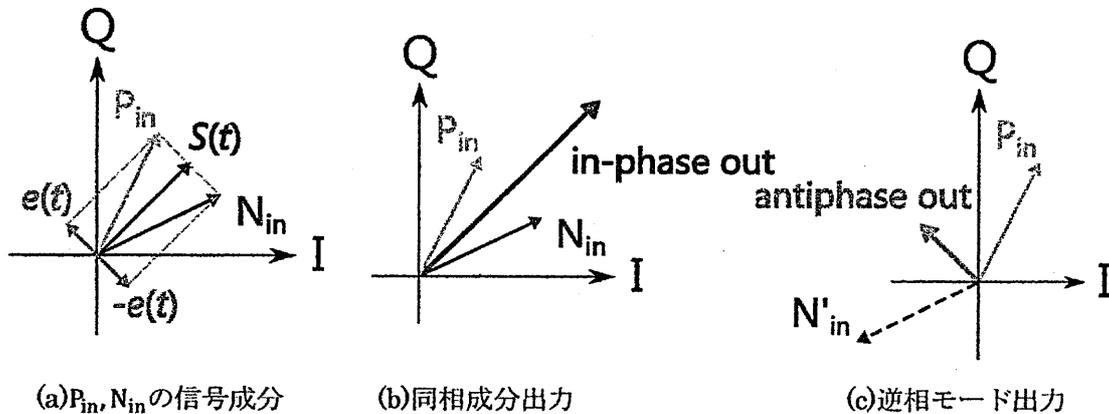


図 2.3.2.1: 180°ハイブリッド結合器の様子



(a)  $P_{in}$ ,  $N_{in}$ の信号成分

(b) 同相成分出力

(c) 逆相モード出力

図 2.3.2.2: 180°ハイブリッド結合器による信号合成

次に,4ポートから出力される信号について考える.1ポートと3ポートから入力された信号は線路長の違いによって180°の位相差がつくことにより,図2.3.2.2(c)のように antiphase out(逆相モード)が出力される.

## 2.4. 整流回路

交流を直流に変換する整流回路にはダイオードが用いられる.図2.4.1に示すように,ダイオードには整流作用があるため,順方向には電流を流し,逆方向には電流を流さない.よって,図2.4.2(a)のような電流がダイオードに流れてきた時,正の電流のみ通過させるので図2.4.2(b)のような電流波形が得られる.ダイオードを1つだけ使用して正のサイクルのみを使用する整流方法を半波整流と呼ぶ.一般に,ダイオードを通過して整流された電流波形は時間変化しているので,平滑コンデンサによってできるだけ時間変化の少ない波形に変えられる.また,複数のダイオードを用いることで,負のサイクルの電流も整流する全波整流という整流方法もある.

電流波形は位相を変化させた電圧波形と考えることができる.一般の全波整流とは異なるが,伝送線路上においては図2.4.3の構造を用いることで,正のサイクルと負のサイクルの電

圧を別々の線路に取り出すことが可能になり,平滑化することによって半波整流の時の2倍の電位差を得ることが可能になる.

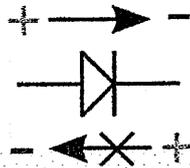
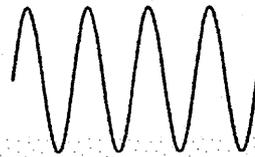
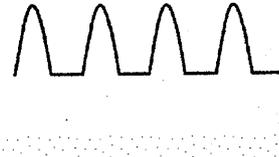


図 2.4.1: 整流作用



(a)



(b)

図 2.4.2: 整流される前の電流波形(a)と整流後の電流波形(b)

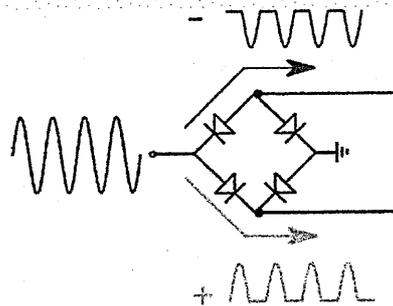


図 2.4.3: 伝送線路における全波整流

## 2.5. F 級増幅器[5]

トランジスタを用いた電力増幅器において,図 2.5.1 に示すようにトランジスタにおける電流波形を半波整流波形,電圧波形を矩形波とすることで,電流波形と電圧波形の重なりをなくしたものを F 級増幅器と呼ぶ.この時トランジスタでの電力消費は零となり,理想的な電力付加効率(PAE)は 100%になる.F 級増幅器の構成を図 2.5.2 に示す.F 級増幅器は B 級にバイアスしたトランジスタと高調波処理を行う F 級負荷回路から構成されている.半波整流電流波形は基本波および偶数次の高調波の合成で表すことができるので,B 級バイアスおよび奇数次高調波に対する負荷インピーダンスを無限大にすることによって得られる.一方,矩形電圧波形は出力電流の逆相の基本波および奇数次の高調波の合成で表せるので,偶数次高調波に対する負荷インピーダンスを 0 とすることによって得られる.ただし,図 2.5.1 に示した理想 F 級動作は無限次数の高調波を処理した場合のものであり,実際に構成可能な有限次数の F 級増幅器での効率は取り扱う高調波の次数によって制限される.

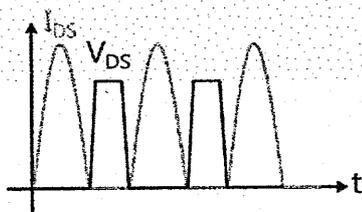


図 2.5.1: 理想 F 級動作時の電流電圧波形

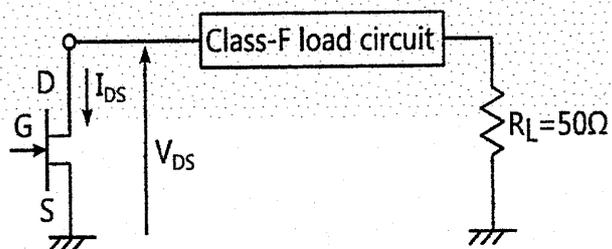


図 2.5.2: F 級増幅器

### 3. 設計・評価

#### 3.1. ラットレース型180°ハイブリッド回路

設計する180°ハイブリッド回路を図 3.1.1 に示す。また、(2.1.1)~(2.1.5)式より表 3.1.1 のように値を決定した.LPKF 社の基板加工器 ProtoMat S43 を用いて実際に作製した180°ハイブリッド回路の写真を図 3.1.2 に示す。

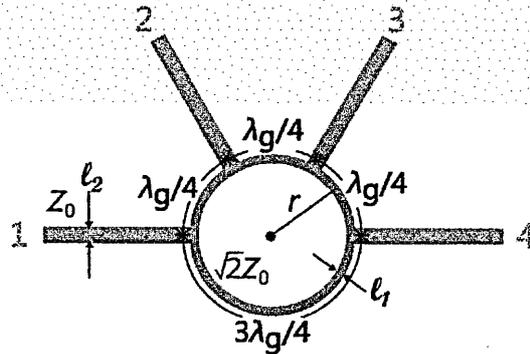


図 3.1.1：設計する180°ハイブリッド回路

表 3.1.1：180°ハイブリッド回路の設計数値

設計周波数f[GHz]	2.4
誘電体基板厚[mm]	0.75
誘電体誘電率	3.7
導体銅箔厚[μm]	18.0
円部分の実効波長 $\lambda_g$ [mm]	75.17
円部分の半径 r[mm]	17.9458
特性インピーダンス $Z_0$ [Ω]	50.0
円部分の線路幅 $l_1$ [mm]	0.84
ポート部分の線路幅 $l_2$ [mm]	1.57

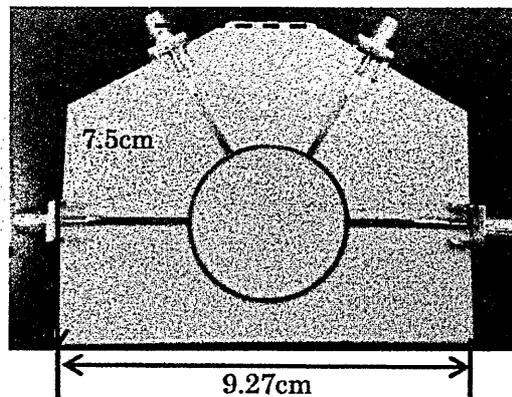


図 3.1.2：実際に作製した180°ハイブリッド回路

次に、ネットワークアナライザを用いて180°ハイブリッド回路の S パラメータを45MHz~7.0GHzの範囲で測定した。1ポートから信号を入力した時のネットワークアナライザから得られた S パラメータを基に、 $S_{11}$ の大きさと出力ポート間(2ポートと4ポート)の位相差をプロットしたグラフを図 3.1.5(a)および(b)に示す。

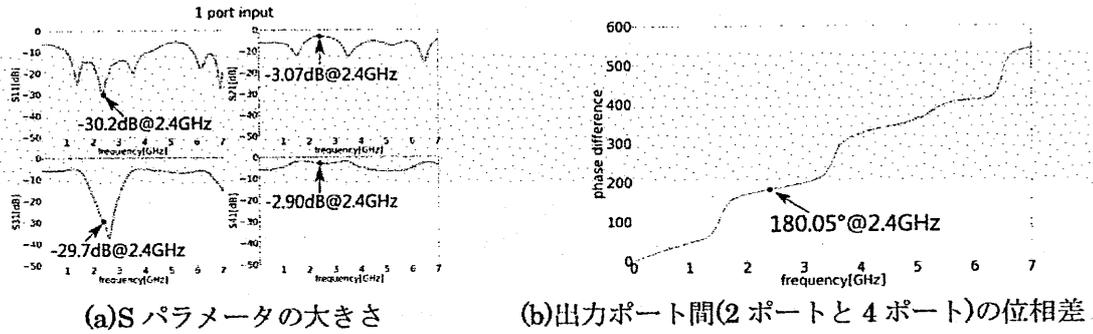


図 3.1.5 : A ポートから信号が入力された時

残りの2ポート,3ポート,4ポートから信号が入力された場合も含めた測定結果を表 3.1.2 および表 3.1.3にまとめる。第2.3章で確認したような特性をもつ180°ハイブリッド回路を作製することができた。位相差の理論値と測定値のずれは製作誤差と考えられる。

表 3.1.2 : 2.4GHz における S パラメータの値

出力ポート 入力ポート	1	2	3	4
1	-30.2dB [ $S_{11}$ ]	-3.07dB [ $S_{21}$ ]	-29.7dB [ $S_{31}$ ]	-2.90dB [ $S_{41}$ ]
2	-3.11dB [ $S_{12}$ ]	-32.1dB [ $S_{22}$ ]	-3.04dB [ $S_{32}$ ]	-32.0dB [ $S_{42}$ ]
3	-29.7dB [ $S_{13}$ ]	-3.10dB [ $S_{23}$ ]	-24.4dB [ $S_{33}$ ]	-3.23dB [ $S_{43}$ ]
4	-2.93dB [ $S_{14}$ ]	-32.0dB [ $S_{24}$ ]	-3.27dB [ $S_{34}$ ]	-24.5dB [ $S_{44}$ ]

表 3.1.3 : 入力ポート別の出力ポートおよび出力ポート間の位相差

入力ポート	出力ポート	出力ポート間の位相差	アイソレーションポート
1	2, 4	180.05°	3
2	1, 3	4.24°	4
3	2, 4	0.29°	1
4	1, 3	184.68°	2

### 3.2. 整流回路

まず初めに、図 3.2.1 の半波整流基本回路を試作した。今回設計した整流回路では、ダイオードの両端の電位差を確実にするためにダイオードの片側をグラウンドに接地させる構造を採

用した.ダイオードはAVAGO TECHNOLOGIESのHSMS-2862を使用した[6].また,入力整合回路を付け足した図 3.2.2 の半波整流回路,および図 3.2.3 の全波整流回路を作製した.これらの等価回路はそれぞれ図 3.2.4(a)~(c)で表される.この時,整流作用を確認するために図 3.2.5 のように発振器から整流回路へ直接正弦波を入力し,出力電圧をDC50Ωで終端したオシロスコープで測定した.-13dBm から 18dBmの範囲で正弦波を入力した時の出力電圧の特性のグラフを図 3.2.6 に,電力回収効率のグラフを図 3.2.7 に示す.整流回路に $x$ [dBm]の電力が入力され  $V$ [V]の電圧がオシロスコープで観測された時の電力回収効率 $\eta_r$ は $\eta_r = \frac{(1000V^2/R)}{(10^{x/10})}$ で求めることができる.また,全波整流回路は 2 つのポートをもち,それぞれ正の電圧と負の電圧が出力される.よって,その差の電圧を出力電圧として計算した.

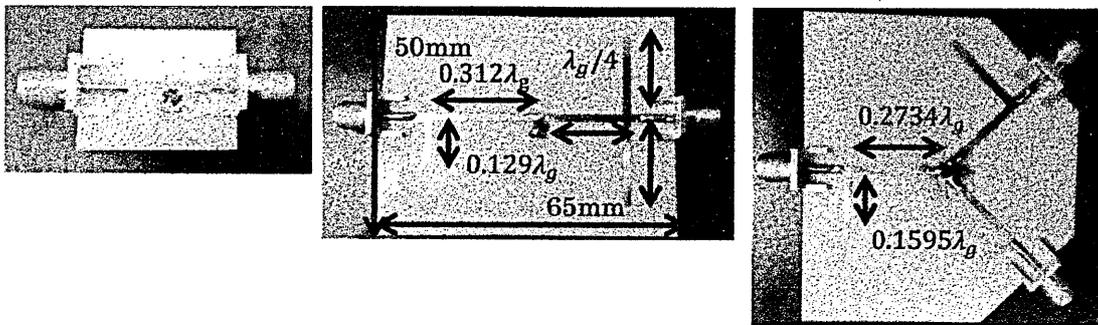
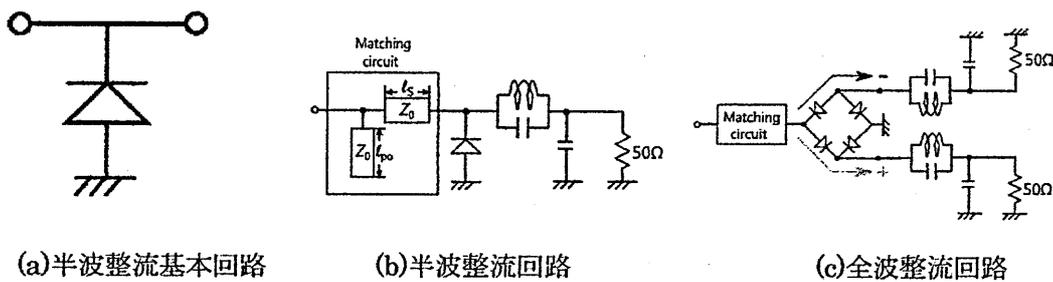


図 3.2.1: 半波整流基本回路 図 3.2.2: 半波整流回路 図 3.2.3: 全波整流回路



(a)半波整流基本回路 (b)半波整流回路 (c)全波整流回路

図 3.2.4: 伝送線路を用いた整流回路の等価回路

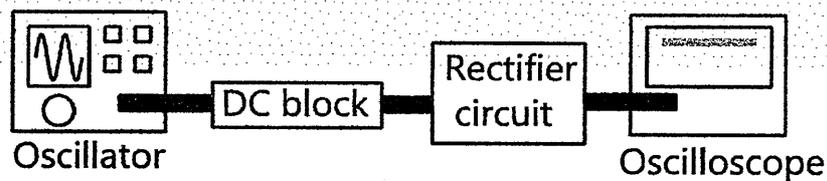


図 3.3.5: 測定系

この全波整流回路に $-13\text{dBm}$  から  $18\text{dBm}$ の範囲で正弦波を入力した時の出力電圧の特性のグラフを図 3.2.6(a)に、電力回収効率のグラフを図 3.2.6(b)に半波整流回路の結果とともに示す。整流回路に $x[\text{dBm}]$ の電力が入力され  $V[\text{V}]$ の電圧がオシロスコープで観測された時の電力回収効率 $\eta_r$ は $\eta_r = \frac{(1000V^2/R)}{(10^{x/10})}$ で求めることができる。また、全波整流回路は 2 つのポートをもち、それぞれ正の電圧と負の電圧が出力される。よって、その差の電圧を出力電圧として計算した。

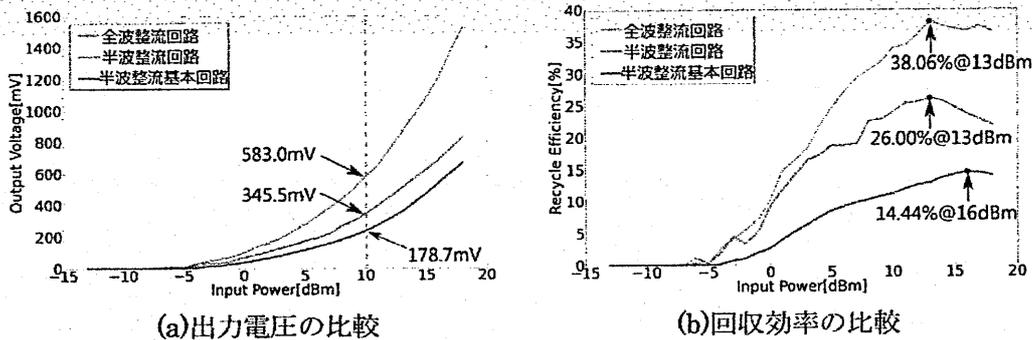


図 3.2.6：発振器から直接正弦波を入力した時の全波と半波整流回路の比較

入力される電力が大きくなるにつれて出力電圧も高くなるので、電力回収効率は高くなっていくことが分かる。 $-13\text{dBm}$  から  $18\text{dBm}$ の範囲で入力したところ、 $13\text{dBm}$ 入力した時に半波整流回路で最大効率  $26.00\%$ 、全波整流回路で最大効率  $38.06\%$ を得た。ダイオードの出力電圧は入力電力が大きくなるにつれて飽和していくので、ある一定の入力電力以上になると電力回収効率が落ちてしまう

### 3.3. F 級増幅器[7]

設計する F 級負荷回路を図 3.3.1 に示す。F 級負荷回路は基本波の周波数 $f_0$ の $\lambda_g/4$ 線路( $T_{11}$ )に、処理したい次数に応じた本数の高調波処理スタブ( $T_2 \sim T_n$ )と 1 本のリアクタンス補償スタブ( $T^*$ )を並列させ、そこに出力整合回路( $T_{12}$ )を加えた構成になっている。高調波処理スタブの合成入力アドミタンスを $Y_{inT}$ とすると

$$Y_{inT} = \frac{j}{Z_0} \sum_{k=2}^n \frac{\pi}{2k} \quad (3.3.1)$$

で表されるので、基本波のリアクタンス成分をなくすためにはリアクタンス補償スタブの入力アドミタンス $Y_{inh}$ は $Y_{inh} + Y_{inT} = 0$ でなければならない。よって、リアクタンス補償スタブの長さ $L^*$ は

$$L^* = \frac{1}{\beta} \tan^{-1} \left( - \sum_{k=2}^n \frac{\pi}{2k} \right) \quad (3.3.2)$$

で求められる。この時、 $\beta = 2\pi/\lambda_0$ である。

今回は4次高調波まで処理するために $T_2, T_3, T_4$ の3本の高調波処理スタブおよびそれに対応するリアクタンス補償スタブを設計する.(3.3.1)(3.3.2)式を用いて設計したF級負荷回路を図3.3.2に示す.このF級負荷回路についてAdvanced Design System(ADS)を用いてシミュレーションを行った結果を図3.3.3(a)(b)に示す.2.4GHzの基本波におけるリアクタンス成分が0,偶数次高調波である4.8GHz,9.6GHzにおいて負荷インピーダンスが0,奇数次高調波である7.2GHzにおいて負荷インピーダンスが無限大に近い値をとっていることが読み取れ,第2.6章で示したF級負荷回路の条件を満たした設計ができていると考えられる.

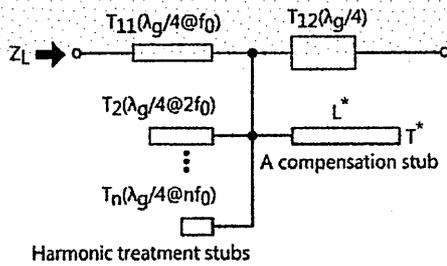


図 3.3.1 : F 級回路の構成

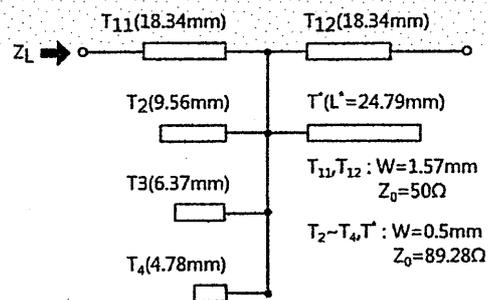
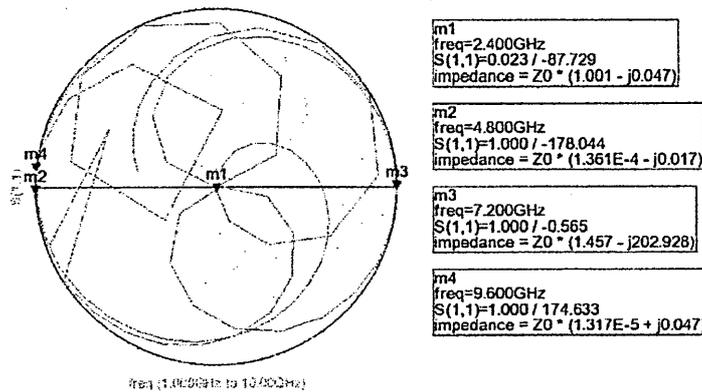
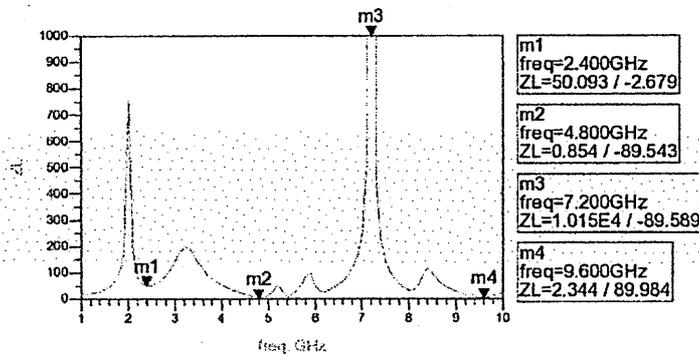


図 3.3.2 : 4 次高調波まで処理する F 級負荷回路



(a) F 級負荷回路の S パラメータ



(b) F 級負荷回路の負荷インピーダンス

図 3.3.3 : F 級負荷回路についてのシミュレーション結果

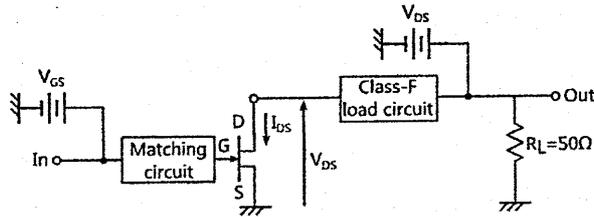
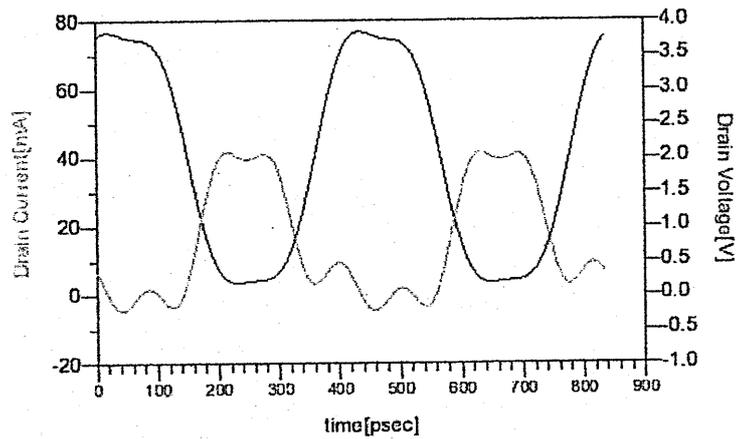
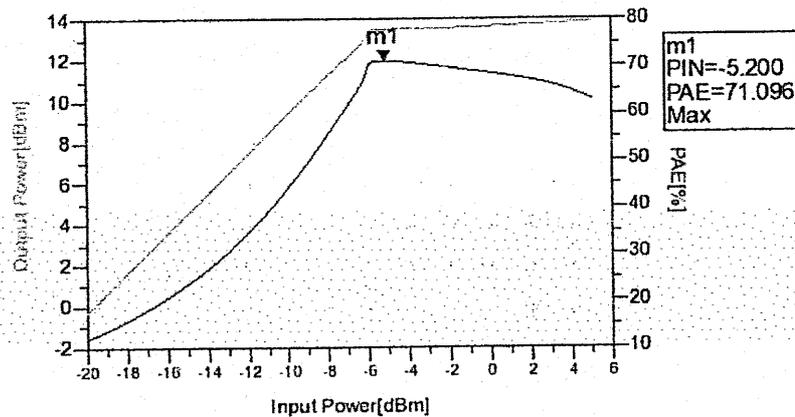


図 3.3.4 : F 級増幅器

この F 級負荷回路にトランジスタ, 入力整合回路, バイアス電源を接続して構成した図 3.3.4 の F 級増幅器の特性についてのシミュレーションを 4 次のハーモニックバランスを用いて行った結果を図 3.3.5(a)(b)に示す. なお, トランジスタはルネサスエレクトロニクスの NE3210S01 を用いた [8]. この時, B 級バイアスとするため  $V_{DS} = 2.0[V]$ ,  $V_{GS} = -0.7[V]$  とした. ドレインを流れる電流波形と電圧波形が逆相となり, 重なりが抑えられていることが確認できる. この時, 電力付加効率 (PAE) の最大値は 71.096% であった.



(a) ドレインを流れる電流・電圧波形



(b) 入力電力と出力電力, および PAE の関係

図 3.3.5 : F 級増幅器についてのシミュレーション結果

## 4. 電力回収機構

### 4.1. 電力回収実験

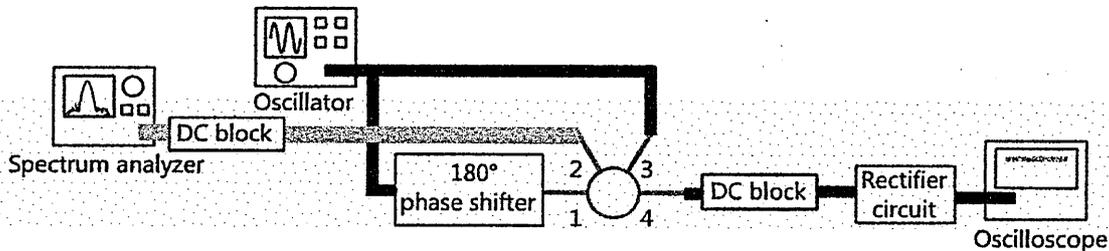


図 4.1.1：正弦波における電力回収実験の回路構成

図 4.1.1 に正弦波における電力回収実験の回路構成を示す。発振器で発生させた正弦波を 2 つに分け、片側を位相が  $180^\circ$  変化する位相器に通すことにより、 $180^\circ$  位相の異なる正弦波を  $180^\circ$  ハイブリット回路の 1 ポートと 3 ポートから入力する。この時、2.3.2 章より、2 ポートには同相成分が足しあわされたものが、4 ポートには損失となる逆相モードが出力される。電力回収実験では、4 ポートから出力される逆相モード電力を整流回路に入力することによって、どの程度逆相モード電力を回収することができるかを検討した。4 ポートから出力される逆相モードを整流することで得られた電圧のグラフを図 4.1.1.2(a) に、電力回収効率のグラフを図 4.1.1.2(b) に示す。最大効率は半波整流回路で  $14\text{dBm}$  入力した時に  $11.07\%$ 、全波整流回路で  $17\text{dBm}$  入力した時に  $14.69\%$  あった。

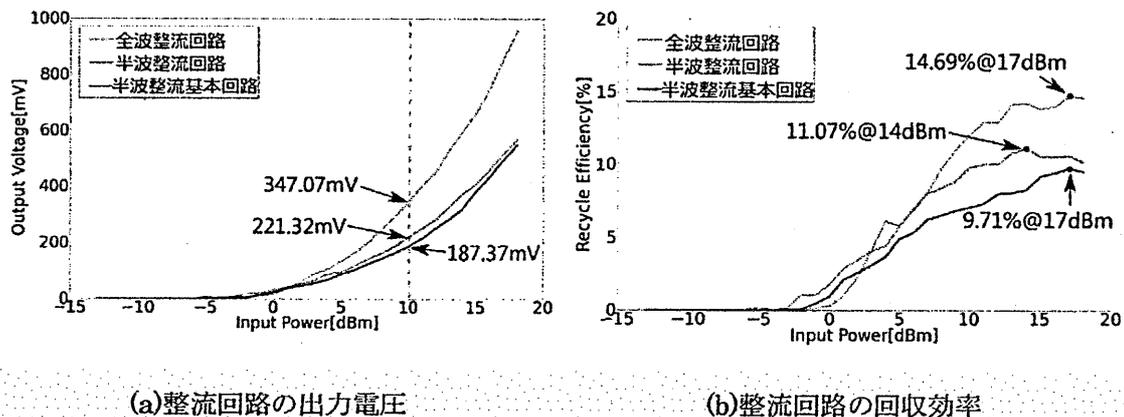


図 4.1.1.2：電力回収回路における全波と半波整流回路の比較

## 5. まとめ

本研究では,アウトフェーズ変調における電力合成の際に発生する逆相モード電力を,電力回収回路によって回収する電力回収実験を行った.

まず初めに,電力回収機構について検討した上で,電力回収回路を構成するために必要な $180^\circ$ ハイブリット回路を設計,試作し,正しい動作を確認した.

次に半波整流回路,および全波整流回路を設計,作製し,入力電力のうち半波整流回路では最大26.00%,全波整流回路では最大38.06%の電力を回収することができた.

F級増幅器を設計し,最大電力付加効率71.096%を達成できることを確認した.

今後の課題として,理論値では半波整流回路は最大回収効率50%,全波整流回路は最大回収効率100%であるため,その値により近づけることが可能な回路を設計する必要があると考えている.また,0dBm以下の入力に対してはほとんど出力電圧が見られなかったため,低い入力に対しても十分に動作する整流回路を設計することも重要であると考えている.

また,F級増幅器のさらなる効率改善にも取り組む必要がある.

## 参考文献

- [1] 平成24年度 我が国情報経済社会における基盤整備(IT 機器のエネルギー消費量に係る調査事業) 報告書 p.28 (株式会社 NTT データ経営研究所,2013.02)
- [2] 地球温暖化問題への対応に向けた ICT 政策に関する研究会 報告書
- [3] 小西良弘, 実用 マイクロ波技術講座 理論と実際 第1巻 p.121~124 (日刊工業新聞社,東京,2001)
- [4] Xuejun Zhang, E. Larson, Peter M. Asbeck, Robert A. Langridge, Lawrence, "Analysis of Power Recycling Techniques for RF and Microwave Outphasing Power Amplifiers", IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS- II : ANALOG AND DIGITAL SIGNAL PROCESSING, VOL.49, NO.5, MAY 2002 (2002), p.312-320
- [5] 本城和彦, 小林由紀子, "高 $f_{max}$  マイクロ波トランジスタを用いた高周波処理型超高効率 F 級増幅回路", 電子情報通信学会論文誌, C, Vol.J85-C, No.11, pp.953-960, 2002年11月
- [6] "Data Sheet - HSMS-286x, Surface Mount Microwave Schottky Detector Diodes"
- [7] Masato SEKI, Ryo ISHIKAWA, Kazuhiko HONJO, "Microwave Class-F InGaP/GaAs HBT Power Amplifier Considering up to 7th-Order Higher Harmonic Frequencies", IEICE TRANS.ELECTRON., VOL.E89-C, NO.7 JULY 2006
- [8] "NE3210S01 データシート"

LiNbO<sub>3</sub> 基板上でのブランチラインカップラの  
小型化の検討と電気光学光 SSB 変調素子への  
応用

Investigation of Branch-Line Coupler miniaturized onto LiNbO<sub>3</sub> and  
Application for Electro-optic SSB Modulator

山本 勝之<sup>1</sup>, 榎原 晃<sup>1</sup>, 河合 正<sup>1</sup>, 川西 哲也<sup>2</sup>  
Katsuyuki Yamamoto, Akira Enokihara, Tadashi Kawai, Tetsuya Kawanishi

<sup>1</sup>兵庫県立大学 大学院工学研究科 電気系工学専攻

Graduate School of Engineering, University of Hyogo

<sup>2</sup>独立行政法人情報通信研究機構 光ネットワーク研究所

National Institute of Information and Communications Technology

2014年8月27日

於 大阪大学

## 概要

マイクロ波回路を基板上で一体化した電気光学光変調素子の検討を行った。本報告では、小型化したブランチラインカップラ(BC)回路を変調電極と一体化した光 SSB 変調素子について述べる。BC 回路の小型化では、周期並列スタブ装荷方式と直列容量装荷方式の 2 手法を用いて小型化した BC 回路を  $\text{LiNbO}_3$  基板上に作成し、その特性を評価した。その結果、標準的な構成の BC 回路と比較して、周期並列スタブ装荷型小型 BC 回路は 50%、直列容量装荷型小型 BC 回路は 60%の占有面積で回路パターンを構成することができた。また、それぞれの BC 回路を電気光学変調素子基板上に直接作成し、変調電極と一体化することで、小型かつ単一入力動作が可能な電気光学光 SSB 変調素子を作成した。1550nm 光での変調実験により、ともに、最大側波帯抑圧比 30dB 以上の良好な光 SSB 信号を確認した。また、変調光スペクトルから波長チャープ量を計算し、それを基に一体化された BC 回路の分配比の評価も行った。

### 1. はじめに

電気光学光変調素子は、高速で高品質な光変調動作が可能であることから、高速光ファイバ伝送システムや光ファイバ無線システム等で必要とされている。また、2 電極型構成のマッシュェンダー型電気光学光変調素子を用いれば、各電極に振幅と位相が制御された変調信号を印加すると、光強度変調だけでなく、より高度な変調方式も実現できる。例えば、等振幅で位相差  $90^\circ$  の変調信号を印可することで、位相推移法の原理で光 Single Side Band(SSB)変調が実現できる[1-3]。通常そのような 2 つの変調信号を同時に印可するためには図 1 に示すように分配器、位相器、減衰器などの外部回路が必要であり、これらの個別部品を使って構成すると変調素子が大型化し、後調整なども必要となる。そこで、以前に  $90^\circ$ ハイブリッドの特性を有するコプレナー導波路構造のブランチラインカップラ(BC)回路を変調素子と同一基板上に直接作成した小型構成の光 SSB 変調素子について報告した(図 2) [4]。

電気光学変調素子の基板には、多くの場合  $\text{LiNbO}_3$ (LN)電気光学結晶が用いられる。LN 結晶基板は高誘電率であるため、設計の困難さは伴う。従来、LN 基板上に低誘電率で等方性のポリイミドの厚膜を形成し、これを回路基板としてその上にマイクロ波回路を形成する例が報告されている[5]。しかし、この方法では、先に述べた設計の困難さは回避できるが、回路寸法が大きくなり、ポリイミド基板上の回路と LN 基板上の回路との接続の問題が残る。設計の困難さを克服し、マイクロ波回路を LN 基板上に直接形成することにより、これらの問題が解決され、一般の回路基板に比べて非常に小さなマイクロ波回路が構成できる。しかし、それでも光変調電極部分(線路幅が

数十  $\mu\text{m}$  程度) に比べれば, マイクロ波回路の一般的な寸法は依然として大きく, 複数の変調素子を単一基板上に並列に並べることを想定すると, マイクロ波回路部分のより一層の小型化が必須である. そこで本報告では, BC 回路を周期並列スタブ装荷方式, 容量結合方式の 2 つの手法を用いてさらなる小型化を試みた. さらにそれぞれの BC 回路を電気光学結晶基板上で変調電極と一体化することで, より小型化された電気光学光 SSB 変調素子を作成したので報告する.

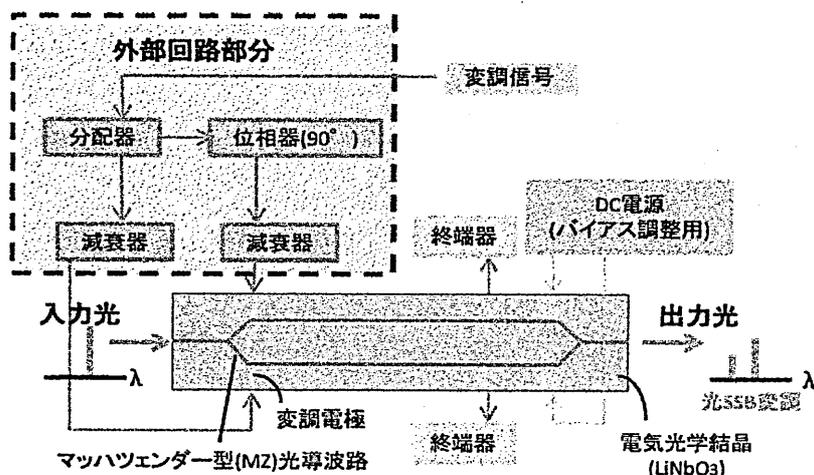


図 1 従来構造の電気光学光変調器の原理図

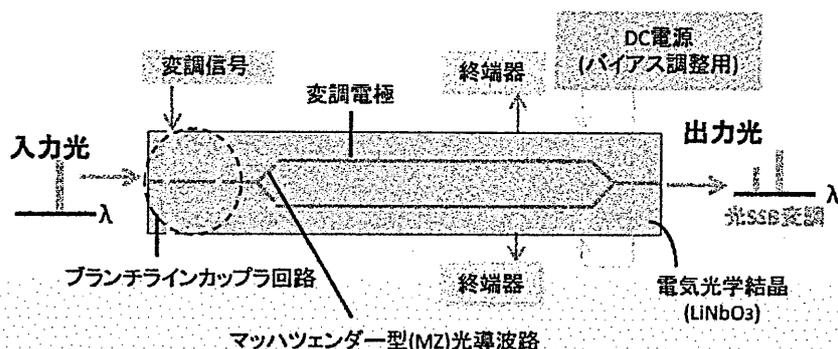


図 2 ブランチラインカップラ回路一体型電気光学光 SSB 変調器の原理図

## 2. マツハツエンダー型電気光学光変調器における SSB 変調の原理

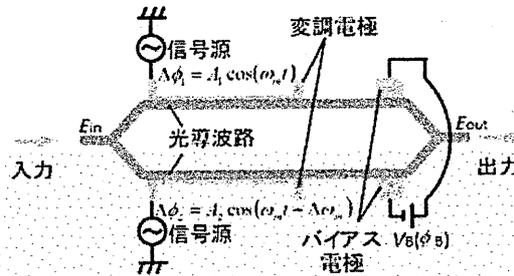


図 3 2 電極型 MZM の略図

図 3 に 2 電極型のマツハツエンダー型電気光学光変調器の原理図を示す。図より入力波 ( $E_{in}$ ) はマツハツエンダー型光導波路により 2 つに分岐される。まず初めに、バイアス調整用電極に直流電圧を印加することで位相バイアス ( $\phi_B$ ) を調整する。その後、それぞれの電極において  $V_1$ ,  $V_2$  に位相差 (スキュー:  $\Delta\phi_m$ ) をつけて印加することにより出力波 ( $E_{out}$ ) を得ることができる。ここで位相バイアス、スキューともに  $\pi/2$  に調整すると位相推移法の原理により光 SSB 信号を生成できる。以下に位相バイアス、スキューを  $\pi/2$  に調整することで光 SSB 信号が生成されることを式を用いて示す。

図において  $V_1$ ,  $V_2$  の電圧を印加した際、各導波路での光波の電界  $E_1$ ,  $E_2$  の時間変化と誘電位相量  $\Delta\phi_1$ ,  $\Delta\phi_2$  は次のように表される。ここで、光波の角周波数を  $\omega$ , 入力波の角周波数を  $\omega_m$  とする。

$$\text{光波の電界} \quad \begin{cases} E_1 = \frac{E_{in}}{2} \cos(\omega_0 t + \Delta\phi_1) & (1) \\ E_2 = \frac{E_{in}}{2} \cos(\omega_0 t + \phi_B + \Delta\phi_2) & (2) \end{cases}$$

$$\text{誘電位相量} \quad \begin{cases} \Delta\phi_1 = A_1 \cos(\omega_m t) & (3) \\ \Delta\phi_2 = A_2 \cos(\omega_m t + \Delta\phi_m) & (4) \end{cases}$$

変調指数  $A$  とチャープパラメータ  $\alpha$  を以下のように定義する。

$$A = A_1 - A_2 \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \quad (6)$$

ここで,  $A_1 > 0$ ,  $A_2 < 0$  とする. 通常の MZ 型光変調素子では, 誘導位相変化の振幅  $A_1$ ,  $A_2$  は同振幅で符号が逆となるのが望ましいので,  $\alpha = 0$  が理想であるが, 入力信号  $V_1$ ,  $V_2$  の大きさにアンバランスが生じると, その度合いに応じてチャープパラメータが値を持つことになる. 式(1)と式(3)より

$$E_1 = \frac{E_{in}}{2} \cos\{\omega_0 t + A_1 \cos(\omega_m t)\} \quad (7)$$

式(7)を複素表示し, 第一種ベッセル関数  $[e^{jx \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n j^n J_n(X) \cos n\theta]$  とオイラーの公式  $[\cos \theta = \left(\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}\right)]$  を使うと

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{E_{in}}{\sqrt{2}} e^{j \cos\{\omega_0 t + A_1 \cos(\omega_m t)\}} \\ &= \frac{E_{in}}{\sqrt{2}} e^{j \cos(\omega_0 t)} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n j^n J_n(A_1) \left(\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}\right) \end{aligned} \quad (8a)$$

と表せる. 同様に式(2)と式(4)より

$$E_2 = \frac{E_{in}}{\sqrt{2}} e^{j \cos(\omega_0 t + \phi_B)} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n j^n J_n(A_2) \left\{ \frac{e^{jn(\omega_m t + \Delta\phi_m)} + e^{-jn(\omega_m t + \Delta\phi_m)}}{2} \right\} \quad (8b)$$

となる. 式(8a)と式(8b)を  $n$  が -1, 0, 1 のそれぞれに分け,  $\alpha = 0$  とすると

$$I_0 = \left| \frac{J_0\left(\frac{A}{2}\right)}{2} + \frac{J_0\left(-\frac{A}{2}\right)}{2} e^{-j\phi_B} \right|^2 = \left| \frac{J_0\left(\frac{A}{2}\right)}{2} (1 + e^{-j\phi_B}) \right|^2 \quad (9a)$$

$$I_{+1} = \left| \frac{J_1\left(\frac{A}{2}\right)}{2} + \frac{J_1\left(-\frac{A}{2}\right)}{2} e^{-j(\phi_B + \Delta\phi_m)} \right|^2 = \left| \frac{J_1\left(\frac{A}{2}\right)}{2} \{1 - e^{-j(\phi_B + \Delta\phi_m)}\} \right|^2 \quad (9b)$$

$$I_{-1} = \left| \frac{J_1\left(\frac{A}{2}\right)}{2} + \frac{J_1\left(-\frac{A}{2}\right)}{2} e^{-j(\phi_B - \Delta\phi_m)} \right|^2 = \left| \frac{J_1\left(\frac{A}{2}\right)}{2} \{1 - e^{-j(\phi_B - \Delta\phi_m)}\} \right|^2 \quad (9c)$$

なる.  $\phi_B = \Delta\phi_m = \frac{\pi}{2}$ の時, 式(9)は

$$I_0 = \left| J_0\left(\frac{A}{2}\right) \right| \quad (10a)$$

$$I_{+1} = \left| J_1\left(\frac{A}{2}\right) \right| \quad (10b)$$

$$I_{-1} = 0 \quad (10c)$$

となり, 片側一次側波帯が抑圧された光 SSB 信号を生成できることがわかる.

### 3. プランチラインカップラ(BC)回路の小型化

#### 3.1 従来構造の BC 回路

図4は、中心周波数10GHzで0.5mm厚のz-cut LN結晶基板上で設計した従来のマイクロストリップ構造のBC回路である。特性インピーダンス $50\Omega$ と $35.4\Omega$ の2種類の $1/4$ 線路から構成され、ポート1から入力した信号は位相差 $90^\circ$ でポート3、ポート4に等分配出力される。図からわかるように、10GHzでは約2mmの横幅となる。図5には従来構造のBC回路を変調電極を接続した一体化電極のパターンを示す。図より、BC回路部分は変調電極幅( $50\mu\text{m}$ )に対して非常に大きな寸法を有してしまうことが分かる。

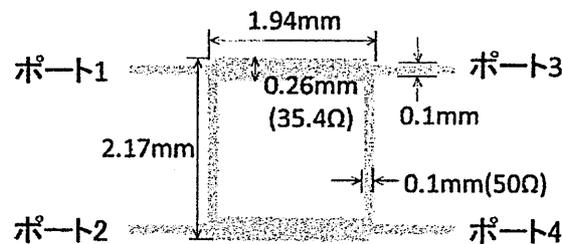


図4 基本構造のBC回路パターン

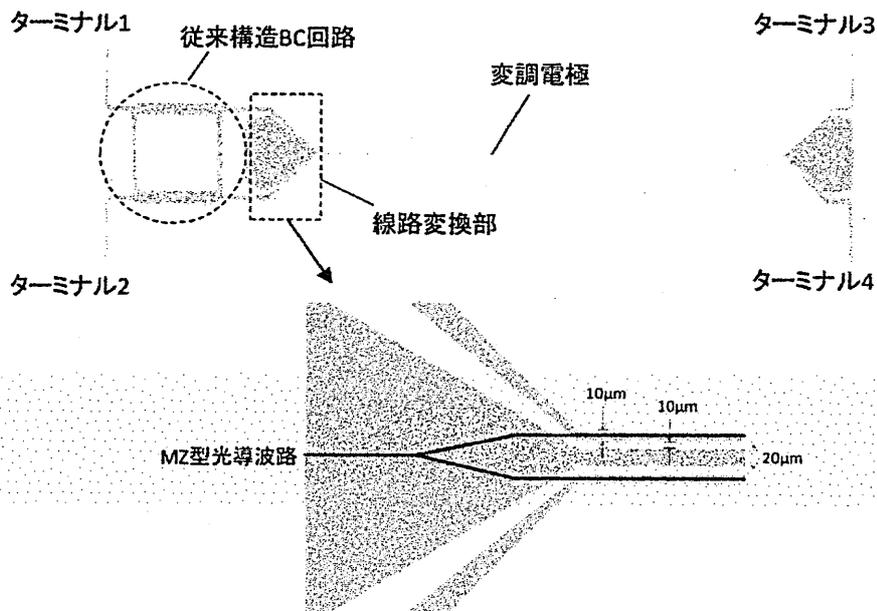


図5 従来構造BC回路一体型変調電極パターン

### 3.2 周期並列スタブ装荷型小型 BC 回路の設計

図 4 の BC 回路の横方向線路に周期並列スタブを装荷することで遅波線路構造，縦方向線路をミアンダ構造として小型化を行った[6-7]．図 6 に示すのは，1/4 にカットした図 4 の BC 回路の横方向線路と，終端開放スタブを周期的に装荷した線路との等価回路である．式(11)，(12)を満たすように各回路パラメータを決定することで，それぞれの線路は等価的となる．

$$Y = \frac{Y_0 \sin \theta_0 \tan(\theta/2)}{1 - \cos \theta_0} \quad (11)$$

$$\sin \theta = \frac{Y_0}{Y} \sin \theta_0 - 2 \frac{Y_s}{Y} \cos^2 \theta_0 \tan \theta_s \quad (12)$$

ここで  $\theta$ ， $\theta_s$ ， $\theta_0$  は電気長， $Y$ ， $Y_s$ ， $Y_0$  は特性アドミタンスと定義している．式(12)より， $Y_s/Y > 1$  を満たした状態（線路 b の線路幅を線路 a よりも細くすればよい）で， $\theta_0 > \theta$  となるように  $Y_s$ ， $\theta_s$  を設定すれば，線路 b の物理長を線路 a よりも短くすることができる．

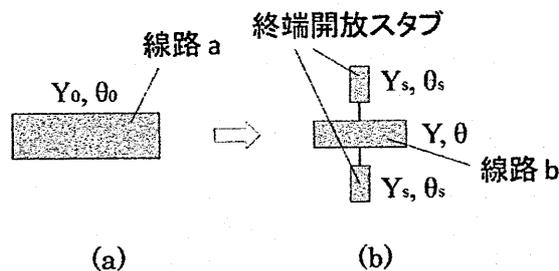
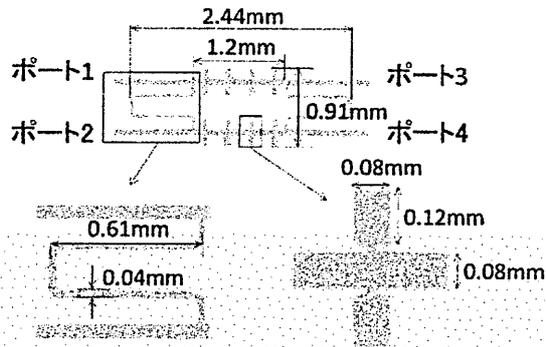


図 6 終端開放スタブ装荷による線路縮小の原理図

図 7 に中心周波数 10GHz で 0.5mm 厚の z-cut LN 結晶基板上で設計した周期並列スタブ装荷小型 BC 回路を示す．回路パラメータは図 7 に示している．図からもわかるように面積を約半分に小型化することができた．1 $\mu$ m 厚の金薄膜によるパターンを仮定し，平面回路シミュレータを用いて，10GHz において位相差 90°で等分配されるように寸法を決定した．



$$Y_0 = 0.028 [S], Y = 0.018 [S], Y_s = 0.018 [S],$$

$$\theta_0 = 22.5 [\text{deg}], \theta = 14.7 [\text{deg}], \theta_s = 9.8 [\text{deg}] \text{ at } 10\text{GHz}$$

図 7 周期並列スタブ装荷小型 BC 回路パターン

図 8 に設計した周期並列スタブ装荷型小型 BC 回路の周波数特性を示す。図より設計周波数 10GHz 付近において、位相差  $90^\circ$  かつ等分配の特性を有していることが分かる。

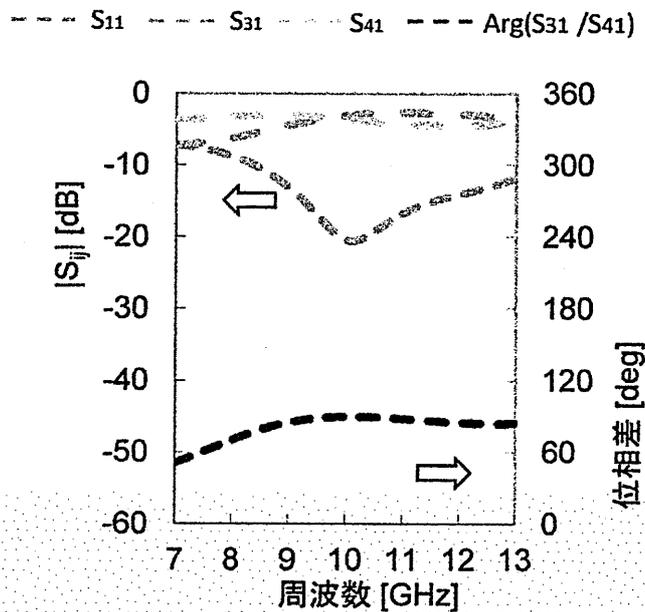


図 8 周期並列スタブ装荷小型 BC 回路の解析結果

#### 4. 周期並列スタブ装荷型小型 BC 回路の試作・評価

##### 4.1 LiNbO<sub>3</sub> 基板上への周期並列スタブ装荷型小型 BC 回路の作製

図 9 に示すようなフォトリソグラフィの工程により、実際に LiNbO<sub>3</sub> 基板上に回路パターンを作製した。

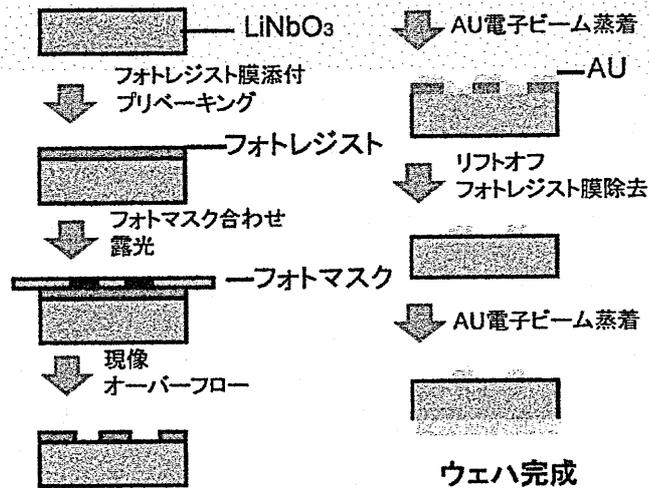


図 9 作製手順(フォトリソグラフィ)

図 10 には完成したウエハ、図 11 には周期並列スタブ装荷型 BC 回路を示している。回路パターンは 0.5mm 厚の z-cut LN 結晶基板上に膜厚 1 $\mu$ m の金薄膜で作成している。周期並列スタブ装荷型小型 BC 回路の各ポートにはプローブ測定用端子を接続しており、TRL 校正を行うことで、プローブと基板との間のインピーダンス不整合の問題を除去することができる。

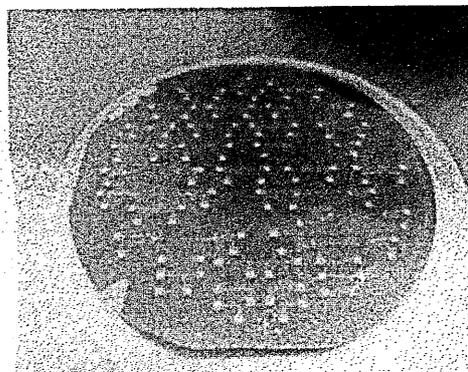


図 10 完成したウエハ

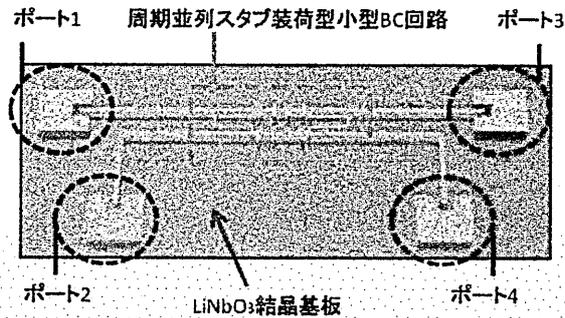


図 11 作成した周期並列スタブ装荷型小型 BC 回路

#### 4.2 周期並列スタブ装荷型小型 BC 回路の測定結果

測定では、アイソレーションポート(ポート 2)を開放しそれ以外の 3つのポートにプローブを接続して、うち 1つのプローブには終端器を接続し、2ポートでの測定を行った。図 12 に小型 BC 回路のプローブ測定結果を示す。図より 10GHz 付近において、ほぼ位相差  $90^\circ$  で等分配の出力特性となっていることがわかる。

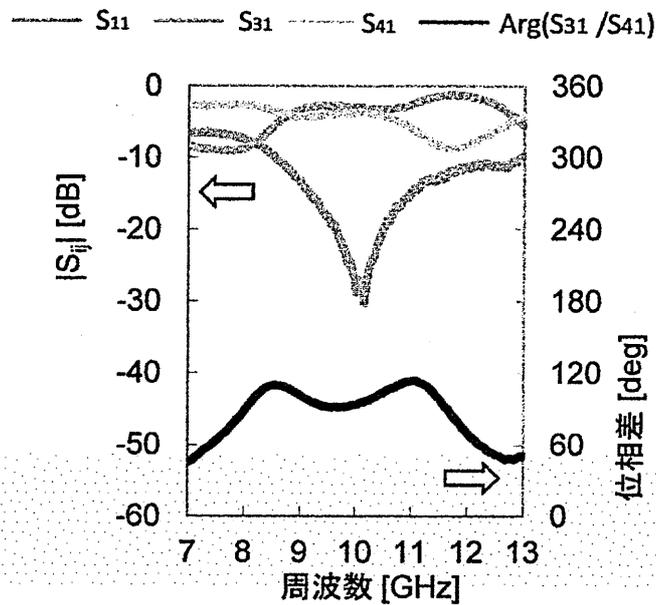


図 12 周期並列スタブ装荷型小型 BC 回路の周波数特性

## 5. 周期並列スタブ装荷型小型 BC 一体型光 SSB 変調器

### 5.1 変調器の作成

図 13 に BC 回路と変調電極とを接続した一体型電極パターンを示す。0.5mm 厚の z-cut LN 結晶基板の上に膜厚 1 $\mu\text{m}$  で設計している。変調電極は、表面に接地電極を有する数十  $\mu\text{m}$  幅のコプレーナ線路構造であるため、BC 回路と一体化するためにはマイクロストリップ線路構造からの変換と線路幅の縮小が必要である。そこで図 13 に示すように線路変換部では、BC 回路の出力ポートの線路幅 0.08mm を変調電極の線路幅 0.01mm にまで徐々に細くなるような構造となっている。小型 BC の線路間隔が小さいので線路変換部の占有面積も大幅に削減されている。マッハツェンダー(MZ)型光導波路は同一基板の上にチタン熱拡散により作成している。波長 1550 nm の光波をシングルモードで伝搬させることを想定しており、光導波路の線路幅は 7 $\mu\text{m}$  で作成した。変調電極は 2 電極型の構成となっており、各電極直下に MZ 型光導波路の各アームが配置されている。この構成は進行波型電極構造と呼ばれ、光波と変調信号が同方向に同じ速度で進行するために変調効率が優れていることが知られている。

一体型電極付近に配置された位相バイアス電極に、直流電圧により位相バイアスが 90°となるように調整することで光 SSB 信号が実現できる。光の入出力が行えるように、光導波路の端面に光ファイバを紫外線硬化樹脂により固定している。図 14 に作成した電気光学光 SSB 変調素子の写真を載せる。

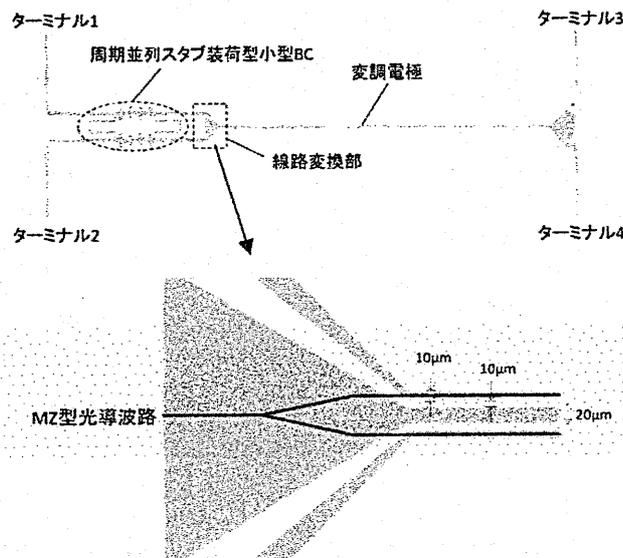


図 13 周期並列スタブ装荷型小型 BC 一体型変調電極

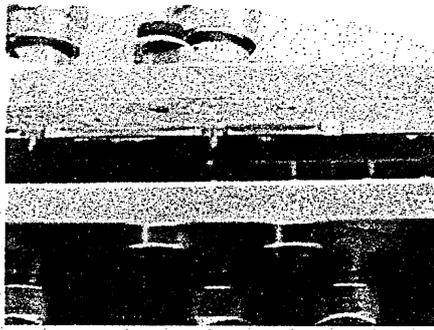


図 14 作成した電気光学光 SSB 変調素子

## 5.2 変調器の特性評価

波長 1550nm の赤外光を偏波コントローラを介して入射し、マイクロ波信号をターミナル 1 から入力した。

10GHz で 145mW のマイクロ波信号により変調をかけた出力光を光スペクトルアナライザーで観測した一例を図 15 に示す。図より、下側側波帯が抑圧された光 SSB スペクトルが確認できる。両側の一次側波帯の比をとったものを側波帯抑圧比と定義すると、側波帯抑圧比は 30dB 以上となり、良好な光 SSB 変調を実証できた。また、この結果は、BC 回路により、マイクロ波信号がほぼ等分配されていることを示している。側波帯抑圧比の周波数特性を図 16 に示す。10GHz 周辺で側波帯抑圧比は 20dB 以上を示していることがわかる。抑圧される側の一次側波帯が搬送波の裾に隠れているため、実際の側波帯抑圧比は測定結果よりも大きいと予想される。

搬送波と一次側波帯の最大強度比をそれぞれ  $I_{0max}$ 、 $I_{1max}$  とおくと、変調指数  $A$  は式(13)を用いて算出される。

$$\frac{I_{1max}}{I_{0max}} = \frac{|J_1\left(\frac{A}{2}\right) - J_1\left(-\frac{A}{2}\right)|^2}{|J_0\left(\frac{A}{2}\right) + J_0\left(-\frac{A}{2}\right)|^2} \quad (13)$$

これより、マイクロ波信号の入力電力を 36mW で固定し、周波数を変化させたときの変調指数を図 17 に示す。変調指数は観測した光スペクトルから算出しており、10GHz において 0.13 rad となった[8]。

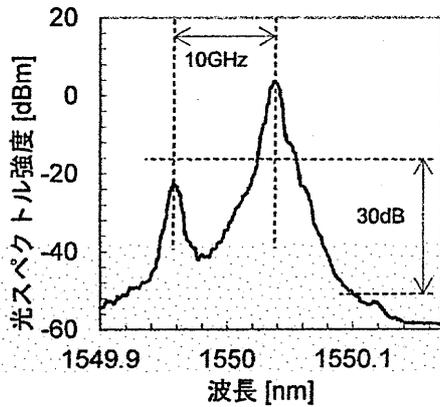


図 15 観測した光スペクトルの一例

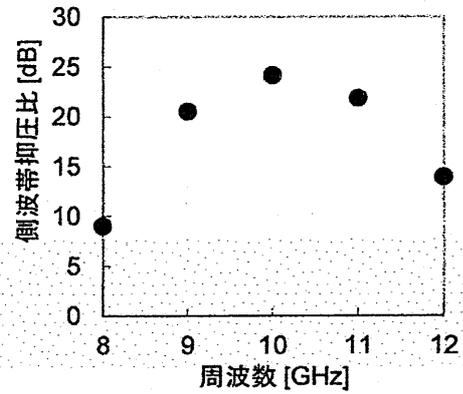


図 16 側波帯抑圧比の周波数特性

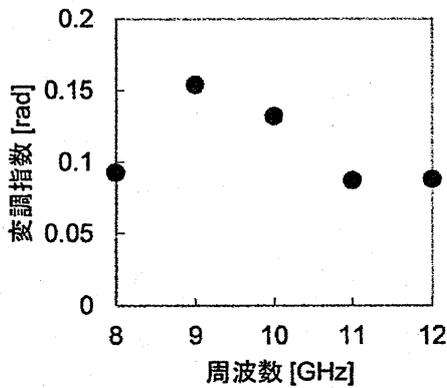


図 17 変調指数の周波数特性

式(6)で示されるチャープパラメータ  $\alpha$  は、入力信号  $V_1$ ,  $V_2$  の大きさにアンバランスにより生じることを述べた。これは、BC回路の分配比の 1:1 からのずれに起因するもので、逆に、変調光からチャープパラメータ  $\alpha$  を測定すれば、BC回路の分配比を算出することができる。(5), (6)を用いると、MZ干渉計における誘導位相変化の振幅  $A_1$ ,  $A_2$  を、 $\alpha$  を用いて

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\alpha+1}{2} A \\ A_2 &= \frac{\alpha-1}{2} A \end{aligned} \quad (14)$$

と表され、この関係式を用いて、式(9)から一次搬送波の最大/最小比を算出すると、

$$\frac{I_{1max}}{I_{1min}} = \frac{\left| J_1\left(\alpha + 1\right)\frac{A}{2} - J_1\left(\alpha - 1\right)\frac{A}{2} \right|^2}{\left| J_1\left(\alpha + 1\right)\frac{A}{2} + J_1\left(\alpha - 1\right)\frac{A}{2} \right|^2} \quad (15)$$

となる。図 18 は、チャープパラメータ  $\alpha$  をパラメータにとって、変調指数  $A$  と 1 次側波帯の最大最小比  $I_{1max}/I_{1min}$  の関係をグラフにしたものである。これより、式(13)から求めた  $A$  と、変調光スペクトルから求めた  $I_{1max}/I_{1min}$  から  $\alpha$  が求められることがわかる。

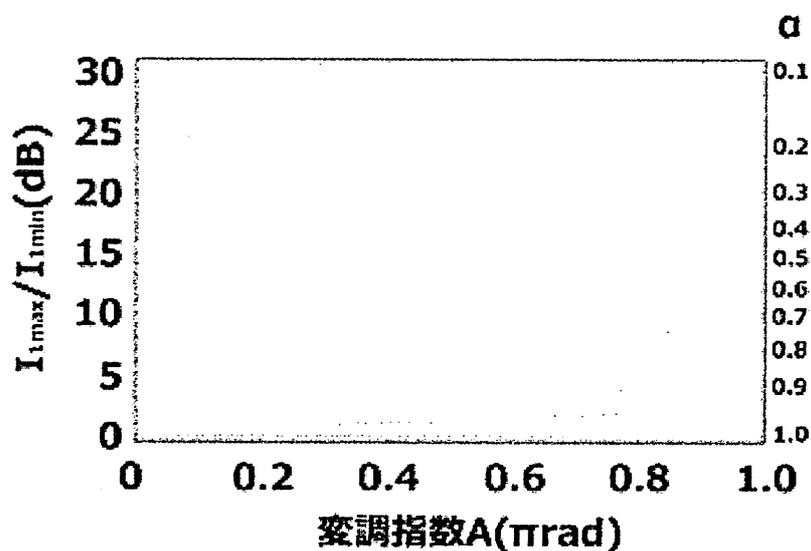


図 18  $\alpha$  をパラメータとした変調指数に対する  
一次搬送波の最大/最小比

実際に、36mW のマイクロ波を入力した際のチャープパラメータ  $\alpha$  の周波数特性を図 19 に示す。図より中心周波数の 10GHz 付近で最も  $\alpha$  が小さくなり、その値は 0.07 と極めて良好なチャープ特性が得られていることがわかる。このことは図 7 の変調電極に取り付けた小型ブランチャインカップラの特性において、10GHz 付近でほぼ等分配されていることから理解できる。図 20 には図 7 より算出した小型 BC 回路の出力分配比とチャープパラメータ  $\alpha$  から算出した小型 BC 回路の出力分配比の比較となっている。図からも分かるように、幾分かの誤差はあるものの、変調光スペクトルから一体化して組み込まれた BC 回路の分配比を推測することができることがわかる。

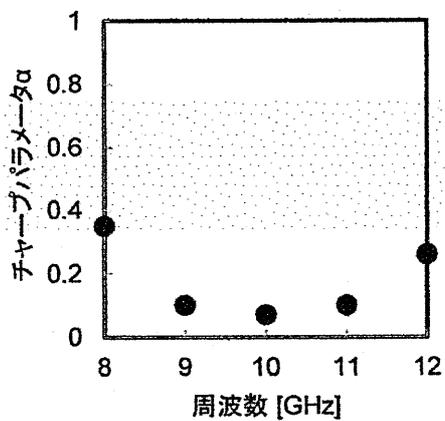


図 19 チャープパラメータの周波数特性

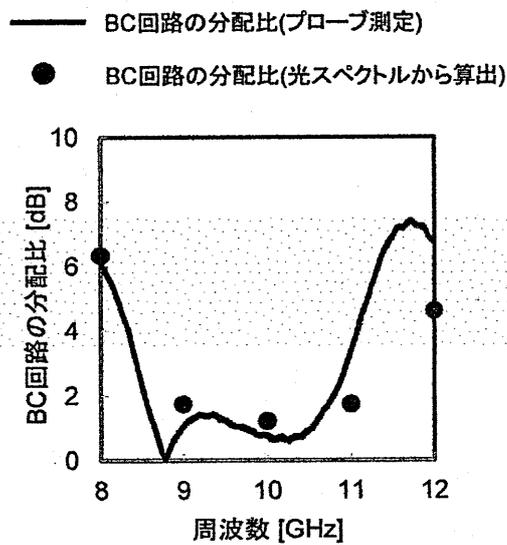


図 20 BC回路の分配比の周波数特性

## 6. 直列容量装荷方式における BC 回路の小型化

### 6.1 直列容量装荷型小型 BC 回路

次に、BC 回路を直列容量装荷することによる小型化を検討した。図 21 には従来構造の BC 回路の原理図を示している。ここで図 22 に示すように BC 回路の分岐部と入出力ポート間に直列容量を装荷することで縦方向線路と横方向線路を同時に縮小することができる[9-10]。この構成により、入力ポートと変調電極が直流遮断されるので、バイアスティーなどを用いて変調電極に直流信号や低周波信号を重乗させることが可能となる。これによって、直流バイアス電極を省略できるのでさらなる構造の小型化が可能となる。

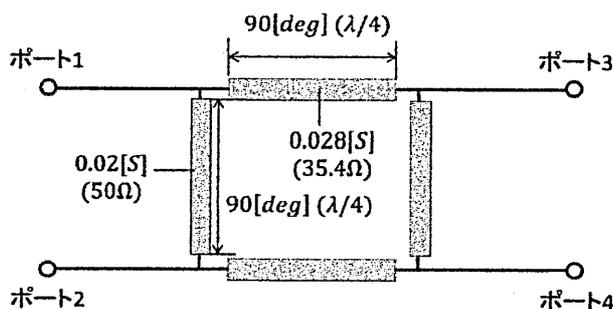


図 21 従来構造 BC 回路の原理図

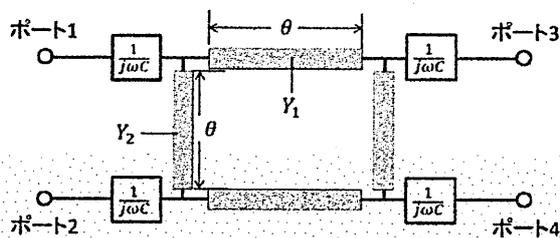


図 22 直列容量装荷方式における回路構成

図 22 中の  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $\theta$  は特性アドミタンスと電気長を示しており、BC 回路の条件

( $Y_1 = \sqrt{2}Y_2$ )を仮定すると,

$$Y_2 = \frac{\sin \theta}{1 + (1 + \sqrt{2})^2 \cos^2 \theta} \quad (16)$$

$$\frac{1}{\omega C} = -(1 + \sqrt{2}) \cos \theta \quad (17)$$

により回路パラメータを設定できる. 設計周波数 10GHz において,  $\theta=70$  [deg]とすると, 式(16), (17)より  $Y_1=0.016$  [S],  $Y_2=0.011$  [S],  $C=0.18$  [pF]となる. 図 23 に 0.5mm 厚の z-cut LN 結晶基板上で設計した直列容量装荷型小型 BC 回路を示す. ギャップが  $5\mu\text{m}$  のインターデジタルキャパシタ(IDC)により, 0.18 [pF]の直列容量を実現している. IDC を 4 個付加することで従来の BC 回路に対して約 60%に小型化することができた.  $1\mu\text{m}$  厚の金薄膜によるパターンを仮定し, 平面回路シミュレータによる解析結果と実測結果の周波数特性を図 24 に示す. 図より 10GHz において  $90^\circ$ ハイブリッドの特性が実現できていることがわかる.

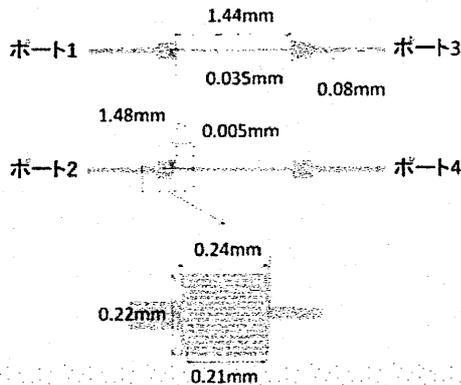


図 23 直列容量装荷型小型 BC 回路パターン

(解析結果) ---  $S_{11}$  ---  $S_{31}$  ---  $S_{41}$  ---  $\text{Arg}(S_{31}/S_{41})$   
 (測定結果) ———  $S_{11}$  ———  $S_{31}$  ———  $S_{41}$  ———  $\text{Arg}(S_{31}/S_{41})$

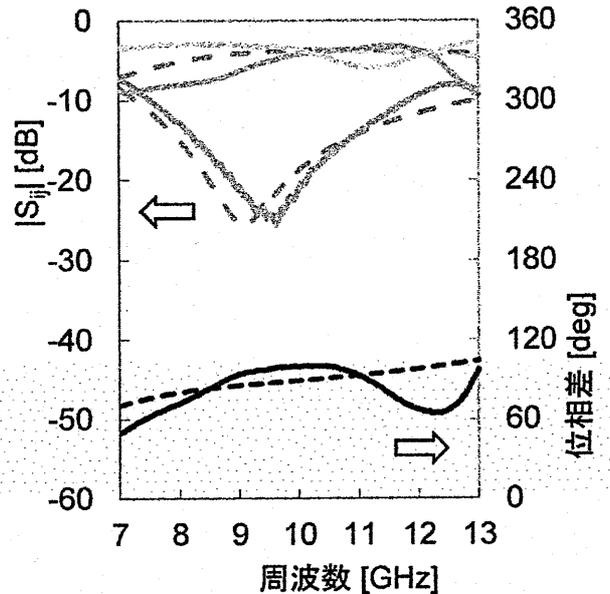


図 24 容量結合型小型 BC 回路の周波数特性

## 6.2 直列容量装荷 BC 一体型光 SSB 変調素子

図 25 は BC 回路と変調電極を一体化した回路パターンである。0.5mm 厚の z-cut LN 結晶基板上に 1 $\mu$ m の金薄膜で設計しており、線路変換部の構造は図 13 と同様である。IDC により変調電極と入力端子が直流的に遮断されているので、終端側のターミナル 3, 4 から各変調電極に個別に直流バイアス電圧を印加することができる。

図 26 に観測した光スペクトルの一例を示す。波長 1550nm で実験を行い側波帯抑圧比は 10GHz で入力電力 234mW のマイクロ波信号を入力したとき 31.7dB 以上を観測でき、BC 回路が等分配特性を有していると推測される。図 27 にマイクロ波信号の入力電力を 23mW とした時の変調指数の周波数特性を示す。図より 10GHz において変調指数は 0.14 rad であった。

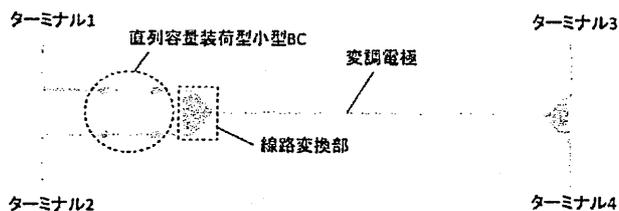


図 25 直列容量装荷型小型 BC 一体型変調電極

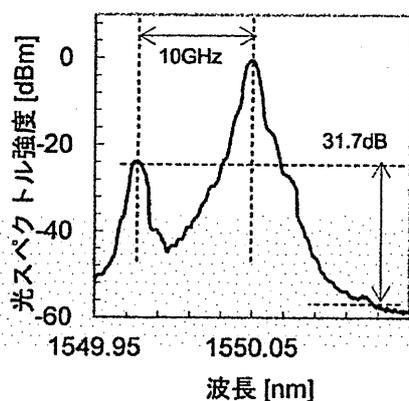


図 26 観測した光スペクトルの一例

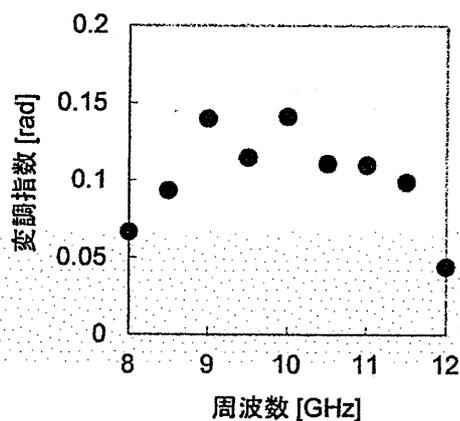


図 27 変調指数の周波数特性

## 6. むすび

LN 基板上に周期並列スタブ装荷方式, 直列容量装荷方式によりそれぞれ小型化した BC 回路を設計した. 従来構造の BC 回路と比較して, 周期並列スタブ装荷型小型 BC は 50%, 直列容量装荷型小型 BC は 60%に面積を小型化できた. また LN 基板上において, それぞれの小型 BC 回路と変調電極と一体化することでワンチップの小型な電気光学光 SSB 変調素子を作成した. どちらの変調器も最大側波帯抑圧比 30dB 以上の良好な光 SSB 信号を確認できた. 今後は, このような手法を生かしてさらに高機能な変調素子の実現を目指していきたい.

## 参考文献

- [1] M. Izutsu, S. Shikama T, T. Sueta, "Integrated optical SSB modulator/frequency shifter," IEEE J Quantum Electronics, vol.17, no.11, pp.2225-2227, November 1981.
- [2] T. Kawanishi, T. Sakamoto, and M. Izutsu, "High speed control of lightwave amplitude, phase, and frequency by use of electrooptic effect," IEEE Selected Topics of Quantum Electronics, vol.13, no.1, pp.79-91, February 2007.
- [3] G. H. Smith, D. Novak and Z. Ahmed, "Overcoming chromatic-dispersion effects in fiber-wireless systems incorporating external modulators," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol.45, no.8, pp.1410-1415, August 2002.
- [4] A. Enokihara, K. Kawamura, T. Nakao, K. Yamamoto, T. Kawai, T. Kawanishi, "Electro-optic SSB modulator with 90 degree hybrid directly prepared onto LiNbO<sub>3</sub> substrate," Electronics Letters, vol.49, no.19, pp.1237-1238, September 2013.
- [5] S.Mino, T.Ohyama, T. Hashimoto, Y. Akahori, K. Yoshino, Y. Yamada, K. Kato, M. Yasu, K. Moriwaki, "High frequency electrical circuits on a planar lightwave circuit platform," Journal of Lightwave Technology, vol.14, no.5, pp.806-811, 1996.
- [6] T. Kawai, M. Nakamura, I. Ohta and A. Enokihara, "Band-broadening design technique of CRLH-TLs dual-band branch-line couplers using CRLH-TLs matching networks," IEICE Trans Electron, vol.93, no.7, pp.1072-1077, July 2010.
- [7] 山本 勝之, 河合 正, 榎原 晃, 川西 哲也, "LiNbO<sub>3</sub> 基板上的小型ブランチラインカップラと光 SSB 変調への応用," 電子情報通信学会・総合大会, vol.C-14, no.3, March 2013.
- [8] A. Enokihara, T. Kawai, H. Murata, "Measurement of small chirp-parameter for Mach-Zehnder-type optical modulator," Optics Communications, vol.282, no.21, pp.4229-4232, November 2009.
- [9] 河合 正, 小久保 吉裕, 太田 勲, "直列容量装荷型小型ブランチラインカップラ的设计," 電子情報通信学会論文誌, vol.J89-C, no.1, pp.48-49, January 2006.
- [10] 山本 勝之, 河合 正, 榎原 晃, 川西 哲也, "容量結合型小型ブランチラインカップラを一体化した電気光学光 SSB 変調素子," 電子情報通信学会・ソサイエティ大会, vol.C-14, no.3, September 2013.

全領域に影理論を適用した多層誘電体格子の斜め入射波散乱解析

Scattering Analysis of Multilayered Dielectric Gratings by Application of  
Shadow Theory to All Regions for Oblique Incidence

○ 若林 秀昭<sup>†\*</sup> 浅居 正充<sup>††</sup> 松本 恵治<sup>†††</sup> 山北 次郎<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 岡山県立大学    <sup>††</sup> 近畿大学    <sup>†††</sup> 大阪産業大学

\* E-mail : waka@c.oka-pu.ac.jp

2014年8月27日(水)  
於 大阪大学 豊中キャンパス

**概要** 周期系, 不規則系による散乱問題において, 入射平面波が低入射角極限 (grazing) になると, 入射波を相殺する鏡面反射波だけが生じ, 「影」になる現象が, 近年, 注目されている. 本論文は, コニカルマウントされた多層誘電体格子の散乱問題に対する行列固有値法に, 影理論を適用している. 多層誘電体周期構造の中間領域を含む全領域において, 固有値の縮退, 非縮退に関わらず, 全ての固有値に対する電磁界成分に, 影理論による計算法を適用し, 影理論の新しい形式の変換行列, 及び回折波振幅の位相基準点の変更により, 改良した伝搬行列を導出している. 数値計算例では, 中間領域においても, 影現象が生じることを明らかにし, 固有値が縮退する場合, 電磁界分布が位置に比例して減衰することを示す.

## 1 まえがき

移動不変性を持つ表面による散乱において入射角が十分小さい低入射角極限では, 高次の回折波が 0 になり, 入射平面波は鏡面反射波によって相殺され, 全電磁界が消滅する影現象が生じる<sup>(1)</sup>. 影現象は, 周期系, 不規則系共通の現象であり, 中山の「影理論」(Nakayama's shadow theory) では, 新しい電磁界表現式が提案され, 最初の例として, 完全導体格子の 2 次元散乱問題を例にその物理的解釈, 及び散乱因子を用いた回折効率の表現式などについて, 詳細に報告されている<sup>(2,3)</sup>. 誘電体周期構造の解析法に関しては, 極めて複雑な構造を持つ誘電体格子に対しても多くの数値解析法<sup>(4-8)</sup>が確立しているにも関わらず, 影現象については見逃されていたようである.

筆者らは, 先に, 入射側と反射側だけを扱った影理論を, 屈折側を考慮し, 行列固有値を用いた誘電体格子の散乱問題に対する解析法に適用した. 入射面が格子列と直交する誘電体格子の 2 次元問題において, 影理論の有効性と物理的意味を検討し, 固有値の縮退に相当する低入射角極限の特異性を解決した<sup>(9)</sup>. また, 多層誘電体周期構造の数値解析では, 中間領域においても, 固有値が縮退する可能性がある. 固有値の縮退は, 境界面に沿って低入射する到来波が同じ大きさの振幅と逆位相をもつ反射波によって打ち消される現象に相当すると考えられる. そこで, 中間領域が一樣領域の場合, 縮退する固有値に対する電磁界成分だけに, 周期構造領域の場合, 数値的に求めた固有値のうち, 最小の固有値に対する電磁界成分だけに, 影理論を適用し, 新しい電磁界表現式を提案した<sup>(10)</sup>. 次に, 影理論における散乱因子は, スペクトル領域グリーン関数に直結する根源的な物理量であり, スペクトル領域の単位面電流・磁流密度に対する応答であることを明らかにした. 散乱因子に基づくグリーン関数を用いて, 多層誘電体格子中にストリップ導体格子が埋め込まれた複合誘電体格子の散乱問題の一解析法を提案し, 散乱因子の価値ある応用例を報告した<sup>(11)</sup>. さらに, これまで, 2 次元問題について議論されていた影理論を, より一般的な誘電体格子の 3 次元問題に適用し, 直線偏波だけでなく, 円偏波の全ての複素入射角に対する固有値の縮退問題を解決し, 散乱因子を用いて, 反射, 透過回折効率を新しく定義した<sup>(12)</sup>.

本論文では, 多層誘電体格子の 3 次元散乱問題に対する行列固有値法において, 全ての領域を対象に, 縮退または最小の固有値だけでなく, 全ての固有値に対する電磁界成分に影理論を適用し<sup>(13)</sup>, 新しい形式の変換行列と改良した伝搬行列を導出する. これらの行列の積と散乱因子を用いて, 固有値が縮退する場合を含む電磁界表現式を得る. また, 散乱因子だけを用いた回折効率を定義し, 光学定理について述べる. 数値計算では, 中間領域において, 到来波が反射波に打ち消される現象を明らかにする. 次に, 0 次の固有値が縮退する臨界角入射の界分布, 高次の固有値が縮退する場合の界分布を示し, 中間領域の電磁界分布は, 2 次元問題と異なり, 直交座標系における全成分が位置に比例して減衰することを示す.

本論文では, 時間因子  $e^{j\omega t}$ , 空間デカルト座標  $r = (x, y, z)$  を真空中の波数  $k_0$  によって,  $k_0 r \rightarrow r$  のように規格化する.

## 2 行列固有値法による解析算法

本章では, 行列固有値法による多層誘電体格子の散乱問題に対する解析手法を述べる. 定式化のため, 構造を一般化した図 1 のような入射波領域, 多層構造領域, 透過波領域からなるコニカルマウントされた多層誘電体格子を考える. この構造に,  $x$  軸負方向からの入射角  $\theta$ ,  $y$  軸正方向からの方位角  $\phi$ , 偏波角  $\gamma$ , 波長  $\lambda$  の平面波が入射する散乱問題を考える. 領域  $0, N$  の媒質定数はそれぞれ,  $(\epsilon_a, \mu_a)$ ,  $(\epsilon_s, \mu_s)$  であり, 多層構造領域では, 誘電体格子の場合, 媒質定数が周期  $\Lambda$  の  $z$  の関数で与えられ, 一樣領域の場合,  $(\epsilon, \mu)$  である.

計算機解析向けのディメンジョンレス化されたマクスウェルの方程式は次式のように表される.

$$\overline{\text{curl}}\sqrt{Y_0}E = -j\mu\sqrt{Z_0}H, \quad \overline{\text{curl}}\sqrt{Z_0}H = j\epsilon\sqrt{Y_0}E \quad (1)$$

但し,  $\overline{\text{curl}}$  は  $k_0$  で空間変数が規格化された rot であり, 真空中の波動インピーダンス  $Z_0 = 1/Y_0$  である. 構造の周期性から電磁界の  $y, z$  成分  $E_\ell, H_\ell$  ( $\ell = y, z$ ) は,  $e_{\ell m}(x), h_{\ell m}(x)$  を展開係数とする  $(2M+1)$  個の空間高調波によって,

$$\sqrt{Y_0}E_\ell(x, y, z) = \sum_{m=-M}^M e_{\ell m}(x)e^{-j(q_0 y + s_m z)}, \quad \sqrt{Z_0}H_\ell(x, y, z) = \sum_{m=-M}^M h_{\ell m}(x)e^{-j(q_0 y + s_m z)} \quad (2)$$

$$s_m = s_0 + mn_K, \quad n_K = \lambda/\Lambda, \quad s_0 = \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \sin \theta \sin \phi, \quad q_0 = \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \sin \theta \cos \phi \quad (3)$$

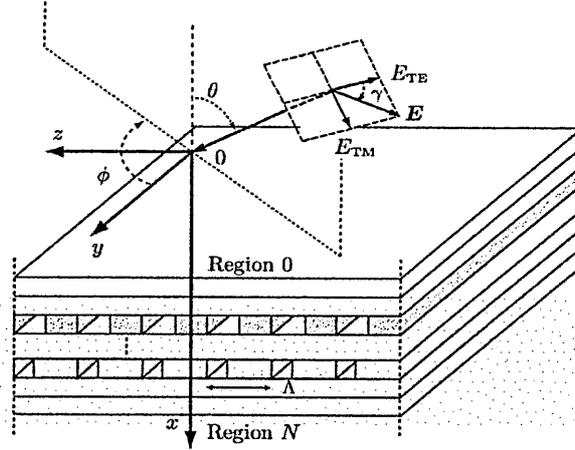


図1 コニカルマウントされた多層誘電体格子

のように展開する。媒質定数について、比誘電率  $\epsilon(z)$ 、比透磁率  $\mu(z)$ 、及びその逆数は、周期性より打ち切り次数  $N_f$  によって、次式のようにフーリエ展開できる。

$$\zeta(z) = \sum_{m=-N_f}^{N_f} \tilde{\zeta}_m e^{jm\Lambda z}, \quad \tilde{\zeta}_m = \frac{1}{\Lambda} \int \zeta(z) \exp\left\{-jm\left(\frac{\Lambda}{\Lambda}\right)z\right\} dz \quad (4)$$

但し、 $\zeta = \epsilon, \mu, 1/\epsilon, 1/\mu$  である。式(2)の展開係数  $e_{\ell m}(x)$ 、 $h_{\ell m}(x)$  から作られる列ベクトル

$$\mathbf{e}_\ell(x) = [e_{\ell-M}(x) \cdots e_{\ell 0}(x) \cdots e_{\ell M}(x)]^T, \quad \mathbf{h}_\ell(x) = [h_{\ell-M}(x) \cdots h_{\ell 0}(x) \cdots h_{\ell M}(x)]^T \quad (5)$$

を導入し、構造的複屈折に基づく Inverse Rule<sup>(14,15)</sup> を適用して、マクスウェルの方程式を整理すると、次式のような連立1階微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} e_y(x) \\ e_z(x) \\ h_y(x) \\ h_z(x) \end{bmatrix} = j [C] \begin{bmatrix} e_y(x) \\ e_z(x) \\ h_y(x) \\ h_z(x) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e_x(x) \\ h_x(x) \end{bmatrix} = [N] \begin{bmatrix} e_y(x) \\ e_z(x) \\ h_y(x) \\ h_z(x) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & -[q][\epsilon]^{-1}[s] & [q][\epsilon]^{-1}[q] - [1/\mu]^{-1} \\ [0] & [0] & [\mu] - [s][\epsilon]^{-1}[s] & [s][\epsilon]^{-1}[q] \\ [q][\mu]^{-1}[s] & [1/\epsilon]^{-1} - [q][\mu]^{-1}[q] & [0] & [0] \\ [s][\mu]^{-1}[s] - [\epsilon] & -[s][\mu]^{-1}[q] & [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [\epsilon]^{-1}[s] & -[\epsilon]^{-1}[q] \\ -[\mu]^{-1}[s] & [\mu]^{-1}[q] & [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (8)$$

但し、

$$[s] = [\delta_{nm} s_m], \quad [q] = q_0 [\delta_{mn}], \quad [\epsilon] = [\tilde{\epsilon}_{n-m}], \quad [1/\epsilon] = [(\tilde{1/\epsilon})_{n-m}], \quad [\mu] = [\tilde{\mu}_{n-m}], \quad [1/\mu] = [(\tilde{1/\mu})_{n-m}] \quad (9)$$

である。連立1階微分方程式(6)の解は、係数行列  $[C]$  の行列固有値問題に帰着する。すなわち、 $(2M+1)$  元のモード振幅ベクトル  ${}^1\mathbf{g}^\pm$ 、 ${}^2\mathbf{g}^\pm$ 、及び  $4(2M+1) \times 4(2M+1)$  元の変換行列  $[T]$  を用いて、電磁界の展開係数ベクトルを次式のように表す。

$$\begin{bmatrix} e_y(x) \\ e_z(x) \\ h_y(x) \\ h_z(x) \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{g}^+(x) \\ {}^2\mathbf{g}^+(x) \\ {}^1\mathbf{g}^-(x) \\ {}^2\mathbf{g}^-(x) \end{bmatrix} \quad (10)$$

但し、記号  $\pm$  は  $x$  軸方向の伝搬方向を示し、 ${}^1\mathbf{g}$ 、 ${}^2\mathbf{g}$  に区別はない。係数行列  $[C]$  が異なる固有値をもち、互いに独立な固有ベクトルをもつ場合、 $[C]$  の相似変換である行列  $[Q] = [T]^{-1}[C][T]$  は、 $4(2M+1)$  個の固有値  $\{{}^1\kappa^+, {}^2\kappa^+, {}^1\kappa^-, {}^2\kappa^-\}$

を要素とする対角行列であり、微分方程式を解くことができる。行列  $[P(x)]$  を

$$[P(x)] = \begin{bmatrix} [\delta_{mn} e^{j^1 \kappa_m^+(x-\hat{x})}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\delta_{mn} e^{j^2 \kappa_m^+(x-\hat{x})}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\delta_{mn} e^{j^1 \kappa_m^-(x-\hat{x})}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\delta_{mn} e^{j^2 \kappa_m^-(x-\hat{x})}] \end{bmatrix} \quad (11)$$

のように表し、伝搬行列とする。但し、 $m, n = -M, \dots, 0, \dots, M$  である。1 階微分方程式 (6) の解は

$$\begin{bmatrix} e_y(x) \\ e_z(x) \\ h_y(x) \\ h_z(x) \end{bmatrix} = [T][P(x)] \begin{bmatrix} {}^1g^+(\hat{x}) \\ {}^2g^+(\hat{x}) \\ {}^1g^-(\hat{x}) \\ {}^2g^-(\hat{x}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

のように求められる。ここで、 $\hat{x}$ ,  $\bar{x}$  は回折波振幅の位相基準点であり、本論文では、数値計算上のオーバーフロー回避のために、伝搬方向に応じて位相基準点を変更している。本手法では、一様領域の電磁界は、TE 波、TM 波の重ね合わせを用いて表現しているので、固有値  ${}^1\kappa_m^\pm \Rightarrow E\kappa_m^\pm$ ,  ${}^2\kappa_m^\pm \Rightarrow M\kappa_m^\pm$  であり、モード振幅ベクトル  ${}^1g^\pm \Rightarrow E\mathbf{g}^\pm$ ,  ${}^2g^\pm \Rightarrow M\mathbf{g}^\pm$  であり、上付文字 E, M は TE 波、TM 波成分を示す。一方、周期構造領域では、固有値  ${}^1\kappa_m^\pm$  と  ${}^2\kappa_m^\pm$ 、及びモード振幅ベクトル  ${}^1g^\pm$  と  ${}^2g^\pm$  は数値計算の都合上、区別できていない。

### 3 全領域への影理論の適用

筆者らは先に、誘電体格子の 3 次元問題において、入射波領域にだけ、影理論の計算法を適用し、低入射角極限における電磁波の散乱問題の特異性を解決した<sup>(12)</sup>。本章では、多層誘電体格子の入射波領域だけでなく、中間領域を含む全領域における電磁界表現式に影理論による式操作を行い、固有値の縮退問題を解決する。

#### 3.1 一様領域の場合

一様領域では、比誘電率、比透磁率は周期性を持たない定数であり、式 (8) の係数行列  $[C]$  の小行列は全て対角行列となる。これは空間高調波に結合が無く、単なる平面波の集まりであるから、 $m$  次の空間高調波成分に相当する  $4 \times 4$  元の係数行列  $[C_m]$  について、検討すれば良い。 $[C_m]$  の固有値  $E\kappa_m^\pm = M\kappa_m^\pm = \mp \xi_m$  は、

$$\xi_m = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon\mu - q_0^2 - s_m^2} & (\varepsilon\mu \geq q_0^2 + s_m^2) \\ j\sqrt{q_0^2 + s_m^2 - \varepsilon\mu} & (\varepsilon\mu < q_0^2 + s_m^2) \end{cases} \quad (13)$$

のように解析的に求められ、固有ベクトル行列  $[T_m]$  は

$$[T_m] = \begin{bmatrix} E\mathbf{t}_m^+ & M\mathbf{t}_m^+ & E\mathbf{t}_m^- & M\mathbf{t}_m^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{s}_m\sqrt{\mu} & -\xi_m\bar{q}_0/\sqrt{\varepsilon} & -\bar{s}_m\sqrt{\mu} & \xi_m\bar{q}_0/\sqrt{\varepsilon} \\ \bar{q}_0\sqrt{\mu} & -\xi_m\bar{s}_m/\sqrt{\varepsilon} & \bar{q}_0\sqrt{\mu} & \xi_m\bar{s}_m/\sqrt{\varepsilon} \\ -\xi_m\bar{q}_0/\sqrt{\mu} & \bar{s}_m\sqrt{\varepsilon} & \xi_m\bar{q}_0/\sqrt{\mu} & \bar{s}_m\sqrt{\varepsilon} \\ -\xi_m\bar{s}_m/\sqrt{\mu} & -\bar{q}_0\sqrt{\varepsilon} & \xi_m\bar{s}_m/\sqrt{\mu} & -\bar{q}_0\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\bar{s}_m = \begin{cases} \frac{s_m}{\sqrt{q_0^2 + s_m^2}} & (m \neq 0) \\ \sin \phi & (m = 0) \end{cases}, \quad \bar{q}_0 = \begin{cases} \frac{q_0}{\sqrt{q_0^2 + s_m^2}} & (m \neq 0) \\ \cos \phi & (m = 0) \end{cases} \quad (15)$$

のように、解析的に求められる。但し、固有ベクトル  $E\mathbf{t}^\pm$  と  $M\mathbf{t}^\pm$  は電界強度  $|e| = \sqrt{|e_x|^2 + |e_y|^2 + |e_z|^2}$  が、TE 波、TM 波成分で同じ大きさになるように規格化している。固有値が縮退しなければ、変換行列  $[T_m]$ 、伝搬行列  $[P_m(x)]$ 、回折波振幅 (中間領域では、モード振幅)  $E^{(M)}\mathbf{g}_m^\pm$  を用いて、電磁界の  $m$  ( $= -M, \dots, 0, \dots, M$ ) 次成分は、次式のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} e_{ym}(x) \\ e_{zm}(x) \\ h_{ym}(x) \\ h_{zm}(x) \end{bmatrix} = [T_m][P_m(x)] \begin{bmatrix} E\mathbf{g}_m^+(\hat{x}) \\ M\mathbf{g}_m^+(\hat{x}) \\ E\mathbf{g}_m^-(\hat{x}) \\ M\mathbf{g}_m^-(\hat{x}) \end{bmatrix}, \quad [P_m(x)] = \begin{bmatrix} e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\xi_m(x-\hat{x})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{j\xi_m(x-\hat{x})} \end{bmatrix} \quad (16)$$

今、式 (16) に影理論による式操作を行えば、一様領域における電磁界は

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} e_{ym}(x) \\ e_{zm}(x) \\ h_{ym}(x) \\ h_{zm}(x) \end{bmatrix} &= [T'_m] [P'_m(x)] \begin{bmatrix} E g_m^+(x) \\ M g_m^+(x) \\ E g_m^-(x) \\ M g_m^-(x) \end{bmatrix} \\
&= E t_m^+ e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} E g_m^+(x) - E t_m^- e^{j\xi_m(x-\hat{x})} E g_m^+(x) + E t_m^- e^{j\xi_m(x-\hat{x})} \{ E g_m^+(x) + E g_m^-(x) \} \\
&\quad + M t_m^+ e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} M g_m^+(x) - M t_m^- e^{j\xi_m(x-\hat{x})} M g_m^+(x) + M t_m^- e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} \{ M g_m^+(x) + M g_m^-(x) \} \\
&= \begin{bmatrix} -j\bar{s}\sqrt{\mu} \frac{e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} - e^{j\xi_m(x-\hat{x})}}{2j\xi_m} & -(\bar{q}/\sqrt{\varepsilon}) \frac{e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} + e^{j\xi_m(x-\hat{x})}}{2} & -\bar{s}\sqrt{\mu} e^{j\xi_m(x-\hat{x})} & (\xi_m \bar{q}/\sqrt{\varepsilon}) e^{j\xi_m(x-\hat{x})} \\ j\bar{q}\sqrt{\mu} \frac{e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} - e^{j\xi_m(x-\hat{x})}}{2j\xi_m} & -(\bar{s}/\sqrt{\varepsilon}) \frac{e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} + e^{j\xi_m(x-\hat{x})}}{2} & \bar{q}\sqrt{\mu} e^{j\xi_m(x-\hat{x})} & (\xi_m \bar{s}/\sqrt{\varepsilon}) e^{j\xi_m(x-\hat{x})} \\ -(\bar{q}/\sqrt{\mu}) \frac{e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} + e^{j\xi_m(x-\hat{x})}}{2} & j\bar{s}\sqrt{\varepsilon} \frac{e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} - e^{j\xi_m(x-\hat{x})}}{2j\xi_m} & (\xi_m \bar{q}/\sqrt{\mu}) e^{j\xi_m(x-\hat{x})} & \bar{s}\sqrt{\varepsilon} e^{j\xi_m(x-\hat{x})} \\ -(\bar{s}/\sqrt{\mu}) \frac{e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} + e^{j\xi_m(x-\hat{x})}}{2} & -j\bar{q}\sqrt{\varepsilon} \frac{e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} - e^{j\xi_m(x-\hat{x})}}{2j\xi_m} & (\xi_m \bar{s}/\sqrt{\mu}) e^{j\xi_m(x-\hat{x})} & -\bar{q}\sqrt{\varepsilon} e^{j\xi_m(x-\hat{x})} \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} 2\xi_m E g_m^+(x) \\ 2\xi_m M g_m^+(x) \\ E g_m^+(x) + E g_m^-(x) \\ M g_m^+(x) + M g_m^-(x) \end{bmatrix} = [T'_m] [P'_m(x)] \begin{bmatrix} 2\xi_m E g_m^+(x) \\ 2\xi_m M g_m^+(x) \\ E g_m^+(x) + E g_m^-(x) \\ M g_m^+(x) + M g_m^-(x) \end{bmatrix} = [T'_m] [P'_m(x)] \begin{bmatrix} E M_m^\oplus \\ M M_m^\oplus \\ E M_m^- \\ M M_m^- \end{bmatrix} \quad (17)
\end{aligned}$$

のように表される。但し、

$$[T'_m] = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{q}_0/\sqrt{\varepsilon} & -\bar{s}_m\sqrt{\mu} & \xi_m \bar{q}_0/\sqrt{\varepsilon} \\ 0 & -\bar{s}_m/\sqrt{\varepsilon} & \bar{q}_0\sqrt{\mu} & \xi_m \bar{s}_m/\sqrt{\varepsilon} \\ -\bar{q}_0/\sqrt{\mu} & 0 & \xi_m \bar{q}_0/\sqrt{\mu} & \bar{s}_m\sqrt{\varepsilon} \\ -\bar{s}_m/\sqrt{\mu} & 0 & \xi_m \bar{s}_m/\sqrt{\mu} & -\bar{q}_0\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[P'_m(x)] = \begin{bmatrix} e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} & 0 & 0 \\ \frac{e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} - e^{j\xi_m(x-\hat{x})}}{2\xi_m} & 0 & e^{j\xi_m(x-\hat{x})} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} - e^{j\xi_m(x-\hat{x})}}{2\xi_m} & 0 & e^{j\xi_m(x-\hat{x})} \end{bmatrix} \quad (19)$$

であり、 $x$  軸正方向の伝搬方向を示す記号  $+$  は物理的意味を失っているため、 $\oplus$  を採用した。また、 $\xi_m = 0$  のとき、 $\lim_{\xi_m \rightarrow 0} \frac{e^{-j\xi_m(x-\hat{x})} - e^{j\xi_m(x-\hat{x})}}{2\xi_m} = \lim_{\xi_m \rightarrow 0} \frac{-j \sin \xi_m (x - \frac{\hat{x} + \hat{x}}{2})}{\xi_m} e^{j\xi_m \frac{\hat{x} - \hat{x}}{2}} = -j \left( x - \frac{\hat{x} + \hat{x}}{2} \right)$  である。新しく導出した  $[T'_m]$ 、 $[P'_m(x)]$  はそれぞれ、影理論の変換行列、伝搬行列である。変換行列  $[T'_m]$  の第 1, 2 列は拡張固有空間から得られた固有ベクトルに相当し、第 3, 4 列は通常の固有ベクトルとなる。但し、固有値が縮退する場合も、縮退しない通常の場合も、変換行列  $[T'_m]$  と伝搬行列  $[P'_m(x)]$  を使った電磁界表現式 (17) で表すことができる。従来、一様領域では、固有値が縮退する電磁界成分に対してだけ影理論を適用してきた<sup>(9,10)</sup> が、本論文では、式 (18) の 3 次元散乱問題に対応した新しい形式の変換行列、及び回折波振幅の位相基準点の変更に伴い、改良した式 (19) の伝搬行列を用いることにより、全ての固有値に対する電磁界成分に影理論が適用可能になっている。式 (17) において、 $2(2M+1)$  元のベクトル

$$e = [e_y \ e_z]^T, \quad h = [h_y \ h_z]^T \quad (20)$$

$$M^\oplus = [E M^\oplus \ M M^\oplus]^T = [E M_{-M}^\oplus \ \dots \ E M_0^\oplus \ \dots \ E M_M^\oplus \ M M_{-M}^\oplus \ \dots \ M M_0^\oplus \ \dots \ M M_M^\oplus]^T \quad (21)$$

$$M^- = [E M^- \ M M^-]^T = [E M_{-M}^- \ \dots \ E M_0^- \ \dots \ E M_M^- \ M M_{-M}^- \ \dots \ M M_0^- \ \dots \ M M_M^-]^T \quad (22)$$

及び、 $m$  次の空間高調波に対応する  $4 \times 4$  元の行列  $[T'_m]$ 、 $[P'_m(x)]$  について、 $(2M+1)$  個の空間高調波全てを含めた  $4(2M+1) \times 4(2M+1)$  元の  $[T']$ 、 $[P'(x)]$  を用いて表すと、電磁界成分は、

$$\begin{bmatrix} e(x) \\ h(x) \end{bmatrix} = [T'] [P'(x)] \begin{bmatrix} M^\oplus \\ M^- \end{bmatrix} \quad (23)$$

のように表すことができる。

### 3.2 周期構造領域の場合

周期構造領域においても、係数行列  $[C]$  の固有値が  $0$  で縮退する可能性がある。そこで本節では、周期構造領域においても、影理論を適用した新しい変換行列  $[T']$  と改良した伝搬行列  $[P'(x)]$  を用いた電磁界表現式を導出する。

まず、微分方程式 (6) の係数行列  $[C]$  に対する  $4(2M+1) \times 4(2M+1)$  元の固有ベクトル行列  $[T]$  を、次元数が半分の行列で計算する方法を述べる。今、 $[C]$  の固有値行列  $[\kappa]$ 、固有ベクトル行列  $[T]$  を

$$[\kappa] = \begin{bmatrix} [\delta_{kl}\kappa_k] & [0] \\ [0] & [\delta_{kl}\kappa'_k] \end{bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} [T_{11}] & [T_{12}] \\ [T_{21}] & [T_{22}] \end{bmatrix} \quad (24)$$

のように表示すると、

$$[C][T] = [T][\kappa] \quad (25)$$

が成立する。ここで、係数行列  $[C]$  は

$$[C] = \begin{bmatrix} [0] & [C_1] \\ [C_2] & [0] \end{bmatrix} \quad (26)$$

のように表すことができ、式 (25) について、次元数が半分の小行列を用いて表示すれば、

$$\begin{bmatrix} [0] & [C_1] \\ [C_2] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T_{11}] \\ [T_{21}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{11}] \\ [T_{21}] \end{bmatrix} [\kappa_k \delta_{kl}], \quad \begin{bmatrix} [0] & [C_1] \\ [C_2] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T_{12}] \\ [T_{22}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{12}] \\ [T_{22}] \end{bmatrix} [\kappa'_k \delta_{kl}] \quad (27)$$

となる。但し、 $k, l = 1, 2, \dots, 2(2M+1)$  である。さらに、小行列だけを用いて演算すれば、

$$[[C_2][C_1]][T_{21}] = [C_2][T_{11}][\kappa_k \delta_{kl}] = [T_{21}][\kappa_k^2 \delta_{kl}] \quad (28)$$

$$[[C_2][C_1]][T_{22}] = [C_2][T_{12}][\kappa'_k \delta_{kl}] = [T_{22}][\kappa_k'^2 \delta_{kl}] \quad (29)$$

が得られる。これらの式は、 $[[C_1][C_2]]$  の固有値が、 $\kappa_k^2 = \kappa_k'^2$  であり、対角化行列が  $[T_{21}] = [T_{22}]$  であることを示している。従って、 $\kappa_k^2 = \xi_k^2$  とすれば、固有値は、 $\{[\kappa_k] \{ \kappa'_k \} \} = \{[-\xi_k] \{ \xi_k \} \}$  である。また、 $[T_{21}] = [\Phi]$  とすれば、式 (27) から、

$$[T_{11}] = [C_2]^{-1}[\Phi][-\xi_k \delta_{kl}], \quad [T_{12}] = [C_2]^{-1}[\Phi][\xi_k \delta_{kl}] \quad (30)$$

であり、対角化行列  $[T]$  は、

$$[T] = \begin{bmatrix} -[C_2]^{-1}[\Phi][-\xi_k \delta_{kl}] & [C_2]^{-1}[\Phi][\xi_k \delta_{kl}] \\ [\Phi] & [\Phi] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_2]^{-1}[\Phi][\xi_k^2 \delta_{kl}] & [C_2]^{-1}[\Phi][\xi_k^2 \delta_{kl}] \\ [\Phi][-\xi_k \delta_{kl}] & [\Phi][\xi_k \delta_{kl}] \end{bmatrix} \quad (31)$$

のように表され、次元数が半分の行列で行列固有値計算を実行できている。逆行列演算を含まないように、式 (31) を固有ベクトルを変形することにより、対角化行列

$$[T] = \begin{bmatrix} [C_1][\Phi] & [C_1][\Phi] \\ -[\Phi][\xi_k \delta_{kl}] & [\Phi][\xi_k \delta_{kl}] \end{bmatrix} \quad (32)$$

が求められる。

今、式 (12) において、 $2(2M+1)$  元のベクトルを用いて、 $e = [e_y \ e_z]^T$ 、 $h = [h_y \ h_z]^T$ 、 $g^\pm = [g^+ \ g^-]^T$  のように表せば、電磁界分布は、

$$\begin{bmatrix} e(x) \\ h(x) \end{bmatrix} = [T][P(x)] \begin{bmatrix} g^+(\hat{x}) \\ g^-(\hat{x}) \end{bmatrix} \quad (33)$$

のように表すことができる。固有値  $4(2M+1)$  個の固有値  $\{-\xi_k, \xi_k\}$  からなる伝搬行列は

$$[P(x)] = \begin{bmatrix} [\delta_{kl} e^{-j\xi_k(x-\hat{x})}] & [0] \\ [0] & [\delta_{kl} e^{j\xi_k(x-\hat{x})}] \end{bmatrix} \quad (34)$$

のように表すと、行列の次元数は異なるが、電磁界表現式 (33) は 2 次元問題の結果<sup>(9-11)</sup> と形式的には、同じになる。式 (33) に影理論による式操作を行うと、次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e(x) \\ h(x) \end{bmatrix} &= [T][P(x)] \begin{bmatrix} g^+(\hat{x}) \\ g^-(\hat{x}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [C_1][\Phi] \\ -[\Phi][\xi_k \delta_{kl}] \end{bmatrix} [\delta_{kl} e^{-j\xi_k(x-\hat{x})}] g^+(\hat{x}) - \begin{bmatrix} [C_1][\Phi] \\ [\Phi][\xi_k \delta_{kl}] \end{bmatrix} [\delta_{kl} e^{j\xi_k(x-\hat{x})}] g^+(\hat{x}) + \begin{bmatrix} [C_1][\Phi] \\ [\Phi][\xi_k \delta_{kl}] \end{bmatrix} [\delta_{kl} e^{j\xi_k(x-\hat{x})}] \{g^+(\hat{x}) + g^-(\hat{x})\} \\ &= [T'] [P'(x)] \begin{bmatrix} 2[\xi_k \delta_{kl}] g^+(\hat{x}) \\ g^+(\hat{x}) + g^-(\hat{x}) \end{bmatrix} = [T'] [P'(x)] \begin{bmatrix} M^+ \\ M^- \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

ここで、周期構造領域の影理論の変換行列  $[T']$  と伝搬行列  $[P'(x)]$  は数値的に求められ、次式のように表される。

$$[T'] = \begin{bmatrix} [0] & [C_1][\Phi] \\ -[\Phi] & [\Phi][\xi_k \delta_{kl}] \end{bmatrix}, \quad [P'(x)] = \begin{bmatrix} [\delta_{kl} e^{-j\xi_k(x-\hat{x})}] & [0] \\ [\delta_{kl} \frac{e^{-j\xi_k(x-\hat{x})} - e^{j\xi_k(x-\hat{x})}}{2\xi_k}] & [\delta_{kl} e^{j\xi_k(x-\hat{x})}] \end{bmatrix} \quad (36)$$

従来、周期構造領域では、固有値が最小になる電磁界成分に対してだけ影理論を適用してきた<sup>(10)</sup> が、本論文では、式 (36) の新しい変換行列  $[T']$ 、及び位相基準点の変更に対応した伝搬行列  $[P'(x)]$  を用いることにより、全ての固有値に対する電磁界に影理論が適用可能になっている。



#### 4 回折効率と光学定理

入射波電力は散乱因子を用いて表すことができ、 $x$  方向の電流から

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}[\xi_0^a] |E g_0^{a+}|^2 + 2\operatorname{Im}[\xi_0^a] \operatorname{Im} \left[ (E g_0^{a+})^* (2\xi_0^a E S_0^{a-} - E g_0^{a+}) \right] \\
& + \operatorname{Re}[\xi_0^a] |M g_0^{a+}|^2 + 2\operatorname{Im}[\xi_0^a] \operatorname{Im} \left[ (M g_0^{a+})^* (2\xi_0^a M S_0^{a-} - M g_0^{a+}) \right] \\
& = \sum_m \operatorname{Re}[\xi_m^a] |2\xi_0^a E S_m^{a-} - \delta_{m0} E g_0^{a+}|^2 + \sum_m \operatorname{Re}[\xi_m^a] |2\xi_0^a M S_m^{a-} - \delta_{m0} M g_0^{a+}|^2 \\
& + \sum_m \operatorname{Re}[\xi_m^s] |2\xi_0^s E S_m^{s+}|^2 + \sum_m \operatorname{Re}[\xi_m^s] |2\xi_0^s M S_m^{s+}|^2
\end{aligned} \tag{45}$$

が得られる<sup>(12)</sup>。ここで、 $\xi_m^s$  は基板領域の  $m$  次の固有値である。入射波領域では、 $E^{(M)} S_{n,m}^{a\oplus} = E^{(M)} g_m^{a+}$  であるから、散乱因子だけを用いた  $m$  次の TE 波、TM 波成分の反射回折効率  $E^{(M)} \eta_m^r$ 、透過回折効率  $E^{(M)} \eta_m^t$  は、次式のように定義することができる。

- 伝搬波入射の場合 ( $\xi_0^a$  が実数)

$$E^{(M)} \eta_m^r = \begin{cases} \frac{|2\xi_0^a E^{(M)} S_0^{a-} - E^{(M)} g_0^{a+}|^2}{P_{\text{in}}} & m = 0 \\ \frac{4\xi_0^a \operatorname{Re}[\xi_m^a] |E^{(M)} S_m^{a-}|^2}{P'_{\text{in}}} & m \neq 0 \end{cases}, \quad E^{(M)} \eta_m^t = \frac{4\xi_0^s \operatorname{Re}[\xi_m^s] |E^{(M)} S_m^{s+}|^2}{P'_{\text{in}}} \tag{46}$$

$$P'_{\text{in}} = |E S_0^{a\oplus}|^2 + |M S_0^{a\oplus}|^2 \tag{47}$$

- エバネセント入射の場合 ( $\xi_0^a$  が虚数)

$$E^{(M)} \eta_m^r = \begin{cases} 0 & m = 0 \\ \frac{\operatorname{Re}[\xi_m^a] |E^{(M)} S_m^{a-}|^2}{P''_{\text{in}}} & m \neq 0 \end{cases}, \quad E^{(M)} \eta_m^t = \frac{\operatorname{Re}[\xi_m^s] |E^{(M)} S_m^{s+}|^2}{P''_{\text{in}}} \tag{48}$$

$$P''_{\text{in}} = \operatorname{Re} \left[ (E S_0^{a\oplus})^* E S_0^{a-} \right] + \operatorname{Re} \left[ (M S_0^{a\oplus})^* M S_0^{a-} \right] \tag{49}$$

これらの式では、分母に  $\xi_0^a$  が含まれておらず、低入射角極限 ( $\xi_0^a \rightarrow 0$ ) においても、回折効率を定義可能である。さらに、式 (45) を変形すると、

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \left[ (E S_0^{a\oplus})^* E S_0^{a-} \right] + \operatorname{Re} \left[ (M S_0^{a\oplus})^* M S_0^{a-} \right] \\
& = \sum_m \operatorname{Re}[\xi_m^a] |E S_m^{a-}|^2 + \sum_m \operatorname{Re}[\xi_m^a] |M S_m^{a-}|^2 + \sum_m \operatorname{Re}[\xi_m^s] |E S_m^{s+}|^2 + \sum_m \operatorname{Re}[\xi_m^s] |M S_m^{s+}|^2
\end{aligned} \tag{50}$$

が得られる。これは、左辺において、反射係数が減少すれば、右辺の回折波電力の総和が増大することを示す光学定理である。変形反射回折効率、変形透過回折効率をそれぞれ、

$$E^{(M)} \overline{\eta}_m^r = \frac{\operatorname{Re}[\xi_m^a] |E^{(M)} S_m^{a-}|^2}{P''_{\text{in}}}, \quad E^{(M)} \overline{\eta}_m^t = \frac{\operatorname{Re}[\xi_m^s] |E^{(M)} S_m^{s+}|^2}{P''_{\text{in}}} \tag{51}$$

のように定義すれば、エバネセント入射に関しては、回折効率と光学定理は、同じ概念であることがわかる。無損失媒質の場合、エネルギーの保存を表す関係式

$$\sum_m (E \eta_m^r + M \eta_m^r + E \eta_m^t + M \eta_m^t) = 1, \quad \sum_m (E \overline{\eta}_m^r + M \overline{\eta}_m^r + E \overline{\eta}_m^t + M \overline{\eta}_m^t) = 1 \tag{52}$$

は、数値計算のチェックによく使用される。

## 5 数値計算例及び検討

数値計算では、図 1 において  $N = 3$ 、領域 2 を周期構造とした図 2 のような 4 層構造を扱う。この構造は、文献 (10) で扱った構造であり、本論文では、方位角  $\phi$  でコニカルマウントされている場合を考える。領域 2 の厚さ  $h_2$ 、格子周期  $\Lambda$ 、格子幅  $W$ 、格子の比誘電率  $\epsilon_2$  とする。領域 0, 1, 3 は一様領域、比誘電率はそれぞれ、 $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_3$ 、領域 1 の厚さは  $h_1$  である。計算パラメータは、方位角  $\phi = 110$  [deg]、偏波角  $\gamma = 45$  [deg]、 $\epsilon_0 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 2.25$ 、 $\epsilon_1 = 1.0$ 、 $W/\Lambda = 0.5$ 、 $\Lambda/\lambda = 1.2$ 、 $h_1/\lambda = 1.0$ 、 $h_2/\lambda = 0.5$  とする。以下の計算では、全領域の全ての固有値に対する電磁界成分に影理論を適用している。空間高調波の打ち切り展開項数は  $2M + 1 = 51$  とし、エネルギー誤差は常に  $10^{-10}$  以下であることを確認している。 $\epsilon_0 > \epsilon_1$  の関係のため、中間領域 1 の 0 次の固有値が 0 で縮退する ( $\xi_{1,0} = 0$ ) 臨界角 ( $\theta_{CA} = \sin^{-1} \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_0} = 41.810 \dots$  [deg]) が存在する。

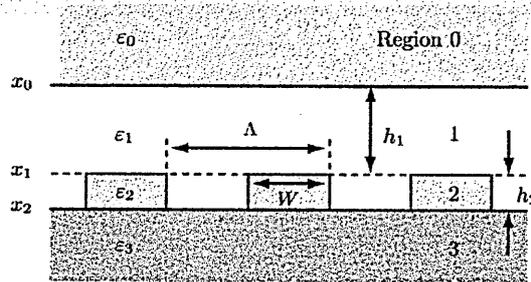


図 2 解析する多層周期構造

式 (44) から、中間領域 1 の 0 次の到来波の回折波振幅  $E^{(M)} g_{1,0}^+$ 、その反射波の回折波振幅  $E^{(M)} g_{1,0}^-$  について、位相変化と振幅比を図 3 に示す。図 (a)、(b) はそれぞれ、入射角  $\theta$  が臨界角  $\theta_{CA}$  より小さい場合、大きい場合である。これらの図から、入射角が臨界角に近づくとき、振幅比 1、回折波振幅の位相の変化  $180$  [deg] となっている。TE 波、TM 波成分の領域 1 に低入射する到来波が同じ大きさの振幅と逆位相をもつ反射波によって、打ち消される現象が中間領域において生じていることがわかる。なお、臨界角入射では、低入射角極限のように高次の空間高調波成分が消滅する現象<sup>(2,3,9,12)</sup> は生じず、高次の回折波振幅は 0 にならないため、0 次以外の回折波に関する計算結果の表示を省略した。

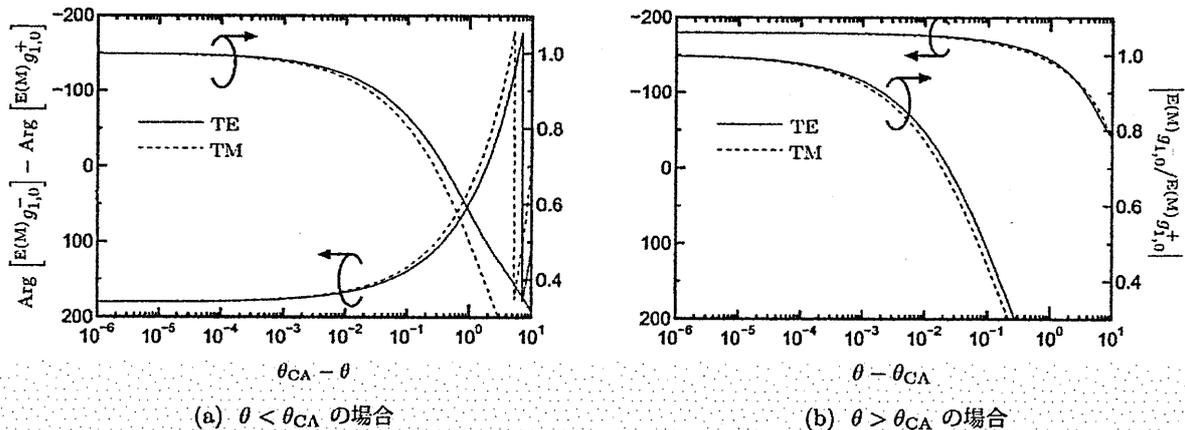


図 3 臨界角付近における中間領域 1 の 0 次回折波振幅の位相と振幅

$$(\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 2.25, \epsilon_2 = 1.0, h_1/\lambda = 1.0, h_2/\lambda = 0.5, W/\Lambda = 0.5, \Lambda/\lambda = 1.2, \theta_{CA} = \sin^{-1} \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}, 2M + 1 = 51)$$

図 4 は臨界角付近の 0 次の界分布を計算したものである。電界分布  $|e_{y0}|$ 、 $|e_{z0}|$ 、電束密度分布  $|d_x|$  を図 (a) に、磁界分布  $|h_{y0}|$ 、 $|h_{z0}|$ 、磁束密度分布  $|b_x|$  を図 (b) に示す。なお、格子領域の計算結果は、0 次のモードに対する要素だけを抽出して計算した推定値である。同図から、臨界角入射の場合の電界分布、磁界分布は、臨界角と僅かに異なる入射角の場合の界分布と、ほぼ近い値になっている。固有値が縮退、非縮退に関わらず、影理論による新しい電磁界表現式を用いて、計算を実行できていることがわかる。入射面が格子列に直交する 2 次元問題では、TE 波、TM 波が臨界角入射する場合、中間領域において、磁界、電界成分の  $z$  成分がそれぞれ、一定となった<sup>(10)</sup>。同図から、3 次元問題では、臨界角入射の場合、

$0 \leq x/\lambda < 1$  の中間領域 1 の電界分布, 磁界分布は,  $y$  成分だけでなく,  $z$  成分も位置に比例して減衰している. これは, 式 (17) において,  $\hat{x} = x_0 = 0$ ,  $\hat{x} = x_1$ ,  $\xi_m = 0$  とすれば, 電磁界成分は,

$$\begin{bmatrix} e_{ym}(x) \\ e_{zm}(x) \\ h_{ym}(x) \\ h_{zm}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\bar{s}\sqrt{\mu}(x-x_1/2) & -\bar{q}/\sqrt{\epsilon} & -\bar{s}\sqrt{\mu} & 0 \\ -j\bar{q}\sqrt{\mu}(x-x_1/2) & -\bar{s}/\sqrt{\epsilon} & \bar{q}\sqrt{\mu} & 0 \\ -\bar{q}/\sqrt{\mu} & -j\bar{s}\sqrt{\epsilon}(x-x_1/2) & 0 & \bar{s}/\sqrt{\epsilon} \\ -\bar{q}/\sqrt{\mu} & j\bar{q}\sqrt{\epsilon}(x-x_1/2) & 0 & -\bar{q}/\sqrt{\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EM_m^{\oplus} \\ MM_m^{\oplus} \\ EM_m^{-} \\ MM_m^{-} \end{bmatrix} \quad (53)$$

のように与えられ, 固有値が 0 で縮退する場合, その次数の電磁界分布は位置  $x$  に比例して減衰することがわかる. 電束密度, 磁束密度の  $x$  成分も同様に減衰している様子がわかり, 電磁界は, 入射面が格子列と直交しない通常の場合には, 位置に比例して減衰すると言える. また,  $x/\lambda \leq 0$  の入射波領域では, 入射波と反射波による定在波が見られ,  $x/\lambda > 1.5$  の基板領域では, トンネル効果による前進波が伝搬の様子がみられる.

最後に, 高次の固有値が縮退する場合の例として, 入射角  $\theta = \sin^{-1}\{(\sqrt{\epsilon_2} - n_K)/\sqrt{\epsilon_1}\}$  を考える. この入射角では, 中間領域 1 において, 1 次の固有値が 0 で縮退する ( $\xi_{1,1} = 0$ ). 図 5 は,  $x/\lambda$  に対する 1 次の電磁界分布, 電束密度分布である. 中間領域では,  $z$  成分の変化は小さいものの, 全成分, 位置に比例して減衰している様子がわかる.

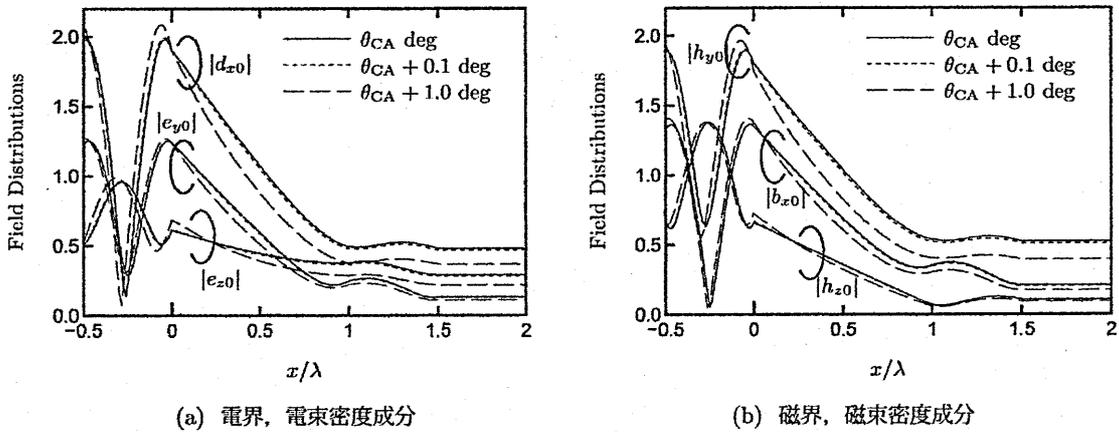


図 4 臨界角付近における 0 次の界分布

$$(\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 2.25, \epsilon_2 = 1.0, h_1/\lambda = 1.0, h_2/\lambda = 0.5, W/\Lambda = 0.5, \Lambda/\lambda = 1.2, \theta_{CA} = \sin^{-1}\sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}, 2M+1 = 51)$$

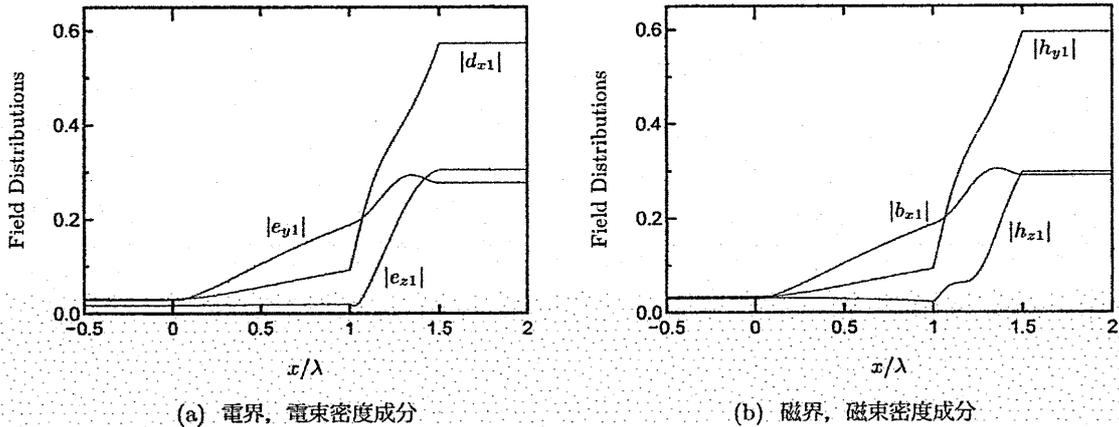


図 5 1 次の固有値が縮退する場合の界分布

$$(\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 2.25, \epsilon_2 = 1.0, h_1/\lambda = 1.0, h_2/\lambda = 0.5, W/\Lambda = 0.5, \Lambda/\lambda = 1.2, \theta = \sin^{-1}\{(\sqrt{\epsilon_2} - n_K)/\sqrt{\epsilon_1}\}, 2M+1 = 51)$$

## 6 むすび

本論文では、多層誘電体格子の3次元散乱問題に対する行列固有値法において、入射波領域を含む全ての領域を対象に、縮退または最小の固有値だけでなく、全ての固有値に対する電磁界成分に影理論を適用した。新しい形式の変換行列、及び回折波振幅の位相基準点の変更により、改良した伝搬行列を導出し、これらの行列の積と散乱因子を用いて、固有値が縮退する場合を含む電磁界表現式を提案した。また、散乱因子だけを用いた回折効率を定義し、光学定理について述べた。

数値計算では、中間領域においても、到来波が反射波に打ち消される現象が生じることを明らかにした。入射面が格子列と直交するように限定された2次元問題と異なり、一般的な3次元問題においては、固有値が縮退する場合、中間領域の電磁界の直交座標系における全成分が、位置に比例して減衰することを示した。

今後は、円偏波入射について検討していきたい。

## 参考文献

- (1) M. I. Charnotskii, "Wave scattering by periodic surface at low grazing angles : single grazing mode", Progress in electromagnetic Research, PIER 26, pp. 1-41, 2000.
- (2) J. Nakayama, "Shadow theory of diffraction gratings", IEICE Trans. Electron., Vol. E92-C, No. 1, pp. 17-24, 2009.
- (3) J. Nakayama, "Shadow theory of diffraction grating : A numerical example for TE wave", IEICE Trans. Electron., Vol. E92-C, No. 3, pp. 370-373, 2009.
- (4) R. Petit editing, Electromagnetic theory of gratings, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1980.
- (5) K. Rokushima and J. Yamakita, "Analysis of anisotropic dielectric gratings", J. Opt. Soc. Am., Vol. 73, No. 7, pp. 901-908, 1983.
- (6) 山崎恒樹, 計算電磁気学, 6章, 培風館, 2003年.
- (7) R. Ozaki, T. Yamasaki and T. Hinata, "Scattering of electromagnetic waves by dielectric gratings with dielectric rectangular cylinders sandwiched between two multilayers", IEEE Trans., FM., Vol. 129, No. 10, pp. 718-724, 2009.
- (8) H. Wakabayashi and J. Yamakita, "Analysis of thickness-profiled gratings for oblique incidence using approximate modeling by plane gratings with surface resistance, Radio Science, Vol. 44, RS5009, 2009.
- (9) 若林秀昭, 浅居正充, 松本恵治, 山北次郎, "影理論を用いた誘電体回折格子による散乱界表現", 電子情報通信学会論文誌(C), Vol. J93-C, No. 3, pp. 81-90, 2010年3月.
- (10) H. Wakabayashi, K. Matsumoto, M. Asai and J. Yamakita, "Numerical methods of multilayered dielectric gratings by application of shadow theory to middle regions", IEICE Transactions on Electronics, Vol. E95-C, No. 1, pp. 44-52, January 2012.
- (11) H. Wakabayashi, M. Asai, K. Matsumoto and J. Yamakita, "Numerical methods for composite dielectric gratings embedded with conducting strips using scattering factors", IEICE Transactions on Electronics, Vol. E96-C, No. 1, pp. 19-27, January 2013.
- (12) H. Wakabayashi, M. Asai, K. Matsumoto and J. Yamakita, "Analysis of low grazing scattering by dielectric gratings in conical mounting using scattering factors", IEICE Transactions on Electronics, Vol. E97-C, No. 1, pp. 50-57, January 2014.
- (13) 若林秀昭, 山北次郎, "コニカルマウントされた多層誘電体周期構造の散乱因子を用いた界表現", 電子情報通信学会2014年ソサイエティ大会エレクトロニクス講演論文集, CS-1-4, 2014年9月(発表予定).
- (14) L. Li, "Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures", J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 13, No. 9, pp. 870-876, 1996.
- (15) 岡田俊也, 若林秀昭, 稲井寛, "周期的誘電率分布を持つ回折格子の解析における収束改善", 電子情報通信学会論文誌(C), Vol. J97-C, No. 5, pp. 235-238, 2014年5月.

大阪管区気象台における気象・地震観測及びデータ処理手法について  
The observations and analyses of weather and earthquakes at the Osaka  
Regional Headquarters of the Japan Meteorological Agency

金森 祥一（大阪管区気象台）

Shouichi Kanamori

Osaka Regional Headquarters, Japan Meteorological Agency

大阪管区気象台にて平成 26 年度第 3 回輻射科学研究会定例会及び見学会が開催された。研究会例会において気象と地震の観測に係る衛星通信やアンテナ・レーダといった電磁波・通信技術、及び、観測された大容量の非線形データの解析手法やそれらに基づく予報技術に関する大変貴重な御講演を賜った。研究会終了後、気象・地震データ解析・予報の現業現場を見学させていただき、大変懇切丁寧に御説明くださった。大阪管区気象台の関係者各位に厚く御礼申し上げます。

（文筆責任者：浅居正充）

2014 年 11 月 27 日

於 大阪管区気象台

有限要素法解析における開領域解法  
Improvised absorbing boundary condition for  
high frequency electromagnetic problems

菅原 賢悟  
Kengo Sugahara

近畿大学 理工学部  
Kinki University

2014 年12 月22 日

於 近畿大学

# 背景1: 電気映像法による開領域問題

背景2: Improved ABC (即席吸収境界)

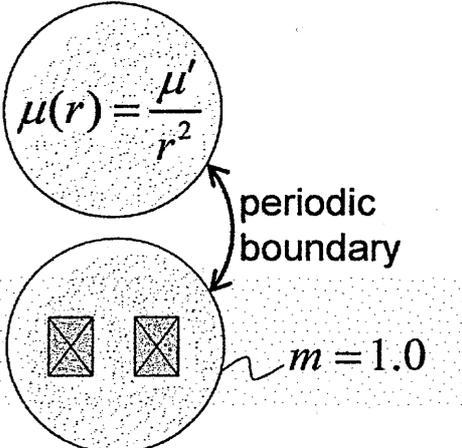
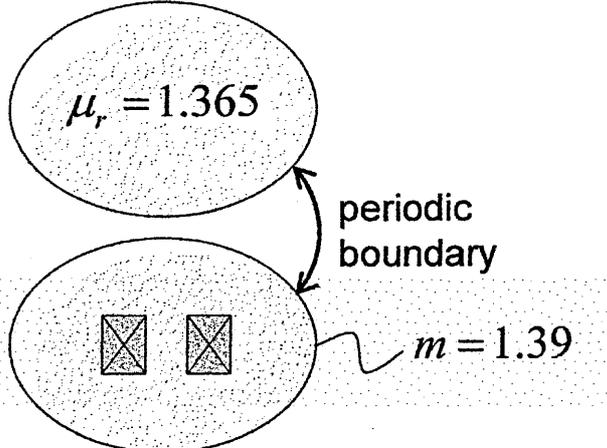
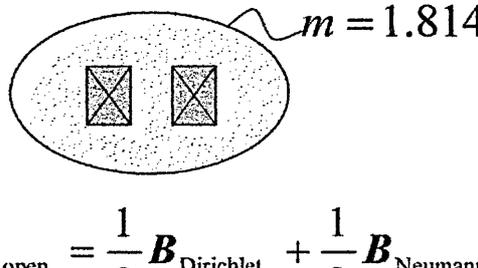
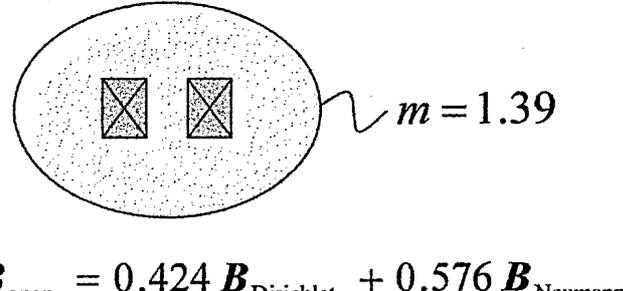
理論: ABCの高周波への拡張

結果: 有限要素法による数値結果

結果: PMLとの比較

## 既存の境界条件で開領域を模擬

	two-dimensional	axisymmetrical
Kelvin Trans. D.A. Lowther 1988		
Strategic Dual Image SDI法 Y. Satio 1987	$B_{\text{open}} = \frac{1}{2} B_{\text{Dirichlet}} + \frac{1}{2} B_{\text{Neumann}}$	$B_{\text{open}} = \frac{1}{2} B_{\text{Dirichlet}} + \frac{1}{2} B_{\text{Neumann}}$

axisymmetrical	conventional	EMT@阪大(2013/1)で 報告
<p><b>Kelvin Trans</b></p> <p><i>IEEE Trans. Magn</i> Vol. 49, No. 11 Apr. 2013</p>	 <p><math>\mu(r) = \frac{\mu'}{r^2}</math></p> <p>periodic boundary</p> <p><math>m = 1.0</math></p>	 <p><math>\mu_r = 1.365</math></p> <p>periodic boundary</p> <p><math>m = 1.39</math></p>
<p><b>GSDI</b></p> <p><i>IEEE Trans. Magn</i> Vol. 49, No. 9 Jun. 2013</p>	 <p><math>m = 1.814</math></p> <p><math>B_{open} = \frac{1}{2} B_{Dirichlet} + \frac{1}{2} B_{Neumann}</math></p>	 <p><math>m = 1.39</math></p> <p><math>B_{open} = 0.424 B_{Dirichlet} + 0.576 B_{Neumann}</math></p>

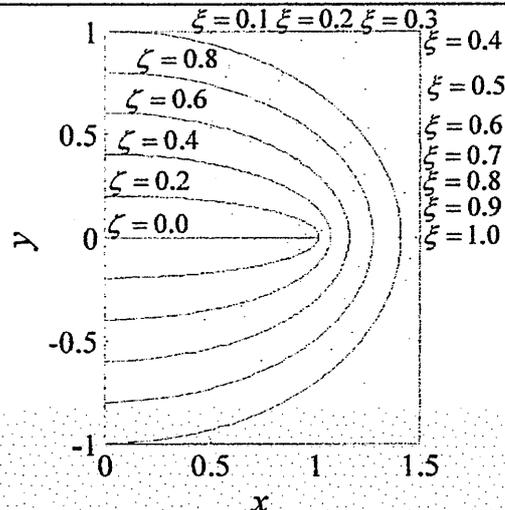
## 楕円座標のラプラス方程式

楕円座標

$$x = a\sqrt{(1+\zeta^2)(1-\xi^2)} \cos \phi$$

$$y = a\sqrt{(1+\zeta^2)(1-\xi^2)} \sin \phi$$

$$z = a\zeta\xi$$



楕円座標のラプラス方程式(軸対称)と一般解

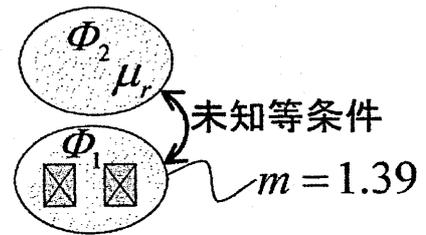
$$\Delta\Phi_m = \frac{1}{a^2(\zeta^2 + \xi^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ (1 + \zeta^2) \frac{\partial \Phi_m}{\partial \zeta} \right] \right\} + \frac{1}{a^2(\zeta^2 + \xi^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi} \right] \right\} = 0$$

$$\Phi(\zeta, \xi) = \sum_n \{ a_n P_n(i\zeta) + b_n Q_n(i\zeta) \} P_n(\xi)$$

# ケルビン変換法 (未知等影像法)

楕円座標におけるラプラス方程式の解

$$\begin{cases} \Phi_1(\zeta_1, \xi) = \sum_n \{a_n P_n(i\zeta_1) + b_n Q_n(i\zeta_1)\} P_n(\xi) \\ \Phi_2(\zeta_2, \xi) = \sum_n \{A_n P_n(i\zeta_2)\} P_n(\xi) \end{cases}$$



楕円境界  $\zeta = \zeta_0$  における未知等境界条件

$$\Phi_1(\zeta_0, \xi) = \Phi_2(\zeta_0, \xi) \quad \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta_1} \right|_{\zeta_1=\zeta_0} = -\mu_r \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial \zeta_2} \right|_{\zeta_2=\zeta_0}$$

開領域の解

$$a_n = 0$$

開領域の解と等価であるためには,

$$\mu_r = -\frac{P_n(i\zeta_0)Q'_n(i\zeta_0)}{P'_n(i\zeta_0)Q_n(i\zeta_0)} \quad \dots(1)$$

## 一般化双対電気影像法

輻射科学研究会資料  
RS14-09

楕円座標におけるラプラス方程式の解

$$\Phi(\zeta, \xi) = \sum_n \{a_n P_n(i\zeta) + b_n Q_n(i\zeta)\} P_n(\xi)$$

楕円境界  $\zeta = \zeta_0$  におけるDirichlet Boundary Condition

$$a_n P_n(i\zeta_0) + b_n Q_n(i\zeta_0) = 0$$

楕円境界  $\zeta = \zeta_0$  におけるNeumann Boundary Condition

$$a_n P'_n(i\zeta_0) + b_n Q'_n(i\zeta_0) = 0$$

開領域の解

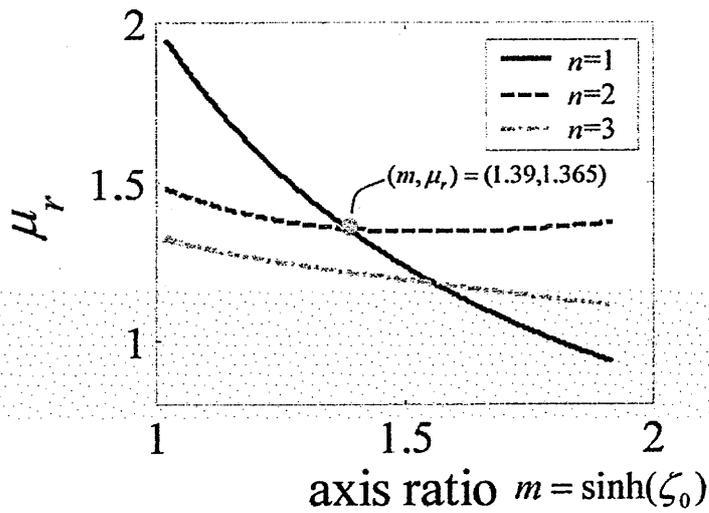
$$a_n = 0$$

$B_{\text{open}} = \alpha B_{\text{Dirichlet}} + (1-\alpha) B_{\text{Neumann}}$  が開領域の解と等価であるためには,

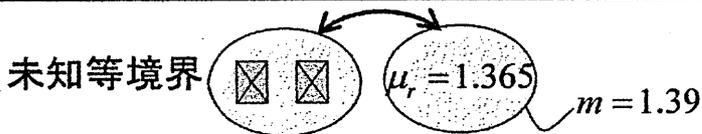
$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = -\frac{P_n(i\zeta_0)Q'_n(i\zeta_0)}{P'_n(i\zeta_0)Q_n(i\zeta_0)} \quad \dots(2)$$

# 提案する方法が成立する条件

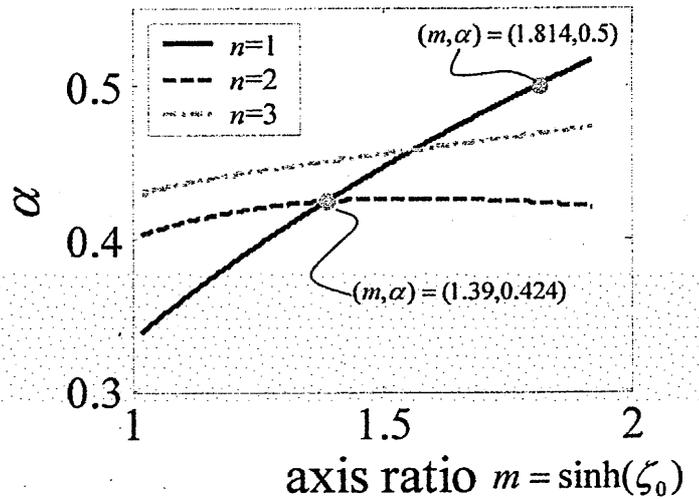
## 未知等境界条件法



$$\mu_r = -\frac{P_n(i\zeta_0)Q'_n(i\zeta_0)}{P'_n(i\zeta_0)Q_n(i\zeta_0)} \dots (1)$$



## 一般化SDI法

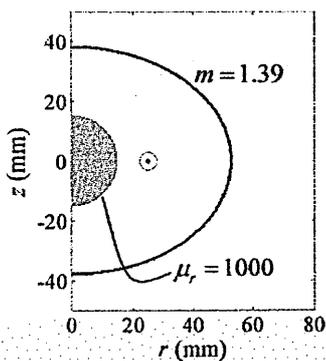


$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = -\frac{P_n(i\zeta_0)Q'_n(i\zeta_0)}{P'_n(i\zeta_0)Q_n(i\zeta_0)} \dots (2)$$

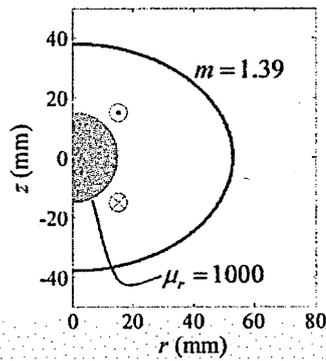
$$B_{\text{open}} = 0.424B_{\text{Dirchlet}} + 0.576B_{\text{Neumann}}$$

# Kelvin Transformation

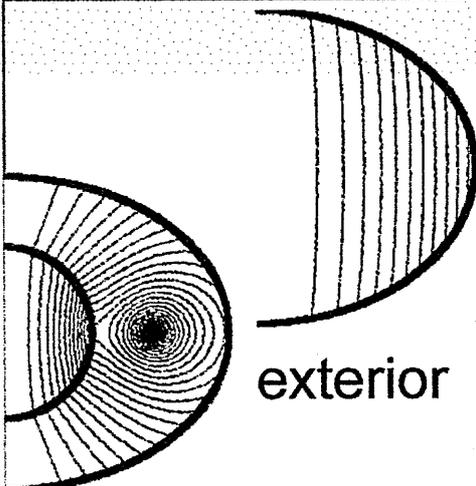
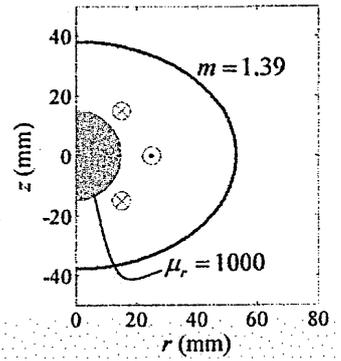
### Dipole-dominant



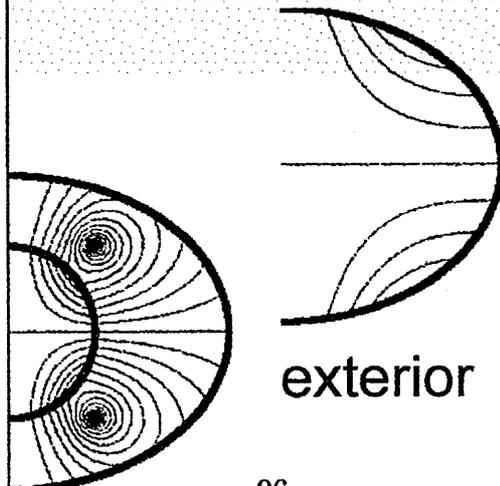
### Quadrupole-dominant



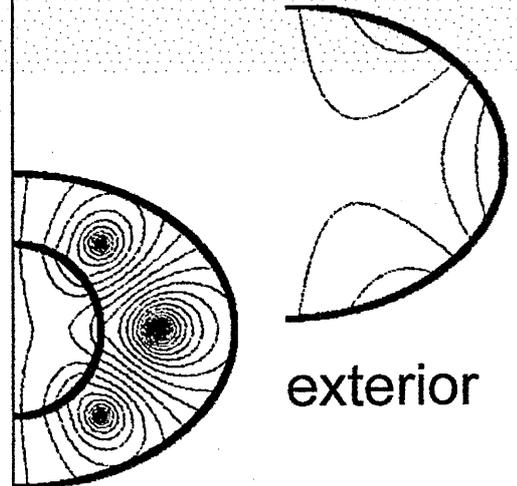
### Sextupole-dominant



exterior

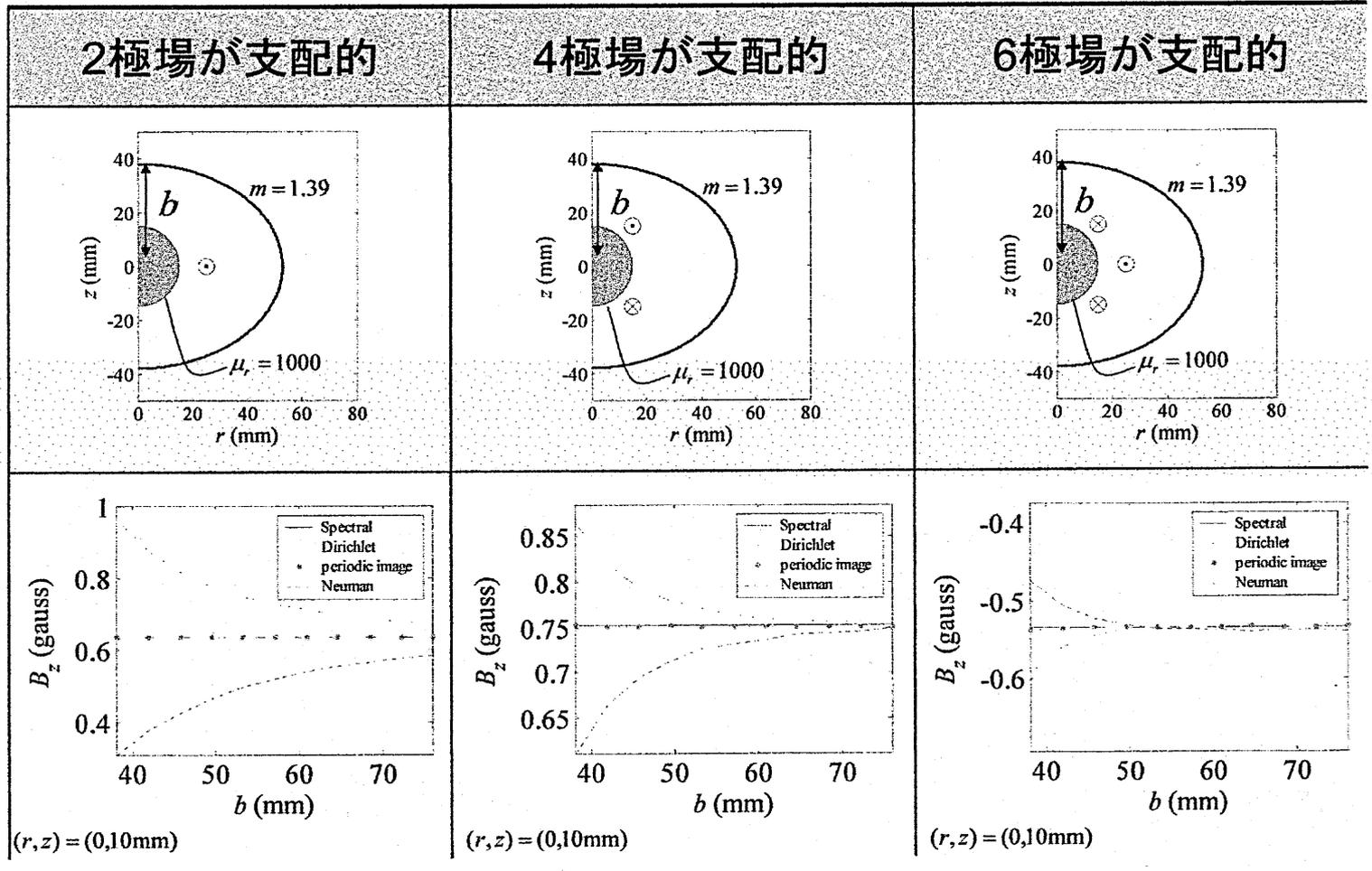


exterior



exterior

# ケルビン変換 (未知等境界条件法)



背景1: 電気映像法による閉領域問題

## 背景2: Improvised ABC (即席吸収境界)

理論: ABCの高周波への拡張

結果: 有限要素法による数値結果

結果: PMLとの比較

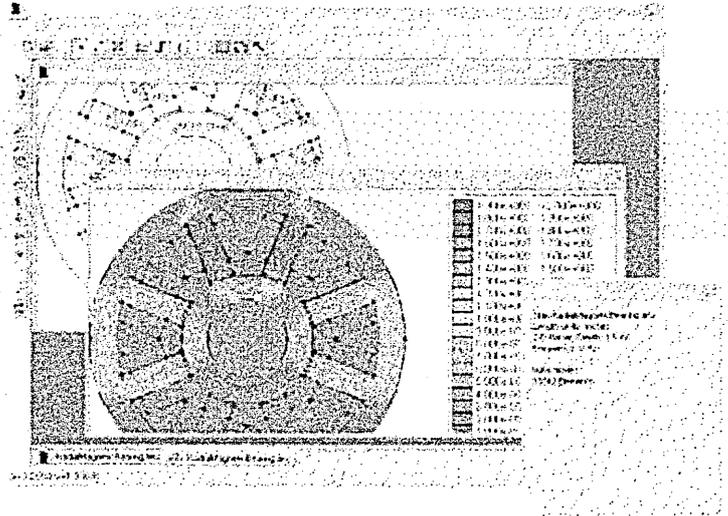
# David Meeker



**Senior Scientist**  
QinetiQ North America  
350 Second Avenue  
Waltham, MA 02451-1196  
July 1998 -- Present

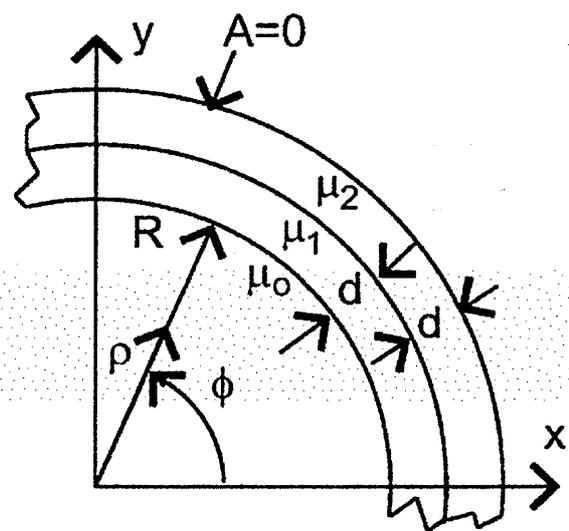
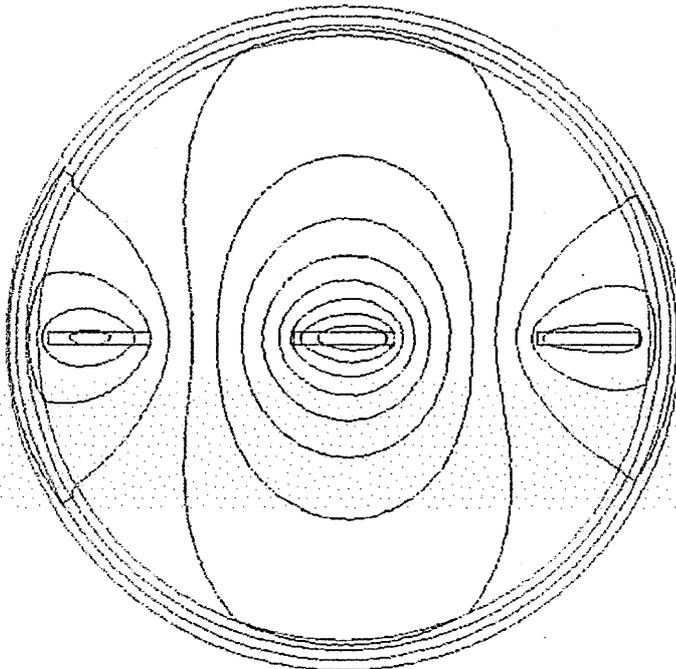
## FEMMの作者

Finite Element Method Magnetics



<http://www.femm.info/wiki/HomePage>

## Improvised Open Boundary Conditions



David Meeker, "Improvised Open Boundary Conditions for Magnetic Finite Elements," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 49, no. 10, pp. 5243–5247, Oct. 2013.

David Meeker, "Improvised Asymptotic Boundary Conditions for Electrostatic Finite Elements," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 6, Jan. 2014.

$\delta$	2rd Order		3rd Order		
	$\mu_1/\mu_0$	$\mu_2/\mu_0$	$\mu_1/\mu_0$	$\mu_2/\mu_0$	$\mu_3/\mu_0$
$\delta \rightarrow 0$	$3\delta$	$3/(2\delta)$	$1/(6\delta)$	$(10\delta)/6$	$10/(6\delta)$
0.001	0.00299849	1502.25	166.752	0.00166418	1670.83
0.0025	0.0074905	602.245	66.755	0.00415127	670.829
0.005	0.0149615	302.239	33.4266	0.00827262	337.491
0.01	0.0298421	152.229	16.7699	0.0164308	170.815
0.025	0.0739412	62.1965	6.79961	0.0403162	70.7882
1/30	0.0980491	47.1786	5.1494	0.053269	54.1064
0.05	0.145314	32.1429	3.51534	0.0786636	37.4093
0.1	0.278128	17.0384	1.94234	0.152429	20.6497
0.25	0.580487	7.78137	1.16242	0.358465	10.3724
0.5	0.825804	4.56166	1.02427	0.598073	6.70408
1	0.957203	2.96581	1.002	0.79096	4.76838

David Meeker, "Improvise Asymptotic Boundary Conditions for Electrostatic Finite Elements," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 6, Jan. 2014.

背景1 電気影像法による開領域問題

背景2 Improvised ABC (即境界吸収境界)

**理論: IABCの高周波への拡張**

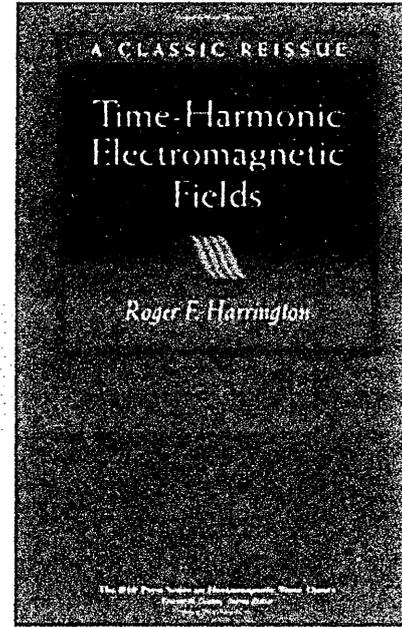
結果1 有限要素法による数値結果

結果2 PMLとの比較

# Electromagnetic Field in Spherical Coordinate

$$\left\{ \begin{aligned} E_r &= \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right] A_r \\ E_\theta &= \frac{-1}{r \sin\theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} + \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} \\ E_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} + \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \phi} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} H_r &= \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right] F_r \\ H_\theta &= \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \theta} \\ H_\phi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \phi} \end{aligned} \right.$$



$A_r$  : magnetic vector potential

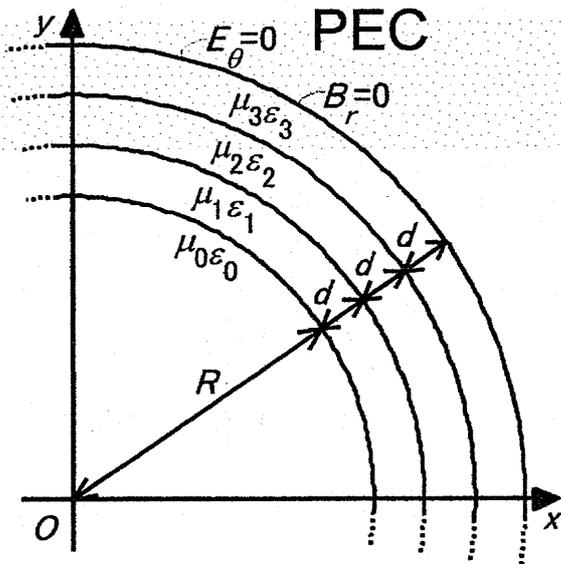
$F_r$  : electric vector potential

# Helmholtz Eq. in Spherical Coordinate

$$\left\{ \begin{aligned} (\Delta + k^2) \frac{A_r}{r} &= 0 \\ (\Delta + k^2) \frac{F_r}{r} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{A_r}{r} &= \sum_{n,m} a_n^m h_n^{(2)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi) + b_n^m h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi) \\ \frac{F_r}{r} &= \sum_{n,m} f_n^m h_n^{(2)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi) + g_n^m h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi) \end{aligned} \right.$$

# Continuous Eq. between two shells



$$\begin{cases} D_r^{n+1} = D_r^n \\ E_\theta^{n+1} = E_\theta^n \\ E_\phi^{n+1} = E_\phi^n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_r^{n+1} = A_r^n \\ \tilde{\epsilon}^{n+1} \frac{\partial A_r^{n+1}}{\partial r} = \tilde{\epsilon}^n \frac{\partial A_r^{n+1}}{\partial r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_r^{n+1} = B_r^n \\ H_\theta^{n+1} = H_\theta^n \\ H_\phi^{n+1} = H_\phi^n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_r^{n+1} = F_r^n \\ \tilde{\mu}^{n+1} \frac{\partial F_r^{n+1}}{\partial r} = \tilde{\mu}^n \frac{\partial F_r^{n+1}}{\partial r} \end{cases}$$

# Continuous Eq. between two shells

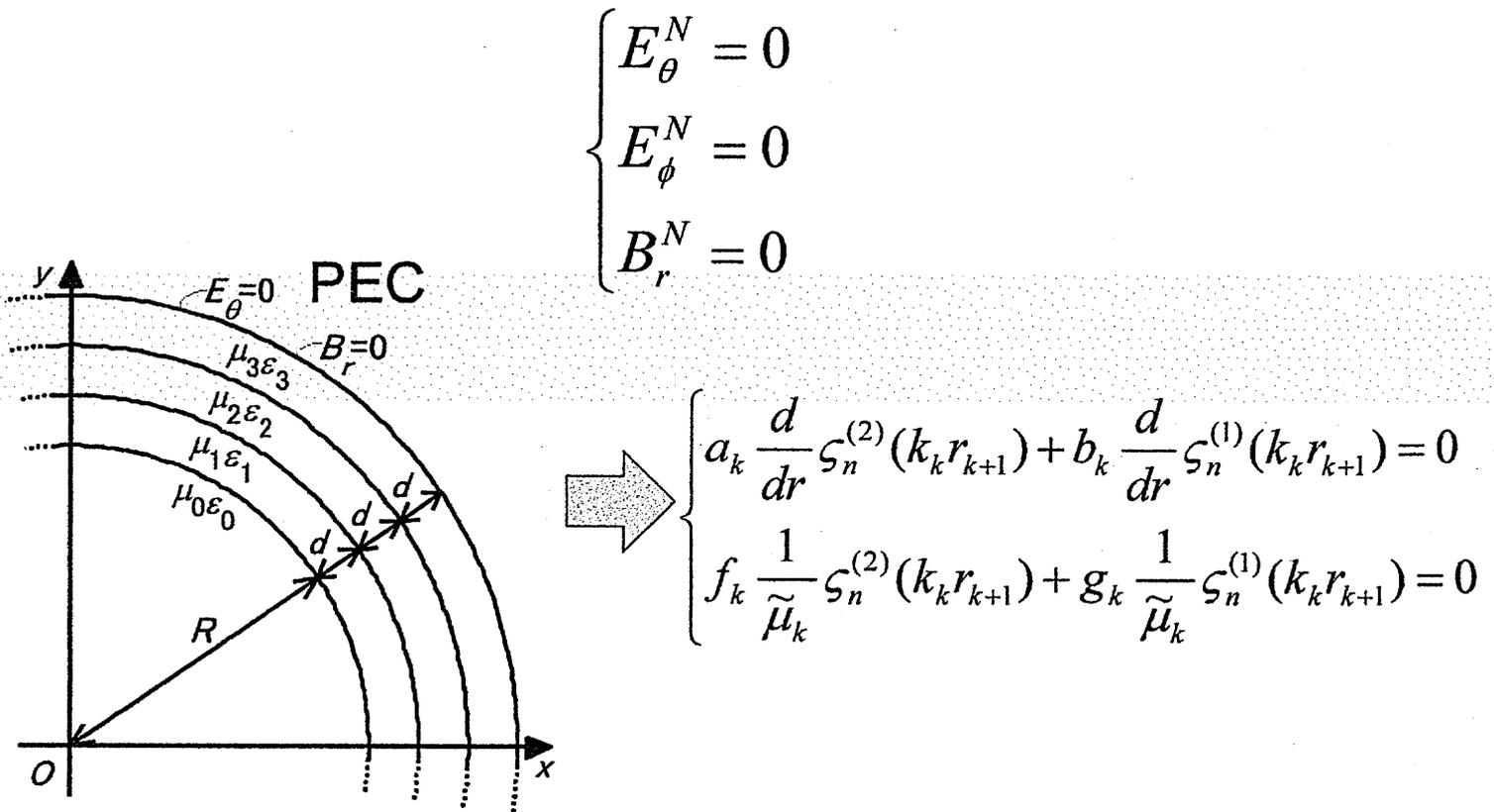
$$\begin{cases} S_n^{(1)}(kr) = rh_n^{(1)}(kr) \\ S_n^{(2)}(kr) = rh_n^{(2)}(kr) \end{cases} \text{とおくと}$$

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\epsilon}_k} S_n^{(2)}(k_k r_k) & \frac{1}{\tilde{\epsilon}_k} S_n^{(1)}(k_k r_k) \\ \frac{d}{dr} S_n^{(2)}(k_k r_k) & \frac{d}{dr} S_n^{(1)}(k_k r_k) \end{pmatrix}^{-1} \dots \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\epsilon}_1} S_n^{(2)}(k_1 r_1) & \frac{1}{\tilde{\epsilon}_1} S_n^{(1)}(k_1 r_1) \\ \frac{d}{dr} S_n^{(2)}(k_1 r_1) & \frac{d}{dr} S_n^{(1)}(k_1 r_1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\epsilon}_0} S_n^{(2)}(k_0 r_1) \\ \frac{d}{dr} S_n^{(2)}(k_0 r_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_k \\ g_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\mu}_k} S_n^{(2)}(k_k r_k) & \frac{1}{\tilde{\mu}_k} S_n^{(1)}(k_k r_k) \\ \frac{d}{dr} S_n^{(2)}(k_k r_k) & \frac{d}{dr} S_n^{(1)}(k_k r_k) \end{pmatrix}^{-1} \dots \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\mu}_1} S_n^{(2)}(k_1 r_1) & \frac{1}{\tilde{\mu}_1} S_n^{(1)}(k_1 r_1) \\ \frac{d}{dr} S_n^{(2)}(k_1 r_1) & \frac{d}{dr} S_n^{(1)}(k_1 r_1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\mu}_0} S_n^{(2)}(k_0 r_1) \\ \frac{d}{dr} S_n^{(2)}(k_0 r_1) \end{pmatrix}$$

ただし,  $k_k = \sqrt{\tilde{\mu}_k \tilde{\epsilon}_k} k_0$

# Outer Boundary Condition



# IABC for High Frequency

## Continuous Eq. between shells

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\epsilon}_k} \zeta_n^{(2)}(k_k r_k) & \frac{1}{\tilde{\epsilon}_k} \zeta_n^{(1)}(k_k r_k) \\ \frac{d}{dr} \zeta_n^{(2)}(k_k r_k) & \frac{d}{dr} \zeta_n^{(1)}(k_k r_k) \end{pmatrix}^{-1} \dots \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\epsilon}_1} \zeta_n^{(2)}(k_1 r_1) & \frac{1}{\tilde{\epsilon}_1} \zeta_n^{(1)}(k_1 r_1) \\ \frac{d}{dr} \zeta_n^{(2)}(k_1 r_1) & \frac{d}{dr} \zeta_n^{(1)}(k_1 r_1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\epsilon}_0} \zeta_n^{(2)}(k_0 r_1) \\ \frac{d}{dr} \zeta_n^{(2)}(k_0 r_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_k \\ g_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\mu}_k} \zeta_n^{(2)}(k_k r_k) & \frac{1}{\tilde{\mu}_k} \zeta_n^{(1)}(k_k r_k) \\ \frac{d}{dr} \zeta_n^{(2)}(k_k r_k) & \frac{d}{dr} \zeta_n^{(1)}(k_k r_k) \end{pmatrix}^{-1} \dots \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\mu}_1} \zeta_n^{(2)}(k_1 r_1) & \frac{1}{\tilde{\mu}_1} \zeta_n^{(1)}(k_1 r_1) \\ \frac{d}{dr} \zeta_n^{(2)}(k_1 r_1) & \frac{d}{dr} \zeta_n^{(1)}(k_1 r_1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\mu}_0} \zeta_n^{(2)}(k_0 r_1) \\ \frac{d}{dr} \zeta_n^{(2)}(k_0 r_1) \end{pmatrix}$$

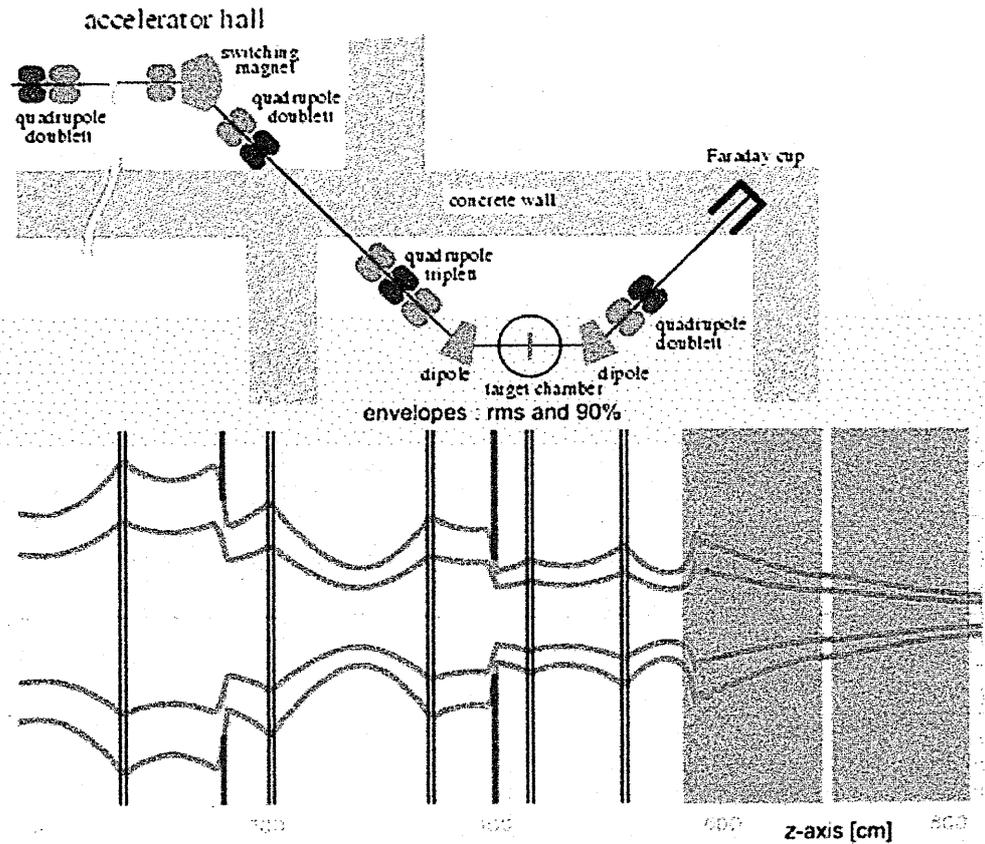
## Outer boundary condition

$$\begin{cases} a_k \frac{d}{dr} \zeta_n^{(2)}(k_k r_{k+1}) + b_k \frac{d}{dr} \zeta_n^{(1)}(k_k r_{k+1}) = 0 \\ f_k \frac{1}{\tilde{\mu}_k} \zeta_n^{(2)}(k_k r_{k+1}) + g_k \frac{1}{\tilde{\mu}_k} \zeta_n^{(1)}(k_k r_{k+1}) = 0 \end{cases}$$

同時に満たす  
 $\tilde{\mu}_k, \tilde{\epsilon}_k$ を探す。  
 $\Rightarrow$  non-linear eq.

# Optimization of Non-Linear Eq.

beam  
transport



similar tech. to  
beam optics

背景1: 電気映像法による開領域問題

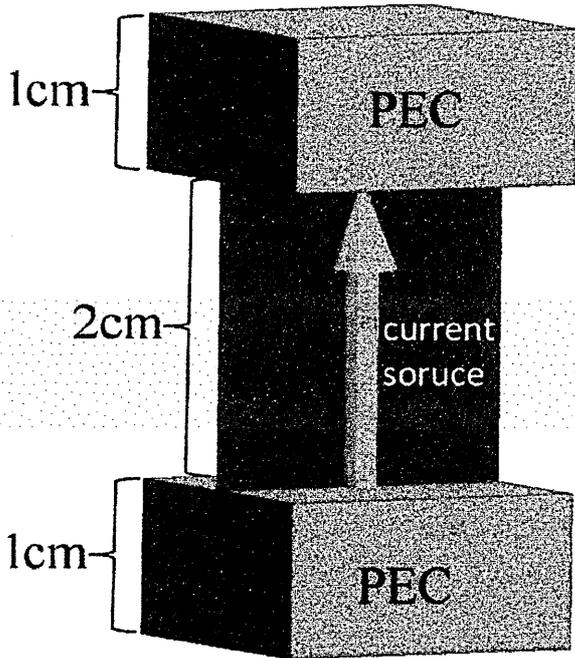
背景2: improvised ABC (即席吸収境界)

理論: ABCの高周波への拡張

**結果: 有限要素法による数値結果**

結果: PMLとの比較

# small dipole model (3D)



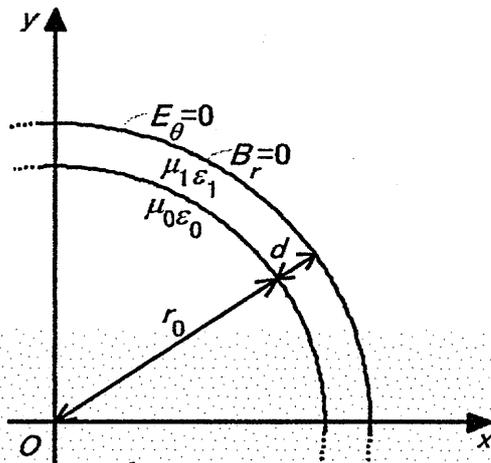
$$\begin{cases} E_r = \frac{Idl}{2\pi} \eta (k^2 e^{-jkr}) \left[ \frac{1}{(kr)^2} - j \frac{1}{(kr)^3} \right] \cos \theta \\ E_\theta = \frac{Idl}{4\pi} \eta (k^2 e^{-jkr}) \left[ j \frac{1}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - j \frac{1}{(kr)^3} \right] \sin \theta \\ H_\phi = \frac{Idl}{4\pi} (k^2 e^{-jkr}) \left[ j \frac{1}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right] \sin \theta \end{cases}$$

ROI:  $r = 1.0 \text{ m}$

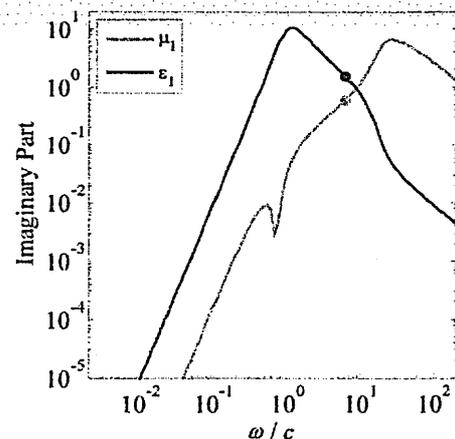
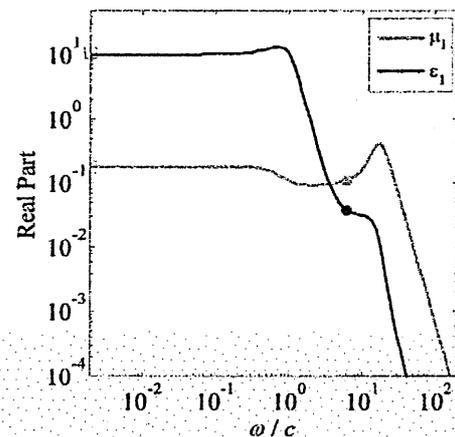
shell thickness:  $d = 0.1 \text{ m}$



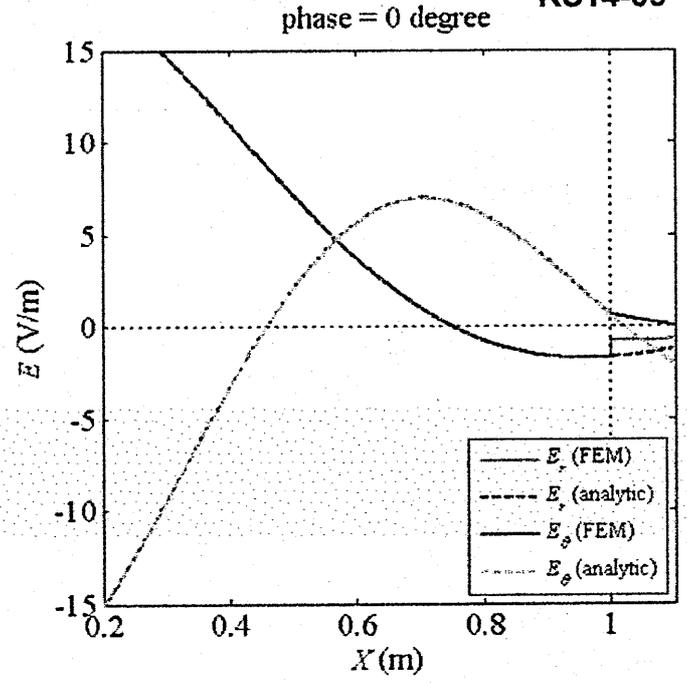
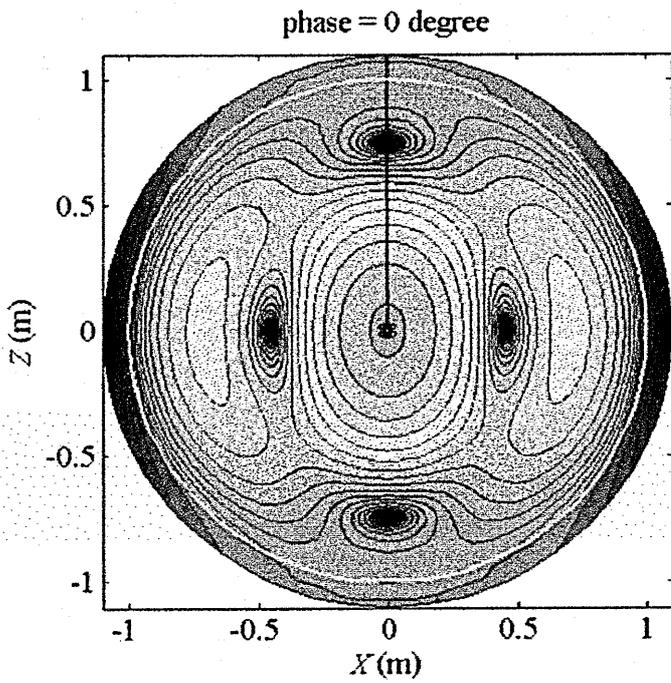
# 1-layer IABC



$$\begin{cases} \frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{d}{1+d} = 10.634 \\ \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = \frac{d^3 + 3d^2 + 3d + 3}{d(d^2 + 3d + 3)} = 0.0909 \end{cases}$$



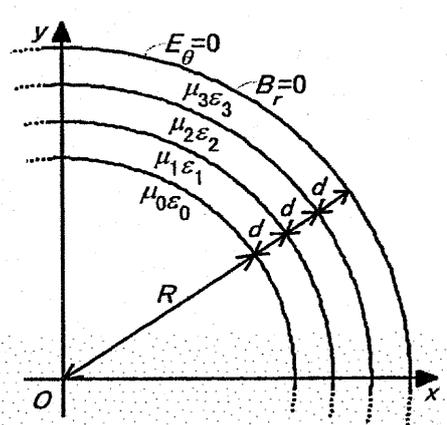
David Meeker, "Improved Asymptotic Boundary Conditions for Electrostatic Finite Elements," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 6  
104



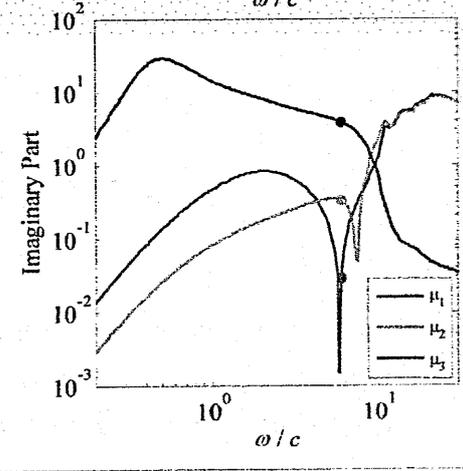
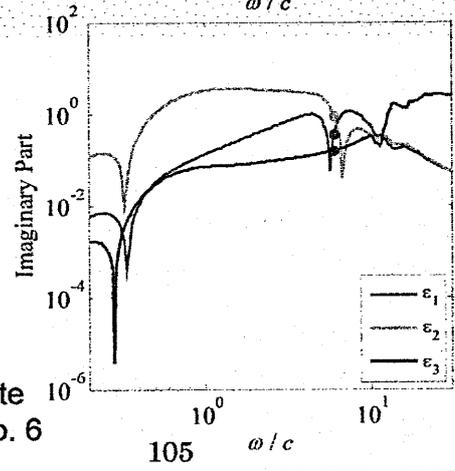
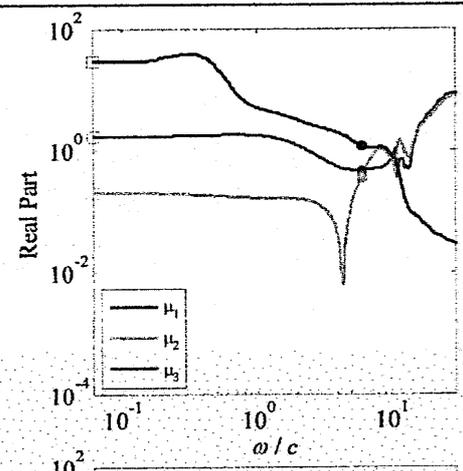
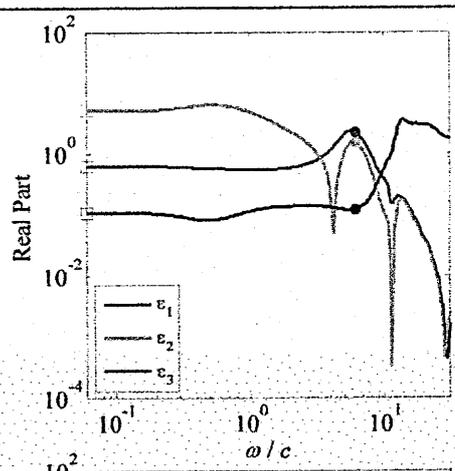
$$\frac{\omega}{c} = 6.0$$

$$\begin{cases} \frac{\mu_1}{\mu_0} = 0.00388 - 1.53j \\ \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = 0.0636 + 0.0401j \end{cases}$$

# 3-layer IABC

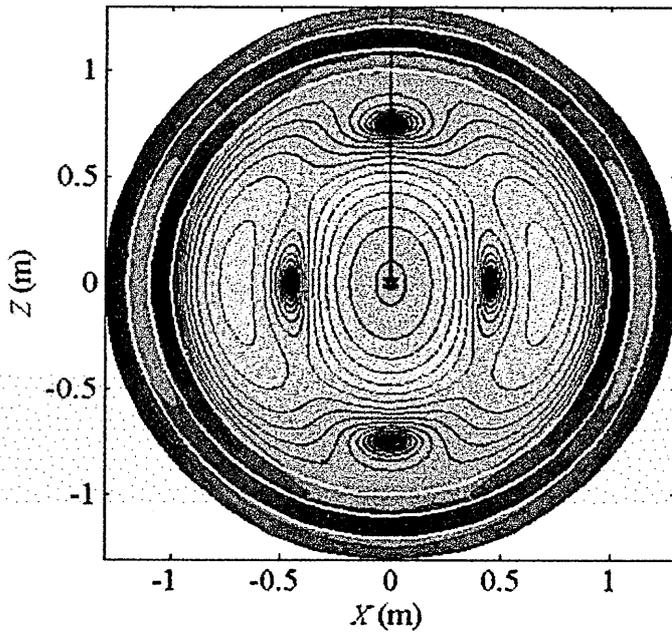


$$\begin{cases} \frac{\mu_1}{\mu_0} = 1.685708 \\ \frac{\mu_2}{\mu_0} = 0.205825 \\ \frac{\mu_3}{\mu_0} = 28.97648 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = 0.626745 \\ \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} = 5.117363 \\ \frac{\epsilon_3}{\epsilon_0} = 0.107587 \end{cases}$$

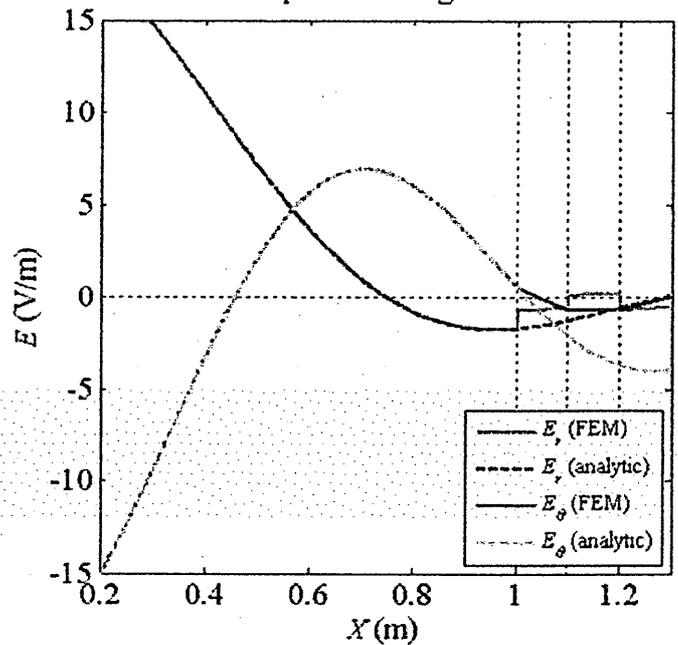


David Meeker, "Improved Asymptotic Boundary Conditions for Electrostatic Finite Elements," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 6

phase = 0 degree



phase = 0 degree



$$\frac{\omega}{c} = 6.0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu_1}{\mu_0} &= 0.470 + 0.029j \\ \frac{\mu_2}{\mu_0} &= -0.361 + 0.331j \\ \frac{\mu_3}{\mu_0} &= 1.21 - 3.82j \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} &= 2.30 + 0.340j \\ \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} &= -1.54 - 0.875j \\ \frac{\epsilon_3}{\epsilon_0} &= 0.119 + 0.154j \end{aligned} \right.$$

背景1: 電気映像法による開領域問題

背景2: Improvised ABC (即席吸収境界)

理論: ABCの高周波への拡張

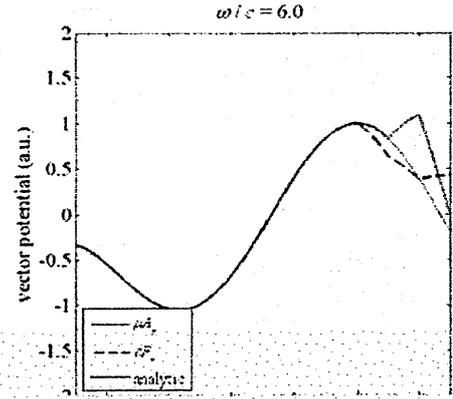
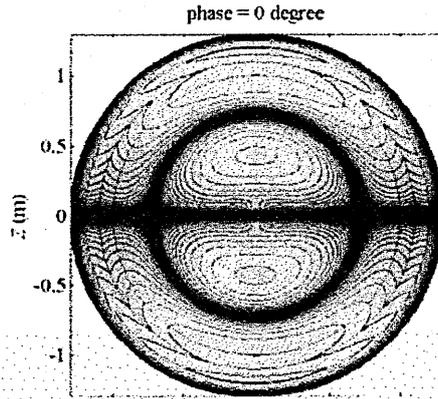
結果: 有限要素法による数値結果

**結果: PMLとの比較**

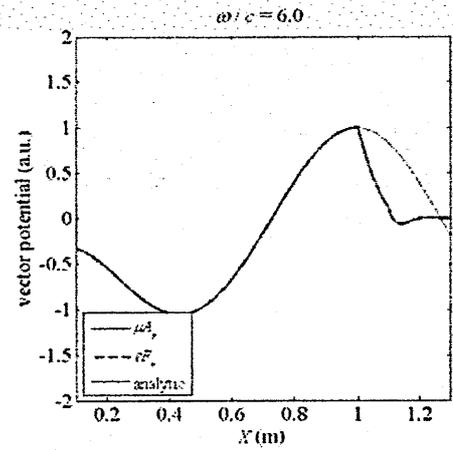
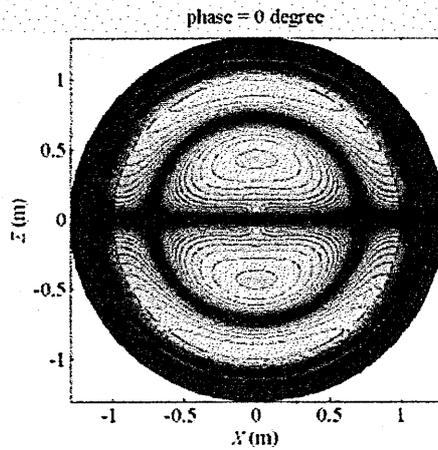
# PMLとの比較

$$\omega/c = 6.0$$

IABC  
OK



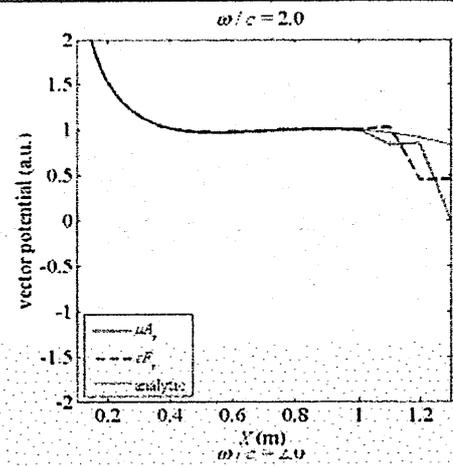
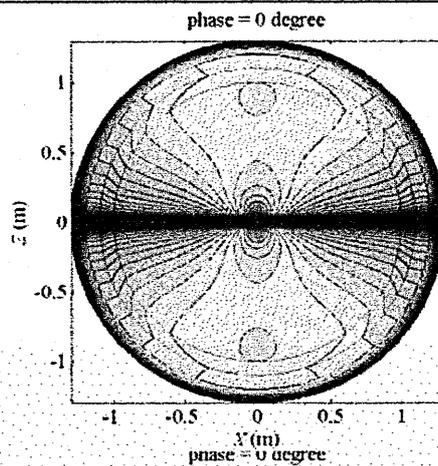
PML  
OK



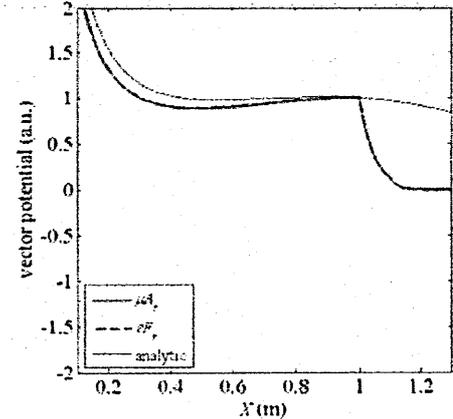
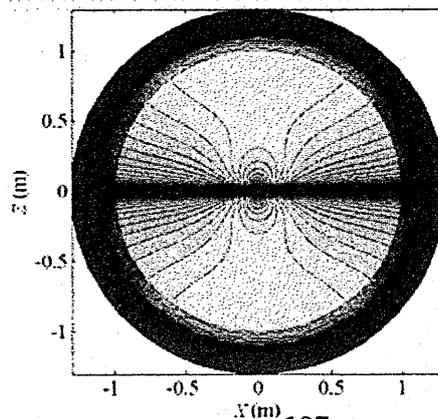
# PMLとの比較

$$\omega/c = 2.0$$

IABC  
OK

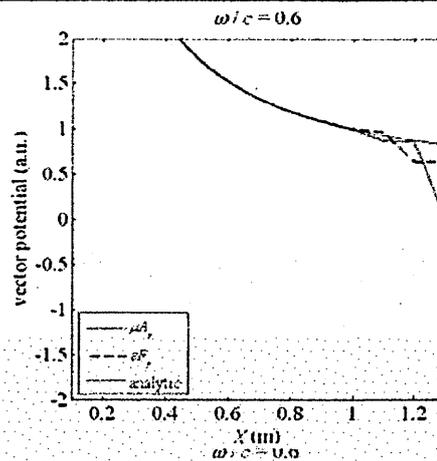
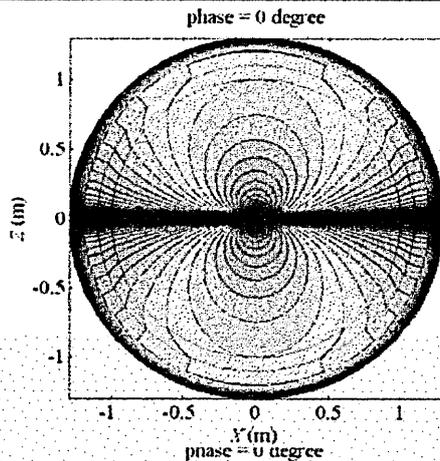


PML  
almost

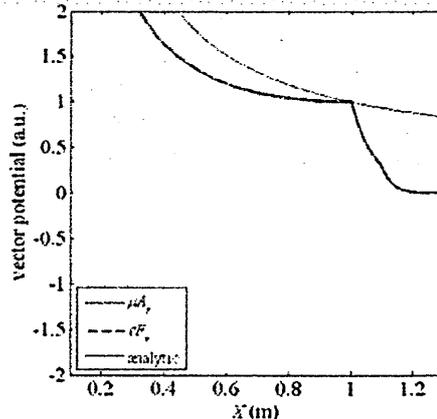
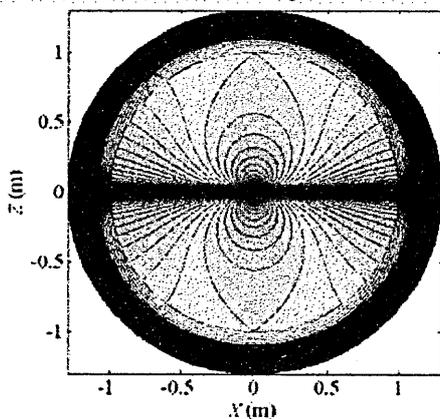


# PMLとの比較 $\omega/c = 0.6$

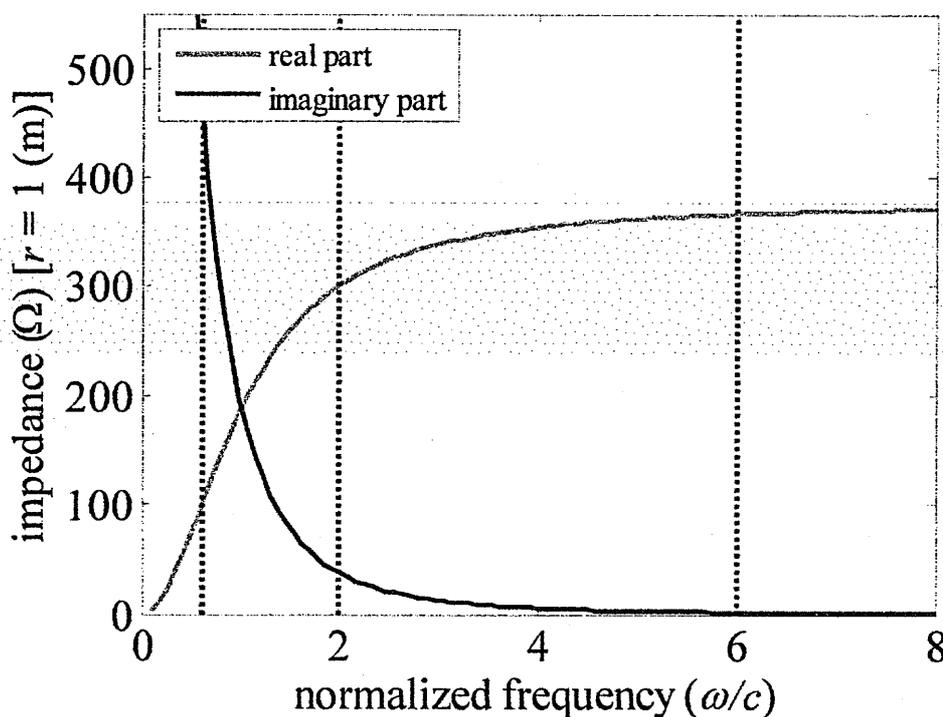
IABC  
OK



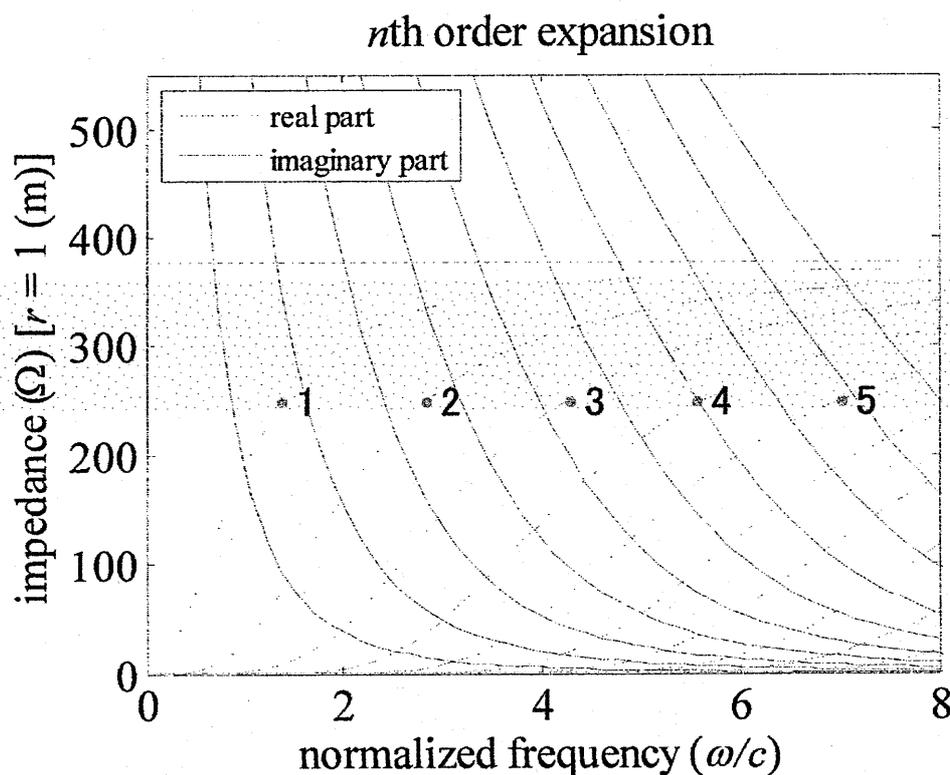
PML  
NG



# $Z = E/H @ r = 1$ dipole



# $Z = E/H @ r = 1$ multipole



## SUMMARY

1. IABC is also available for HIGH frequency.
2. Multiple solutions exist for HIGH frequency.
3.  $N$ -th order solution with  $N$ -layer IABC

## FUTURE PLAN

微小ダイポールのように厳密解のある問題  
以外の実用的な問題でも検証

**準等方性キラル粒子の周期配列に対する等価媒質特性**

**Constitutive Characteristics of Periodic Array of Quasi-Isotropic  
Thin-Wire Chiral Objects**

浅居正充 (近畿大学)、若林秀昭、山北次郎 (岡山県立大学)

M. Asai (Kindai University), H. Wakabayashi, J. Yamakita (Okayama Prefecture University)

2014年12月22日 (月)

於：近畿大学



## 準等方性キラル粒子の周期配列に対する等価媒質特性

### Constitutive Characteristics of Periodic Array of Quasi-Isotropic Thin-Wire Chiral Objects

M. Asai  
H. Wakabayashi  
K. Matsumoto  
J. Yamakita

Kindai University  
Okayama Prefecture University  
Osaka Sangyo University  
Okayama Prefecture University



Radio wave interactions with artificial media such as distributions of conducting helices have been of interest in the fields of stealth technology, EMC, CMC and CNC [1]-[2], [4]-[5].

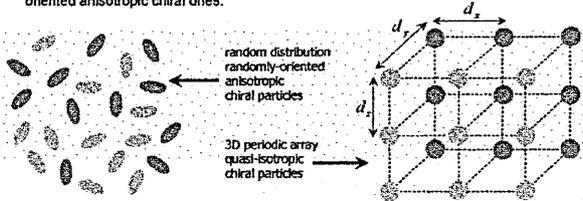


Carbon microcoils (CMC)  
Photo insertion is permitted by  
Prof. S. Morigami, Fellow,  
Toyota Physical and Chemical  
Research Institute

Authors have analyzed the effective constitutive parameters of isotropic chiral mixture of randomly-oriented anisotropic chiral particles such as conducting helices ([9]-[11] etc.)

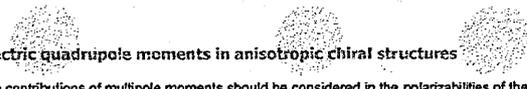
- clustering metallic helices
- distributions of metallic helices with elastic deviations. . . . etc.

In practical designs, it is much more realizable to compose quasi-isotropic chiral media by 3-D periodic arrays of quasi-isotropic chiral particles, than to distribute randomly-oriented anisotropic chiral ones.



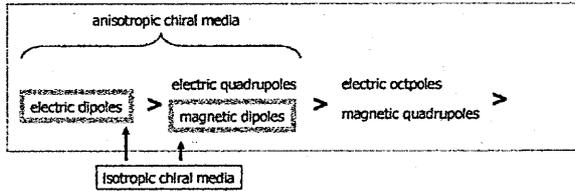

## Contents

1. Introduction
2. Method
3. Numerical Examples
4. Conclusion

## Electric quadrupole moments in anisotropic chiral structures

The contributions of multipole moments should be considered in the polarizabilities of the anisotropic chiral structures to the order of the electric quadrupoles [6], [7].



The rating of the physical effects of the multipoles  
[6] A. D. Buckingham and M. B. Dunn: J. Chem. Soc. A, pp. 1988-1991, 1971.



## Introduction

Radio wave interactions with artificial media have been of interest since

In 1914 through 1922.  
K. F. Lindman demonstrated the electromagnetic chirality in wire helices embedded in cotton balls stuffed in a cardboard box in microwave frequencies [1],[2].

↓

1940 -  
Artificial dielectric media  
Artificial magnetic substances

↓

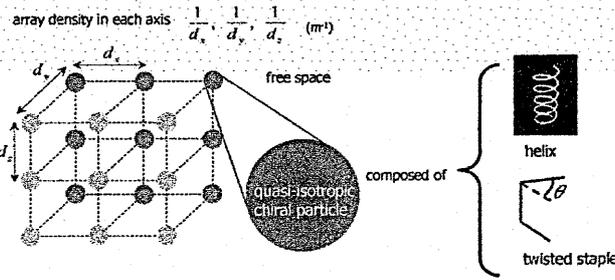
At the end of the '90s.  
J. B. Pendry *et al.* theoretically treated the LHMs.  
D. R. Smith *et al.* demonstrated the negative refraction of macrowaves in a fabricated LHM. Achievements have intensively been reported and the term 'metamaterials' has become quite usual [3].

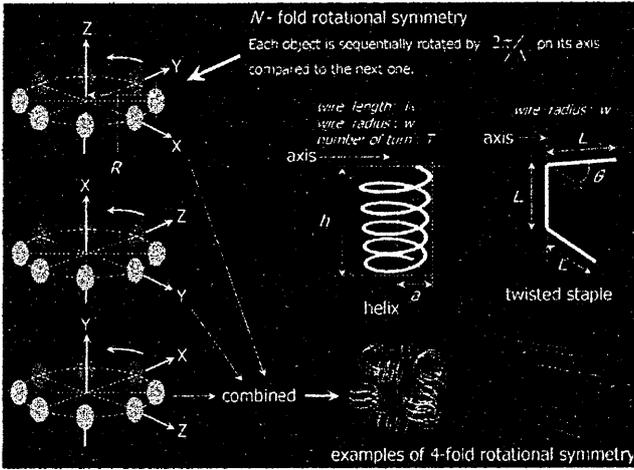


## In this work

The structures of quasi-isotropic chiral particles are studied. The effective constitutive characteristics and the remained electric quadrupole moments are investigated on three-dimensional periodic array quasi-isotropic chiral particles which are composed of conducting thin wires. The quasi-static Lorentz approach with fine evaluation of interaction between particles is combined with the method of moments with thin-wire approximation to calculate the effective parameters. The sizes and spacings between particles are assumed to be small compared to the wavelength.

array density in each axis  $\frac{1}{d_x}, \frac{1}{d_y}, \frac{1}{d_z}$  ( $m^{-1}$ )



$d_x, d_y, d_z$  : Periodicities of particles in X, Y, and Z directions

Electric and magnetic dipole moments

$$P_l = np_l, \quad n = (d_x d_y d_z)^{-1} \quad (l = e, m). \quad (5)$$

$P_e, P_m$  : electric and magnetic dipole moment densities (3\*3 matrices)

$p_e, p_m$  : electric and magnetic dipole moments for a single particle (3\*3 matrices)

$$\begin{bmatrix} p_e \\ p_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{ee} & \bar{\alpha}_{em} \\ \bar{\alpha}_{me} & \bar{\alpha}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_L \\ H_L \end{bmatrix} = \bar{\alpha} \begin{bmatrix} E_L \\ H_L \end{bmatrix} \quad (6) \quad E_L, H_L : \text{Lorentzian fields}$$

$\bar{\alpha}_{ij} (i, j = e, m), \bar{\alpha}$  : polarizabilities

Electric quadrupole moments

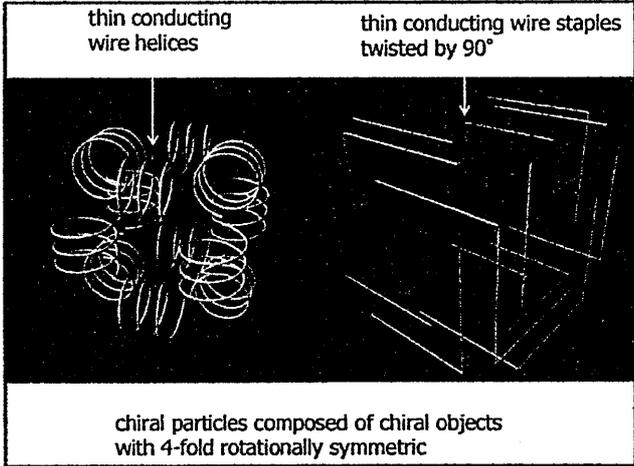
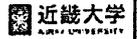
$$Q = nq, \quad (7) \quad q = \bar{q} E_L \quad (8)$$

$Q$  : electric quadrupole moment densities (9\*1 matrices)

$q$  : electric quadrupole moments for a single particle (9\*1 matrix)  $\bar{q}$  : 9\*3 matrix

effects of  $H_L$  are negligible

[19] A. D. Buckingham and M. B. Dunn: J. Chem. Soc. A, 1971.



Each moments are calculated from the currents on wires:

$$p_e = \frac{1}{j\omega} \int_S J(r) dS, \quad p_m = \frac{1}{2} \int_S r \times J(r) dS. \quad (9)$$

$$q_e = \frac{1}{j\omega} \int_S (r_j J_j + J_j r_j) dS \quad (i, j = x, y, z). \quad (10)$$

$J$  : surface current densities on wire surfaces  $S$

$S$  : surfaces on wires

The currents on the wires are calculated by the method of moments utilizing NEC2 code where only the axial components of currents on the wire surfaces are considered and the circumferential variations are neglected for the thin wire approximation. The number of the subdomain basis functions for current expansion are defined as  $N_{\text{sub}}$ .



**Method** Time dependence  $e^{j\omega t}$  is assumed

Constitutive relations for a linear medium

$$\begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon} & \bar{\zeta} \\ \bar{\zeta}' & \bar{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \quad (1)$$

$\text{trace}(\bar{\zeta}' \bar{\mu}^{-1} + \bar{\mu}^{-1} \bar{\zeta}) = 0$ .

$D, B, E, H$  : average fields  
 $\bar{\epsilon}, \bar{\mu}, \bar{\zeta}, \bar{\zeta}'$  : effective constitutive parameters (3\*3 matrices)

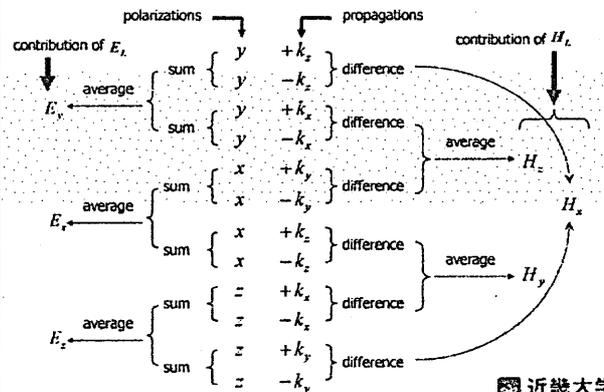
Constitutive relations for a reciprocal chiral medium

$$\begin{bmatrix} D \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_r & j\bar{\kappa}_r \\ \bar{\kappa}_r' & \bar{\mu}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ B \end{bmatrix} \quad (2)$$

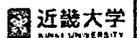
$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_r + \bar{\kappa}_r' \bar{\mu}_r^{-1} \bar{\kappa}_r, \quad \bar{\mu} = \bar{\mu}_r, \quad \bar{\zeta} = j\bar{\kappa}_r \bar{\mu}_r, \quad \bar{\zeta}' = -j\bar{\mu}_r \bar{\kappa}_r' \quad (3)$$

$$\bar{\epsilon}' = \bar{\epsilon}, \quad \bar{\mu}' = \bar{\mu}, \quad \bar{\zeta}' = -\bar{\zeta} \quad (4)$$

Contributions of  $E_x, H_x$  are obtained from the solutions for twelve kinds of plane wave incidence



C. R. Brewitt-Taylor et al., IEEE Trans. Antennas Propagat., 47[4] (1999)



Lorentzian fields and average fields

$$\begin{bmatrix} E_x \\ H_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} + \bar{C} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} \quad (11) \quad \bar{C} : 6 \times 6 \text{ diagonal matrix}$$

A. Ishimaru et al., *IEEE Trans. on Antennas, Propag.*, Vol. 51, No. 10 pp. 2550-2557, 2003.

Eq.(5) through (11) lead to

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = n\bar{a} [\bar{I} - n\bar{C}\bar{a}]^{-1} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \quad (12) \quad \bar{I}, \bar{I} : 3 \times 3 \text{ and } 6 \times 6 \text{ identity matrices}$$

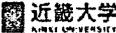
$$Q = n[\bar{q} \quad \bar{O}'] [\bar{I} - n\bar{C}\bar{a}]^{-1} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \bar{q} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \quad (13) \quad \bar{O}' : 9 \times 3 \text{ null matrix}$$

$$D = \epsilon_0 E + P_x, \quad B = \mu_0 H + P_y \quad (14)$$

Comparing with Eq.(1),  $\bar{\epsilon}, \bar{\mu}, \bar{\xi}, \bar{\zeta}$  based only on dipole moments are obtained including the contributions of electric quadrupole moments are obtained by

$$\bar{\epsilon}_p \rightarrow \bar{\epsilon}_p + \bar{Q}', \quad \bar{Q}'_s = -\frac{1}{2} \omega \sum_{\alpha, \beta} \epsilon_{j\alpha\beta} q_{p,\alpha\beta} \quad (i, j, \alpha, \beta = x, y, z) \quad (15)$$

$\epsilon_{ij}$  : Levi-Civita テンソル ( $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 1, \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = -1$ )



**Numerical examples B** quasi-isotropy

Permittivity and permeability of free space are defined as ( $\epsilon_0, \mu_0$ )

- Each quantity is normalized as follows:
 
$$\epsilon_p = \text{Re} \left( \frac{\bar{\epsilon}_p}{\epsilon_0} \right), \quad \mu_p = \text{Re} \left( \frac{\bar{\mu}_p}{\mu_0} \right), \quad \kappa_p = \text{Im} \left( \frac{\bar{\xi}_p}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right) = \text{Im} \left( \frac{-\bar{\zeta}_p}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right) \quad (i, j = x, y, z)$$
- The following quantities are shown in the graphical representations:
  - diagonal elements :  $\kappa_D, \epsilon_D, \mu_D$
  - Average of the absolute values of non-diagonal elements :  $\kappa_{ND}, \epsilon_{ND}, \mu_{ND}$
  - Average of the absolute values of quadrupole's contributions in all elements :  $\kappa_Q, \epsilon_Q, \mu_Q$



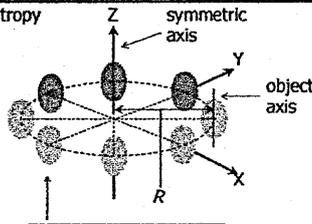
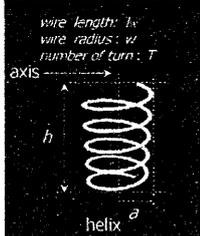


**Numerical examples A** quasi-2D isotropy

Permittivity and permeability of free space are defined as ( $\epsilon_0, \mu_0$ )

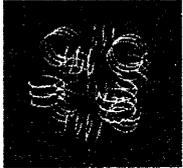
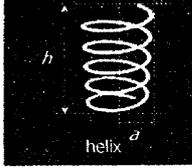
- Each quantity is normalized as follows:
 
$$\epsilon_p = \text{Re} \left( \frac{\bar{\epsilon}_p}{\epsilon_0} \right), \quad \mu_p = \text{Re} \left( \frac{\bar{\mu}_p}{\mu_0} \right),$$

$$\kappa_p = \text{Im} \left( \frac{\bar{\xi}_p}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right) = \text{Im} \left( \frac{-\bar{\zeta}_p}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right) \quad (i, j = x, y, z)$$
- The following quantities are shown in the graphical representations:
  - Diagonal ( $xx$ ) ( $= yy$ ) elements :  $\kappa_D, \epsilon_D, \mu_D$
  - Average of the absolute values of ( $xy$ ) and ( $yx$ ) elements :  $\kappa_{ND}, \epsilon_{ND}, \mu_{ND}$

**helices**  $l_w = 0.5\lambda_0, w = 0.075 \text{ mm}, h = 0.08l_w,$   
 $R = \frac{\sqrt{2}(h+2a)}{2}, d_x = d_y = d_z = 2(h+4a)$

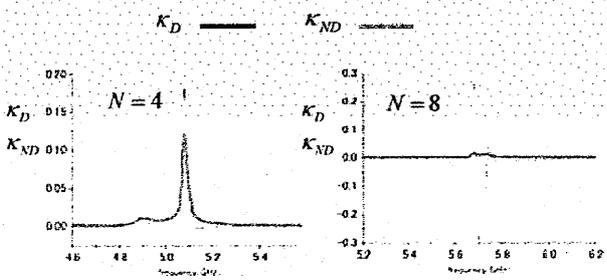
wire length:  $l_w$   
 wire radius:  $w$   
 number of turn:  $T$

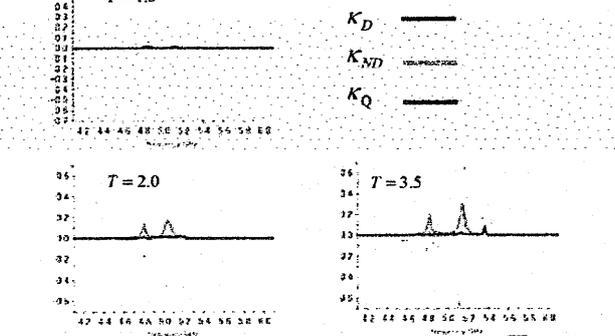
Graphs showing normalized quantities for  $T = 1.5, 2.0, 3.5$ . Legend:  $\kappa_D$  (solid line),  $\kappa_{ND}$  (dashed line),  $\kappa_Q$  (dotted line).

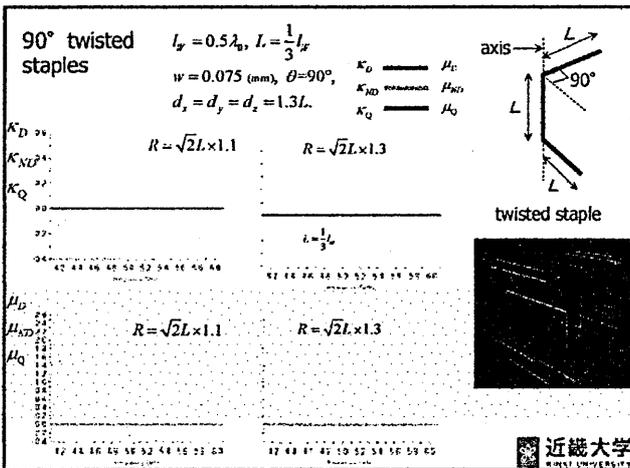
**N-fold rotationally symmetric particles** composed of  $N$  helices

$l_w = 0.5\lambda_0, w = 0.075 \text{ mm}, h = 0.1l_w,$   
 $R = \frac{a+w}{\sin(2\pi/N)}, d_x = d_y = d_z = 2(R+a)$




**helices**  $l_w = 0.5\lambda_0, w = 0.075 \text{ mm}, h = 0.08l_w, R = \frac{\sqrt{2}(h+2a)}{2} \times 1.3,$   
 $d_x = d_y = d_z = 2(h+4a) \times 1.3.$



### Conclusion

The structures of quasi-isotropic chiral particles are studied. The effective constitutive characteristics and the remained electric quadrupole moments are investigated on three-dimensional periodic array of quasi-isotropic chiral particles which are composed of conducting thin wires. The quasi-static Lorentz' approach with fine evaluation of interaction between particles is combined with the method of moments with thin-wire approximation to calculate the effective parameters. The sizes and spacings between particles are assumed to be small compared to the wavelength

It was demonstrated that

for the cases of quasi-2D isotropic structures

Higher order of rotational symmetry gains finer 2D isotropy.

for the cases of quasi-isotropic structures

Then combinations of 4-fold rotational symmetry realize the quasi-isotropy to a certain extent. As for the cases of twisted staples, very fine isotropic chiral medium is possibly realized. Accuracy of the calculations for the cases of staples should be suspected.

### References

- [1] J. V. Lindell *et al.*, Artech House, (1994), pp. 1-18, 193-243.
- [2] M. Asai *et al.*, *Materials Integration*, Vol. 17, No. 7 (2004), pp. 27-33.
- [3] D. R. Smith *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 84, No. 18 (2000), pp. 4184-4187.
- [4] S. Motojima *et al.*, *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 56, No. 4 (1995), pp.321 -
- [5] M. Asai *et al.*, *Materials Integrations*, Vol. 25, No. 12 (2012), pp. 31-37.
- [6] A. D. Buckingham *et al.*, *J. Chem. Soc. A*, (1971), pp. 1988-1991.
- [7] I. P. Theron *et al.*, *J. Electro. Waves. Applic.*, Vol. 10, No. 4 (1996), pp. 539-561.
- [8] M. Asai *et al.*, *Proc. Int. Conf. Model. Sim. Tech*, Vol. 1, (2011), pp. 179.

気象用 2 重偏波フェーズドアレイレーダにおける  
MMSE 法の適用と実用化

Development of polarimetric 2-D phased array radar  
for precipitation measurement

菊池 博史	田島 拓朗	商 進	吳 亭	金 寛
Hiroshi Kikuchi	Takuro Tashima	Shang Jin	Ting Wu	Gwan Kim
大阪大学	大阪大学	大阪大学	大阪大学	大阪大学
Osaka University				

牛尾 知雄	後藤 秀人	水谷 文彦
Tomoo Ushio	Hideto Goto	Fumihiko Mizutani
大阪大学	東芝	東芝
Osaka University	TOSHIBA Co.,Ltd.	TOSHIBA Co.,Ltd.

2014年12月22日

於 近畿大学

## 1. 概要

本稿では、気象用の2重偏波機能を持つ2次元フェーズドアレイレーダの開発を目的とした検証結果を示す。特に、フェーズドアレイアンテナの開発過程において一つの重要な要素であるデジタルビームフォーミング技術に焦点を当てて研究を行う。特に、デジタルビームフォーミング技術として最も一般的であるフーリエビームフォーミング法と提案手法であるMMSE (Minimum mean squared error) 法の比較を行う。降雨観測を想定した数値シミュレーション及び1次元フェーズドアレイレーダの実データを用いた検討の結果、降雨観測パラメータの推定においてMMSE法は非常に有用であることを示した。

## 2. はじめに

現在開発中の協調制御型気象レーダは受信側にて多数の素子(例えば128×128素子程度)のアレイアンテナを用いて受信するフェーズドアレイ方式を利用する。これまで、フェーズドアレイレーダによるビーム形成手法として、フーリエビームフォーミング (FR) 法と最小二乗平均誤差法 (Minimum Mean Squared Error : MMSE) 法の適用を検討してきた。先行研究においてMMSE法はFR法に比べて、レーダ反射因子( $Z_{hh}$ )の推定精度が非常に高いことが示された[1]。しかし、[1]では偏波観測を想定しておらず、現在開発中の偏波機能を持つフェーズドアレイレーダの観測性能を議論することはできない。そこで、本稿では開発中の2重偏波機能を持つ2次元フェーズドアレイレーダの偏波観測精度について数値計算を用いて議論する。特に、レーダ反射因子差( $Z_{dr}$ )、比偏波間位相差( $K_{dp}$ )、偏波間相関係数( $\rho_{hv}$ )の3つの降雨観測パラメータに対してFR法とMMSE法を比較し、その性能を評価する。以下に、その検討結果を示す。

## 3. ビームフォーミング手法

本節では、提案するMMSEアルゴリズムと共に、比較対象とする従来の信号処理手法について説明する。本項の記載について、本研究開発で用いる座標系、変数設定はすでに開発済みである1次元フェーズドアレイレーダのものと共通設定を想定した[2]。

### 受信信号モデル

まず、各アダプティブアレイ信号処理の前提となる、フェーズドアレイレーダにおける受信信号モデルについて述べる。等間隔に $N$ 個のアンテナ素子を持つフェーズドアレイアンテナにおいて、 $l$ 番目の時間スタンプにおける受信信号を $y_l$  ( $N$ ベクトル) とすると、降水分布に相当する、各方位角からの複素振幅を $x_l$  ( $M$ ベクトル、 $M \gg N$ ) は、方向ベクトル $s(\theta)$  で構成される $S$  ( $N \times M$ 行列) 及びノイズベクトル $v_l$ を用いて、以下のように表される。

$$y_l = Sx_l + v_l \quad (1)$$

ここで、

$$\mathbf{y}_l = [y_{l,0} \quad y_{l,1} \quad \cdots \quad y_{l,N-1}]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{x}_l = [x_{l,0} \quad x_{l,1} \quad \cdots \quad x_{l,M-1}]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}(\theta_0) \quad \mathbf{s}(\theta_1) \quad \cdots \quad \mathbf{s}(\theta_{M-1})] \quad (4)$$

$$\mathbf{a}(\theta) = [1 \quad \exp(-j\omega_1(\theta)) \quad \cdots \quad \exp(-j\omega_{N-1}(\theta))]^T \quad (5)$$

$$\omega_n(\theta) = (2\pi/\lambda)dn\sin\theta \quad (6)$$

である。 $[\cdot]^T$ は行列の転置を示す。 $\theta$ は本フェーズドアレイレーダにおいては仰角に対応する。

アダプティブアレイ信号処理において、降水分布の推定値は以下のように求められる。

$$\hat{\mathbf{x}}_l = [\hat{x}_{l,0} \quad \hat{x}_{l,1} \quad \cdots \quad \hat{x}_{l,M-1}]^T \quad (7)$$

$$\hat{x}_{l,m} = \mathbf{w}_m^H \mathbf{y}_l \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{w}$ は各手法において求められる重みベクトルを表し、 $[\cdot]^H$ は行列のエルミート転置を示す。

#### フーリエ法 (FR 法)

フーリエ法は最も基本的到来方向推定法である。フーリエ法はメインビームを全方向に走査して到来波を探知する手法である。メインビームを所望の方向に向けるには、その方向からの到来波が各素子で同相になるように重み係数を制御すればよい。すなわち重みベクトル  $\mathbf{w}_{FR}$  は

$$\mathbf{w}_{FRm} = \mathbf{s}(\theta_m)/N \quad (9)$$

となる。

#### MMSE 法

MMSE 法は、最小平均二乗誤差となる解を繰り返しプロセスを用いて求める。本研究では、まず 2 次元環境下における MMSE 規範の最適解を導出した。拘束条件付きの MMSE 法におけるコスト関数は以下で表される。

$$J_m = E \left[ |x_m - \mathbf{w}_{MMSEm}^H \mathbf{y}_l|^2 \right] + \text{Re} \left\{ \lambda (\mathbf{w}_{MMSEm}^H \mathbf{s}(\theta_m) - 1) \right\} \quad (10)$$

ここで、 $E[\cdot]$ は期待値を表し、 $\text{Re}\{\cdot\}$ は複素数の実部を表す。 $\lambda$ はラグランジュの未定乗

数である。このコスト関数を  $w_{MMSEm}$  について最小化すると、

$$w_{MMSEm} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}(\theta_m)}{\mathbf{s}^H(\theta_m) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}(\theta_m)} \quad (11)$$

ここで、

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} \mathbf{R}_x \mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v \quad (12)$$

となる。 $\mathbf{R}_x$  は  $\mathbf{x}$  の共分散行列で、

$$\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x} \mathbf{x}^H] \approx \left[ \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{x}_l \mathbf{x}_l^H \right] * \mathbf{I}_{M \times M} \quad (13)$$

となる。 $*$  はアダマール積を表し、 $\mathbf{I}_{M \times M}$  は  $M \times M$  の単位行列である。

式(14)は、異なる方位からの受信信号間に相関がないことを仮定している。 $\mathbf{R}_v$  は加法性雑音の共分散行列であり、以下のように表される。

$$\mathbf{R}_v = E[\mathbf{v} \mathbf{v}^H] \approx \sigma_v^2 \mathbf{I}_{M \times M} \quad (14)$$

ここで、 $\sigma_v^2$  は雑音の分散値を表す。

MMSE の重みベクトル及び解は、繰り返しプロセスを用いて以下の要領で求められる。

### 事前情報

事前情報として、フーリエ法の解を式(14)に代入する。

$$\mathbf{R}_x|_0 = \left[ \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \hat{\mathbf{x}}_{FRl} \hat{\mathbf{x}}_{FRl}^H \right] * \mathbf{I}_{M \times M} \quad (15)$$

ここで、

$$\hat{\mathbf{x}}_{FRl} = [\hat{x}_{FRl,0} \quad \hat{x}_{FRl,1} \quad \cdots \quad \hat{x}_{FRl,M-1}]^T \quad (16)$$

$$\hat{x}_{FRl,m} = \mathbf{w}_{FRm}^H \mathbf{y}_l \quad (17)$$

### MMSE の重みベクトル

$M$  個の方位角に対する重みベクトルを繰り返し  $i$  回目の  $\mathbf{R}_v$  より求める。

$$\mathbf{w}_{MMSEm}|_i = \frac{\mathbf{R}^{-1}|_i \mathbf{s}(\theta_m)}{\mathbf{s}^H(\theta_m) \mathbf{R}^{-1}|_i \mathbf{s}(\theta_m)} \quad (18)$$

ここで、

$$\mathbf{R}|_i = \mathbf{S}\mathbf{R}_x|_i\mathbf{S}^H + \mathbf{R}_v \quad (19)$$

### MMSE の解

繰り返し  $i$  回目の MMSE 解は以下で表される。

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}|_i = \left[ \hat{x}_{\text{MMSE},0}|_i \quad \hat{x}_{\text{MMSE},1}|_i \quad \cdots \quad \hat{x}_{\text{MMSE},M-1}|_i \right]^T \quad (20)$$

ここで、

$$\hat{x}_{\text{MMSE},m}|_i = \mathbf{w}_{\text{MMSE},m}|_i^H \mathbf{y}_i \quad (21)$$

### 繰り返し

繰り返し  $i+1$  回目の  $\mathbf{R}_x$  は、繰り返し  $i$  回目の MMSE 解を用いて以下のように求められる。

$$\mathbf{R}_x|_{i+1} = \left[ \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}|_i \hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}^H|_i \right] * \mathbf{I}_{M \times M} \quad (22)$$

ここで、2)へ戻る。

上記の繰り返しプロセスは、ステップ 3)において正規化平均二乗誤差に基づく以下の収束判断基準を用いて、終了判定を行う。

$$\delta_i = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left( \frac{\sum_{l=1}^L \|\hat{x}_{\text{MMSE},m}|_i - \hat{x}_{\text{MMSE},m}|_{i-1}\|^2}{\sum_{l=1}^L \|\hat{x}_{\text{MMSE},m}|_{i-1}\|^2} \right) \quad (23)$$

今、以上の MMSE 規範に基づくアルゴリズムを、2次元アレイレーダに拡張する。図 1 に示すような座標系において、2次元アレイアンテナからの出力に対して、MMSE (最小 2 乗誤差法) 法を適用するため、以下のように定式化を行った。アンテナ素子数が  $N_x \times N_y$  の場合、受信信号は下式のように表せる。

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} y_{i,0,0} & y_{i,0,1} & \cdots & y_{i,0,N_y-1} \\ y_{i,1,0} & y_{i,1,1} & \cdots & y_{i,1,N_y-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{i,N_x-1,0} & y_{i,N_x-1,1} & \cdots & y_{i,N_x-1,N_y-1} \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

また、パルス数1回かビームフォーミングの解析範囲を  $M_x \times M_y$  とすると、ビームフォーミング後の受信信号は下記のように表される。

$$\mathbf{x}_l = \begin{bmatrix} x_{l,0,0} & x_{l,0,1} & \cdots & x_{l,0,M_y-1} \\ x_{l,1,0} & x_{l,1,1} & \cdots & x_{l,1,M_y-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{l,M_x-1,0} & x_{l,M_x-1,1} & \cdots & x_{l,M_x-1,M_y-1} \end{bmatrix}^T \quad (25)$$

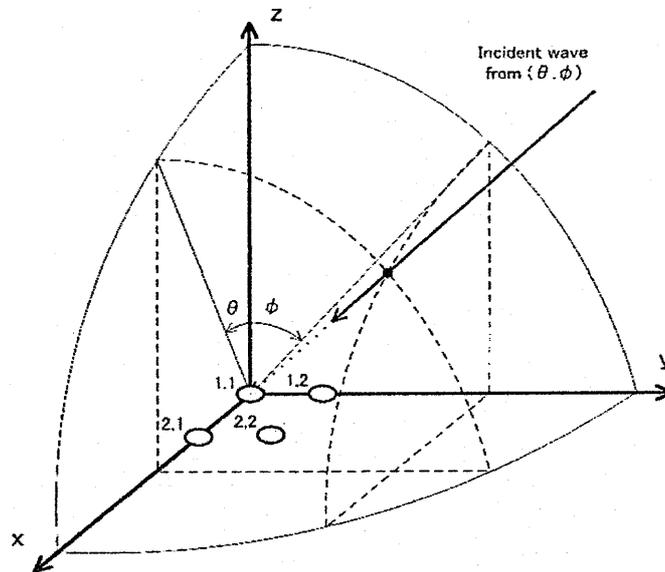


図1. 2次元フェーズドアレイアンテナの配置

また、ステアリングベクトルは  $\theta$  と  $\phi$  によってあらわすことができる。

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s(\theta_0, \phi_0) & s(\theta_0, \phi_1) & \cdots & s(\theta_0, \phi_{M_y-1}) \\ s(\theta_1, \phi_0) & s(\theta_1, \phi_1) & \cdots & s(\theta_1, \phi_{M_y-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s(\theta_{M_x-1}, \phi_0) & s(\theta_{M_x-1}, \phi_1) & \cdots & s(\theta_{M_x-1}, \phi_{M_y-1}) \end{bmatrix}^T \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(\theta, \phi) = & \begin{bmatrix} \exp(-j\omega_{0,0}(\theta, \phi)) & \exp(-j\omega_{0,1}(\theta, \phi)) & \cdots & \exp(-j\omega_{0,N_y-1}(\theta, \phi)) \\ \exp(-j\omega_{1,0}(\theta, \phi)) & \exp(-j\omega_{1,1}(\theta, \phi)) & \cdots & \exp(-j\omega_{1,N_y-1}(\theta, \phi)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(-j\omega_{N_x-1,0}(\theta, \phi)) & \exp(-j\omega_{N_x-1,1}(\theta, \phi)) & \cdots & \exp(-j\omega_{N_x-1,N_y-1}(\theta, \phi)) \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\omega_{n_x, n_y}(\theta, \phi) = \frac{2\pi}{\lambda} (d_x n_x \sin \theta + d_y n_y \sin \phi) \tag{28}$$

そして、この式に対する、MMSE 解は以下のように求めることができる。

$$\mathbf{w} = (\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}^H + \sigma_v^2 \mathbf{I})^{-1} E[|x(\theta)|^2] \mathbf{a}(\theta) \tag{29}$$

ただし  $\sigma_v^2$  は熱雑音の平均電力、行列  $\mathbf{I}$  は  $N$  次元単位行列、行列  $\mathbf{A}$  は上式  $\mathbf{S}$  で表される方向ベクトルである。行列  $\mathbf{G}$  は

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} &= E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] \\
&= \text{diag} \{ E[|x(\theta_1)|^2], E[|x(\theta_2)|^2], \cdots, E[|x(\theta_M)|^2] \}
\end{aligned} \tag{30}$$

となる  $M$  次元の対角行列である。

本手法を用いて降雨観測シミュレーションを行う。想定したアンテナ形状は図 2 に示す。送信周波数は 9.4GHz、総アンテナ素子数は 6992 個、各アンテナ素子の間隔は 16mm とする。パルス繰り返し周波数は 5.4kHz、パルス数は 32~128 を用いた。ビームフォーミング

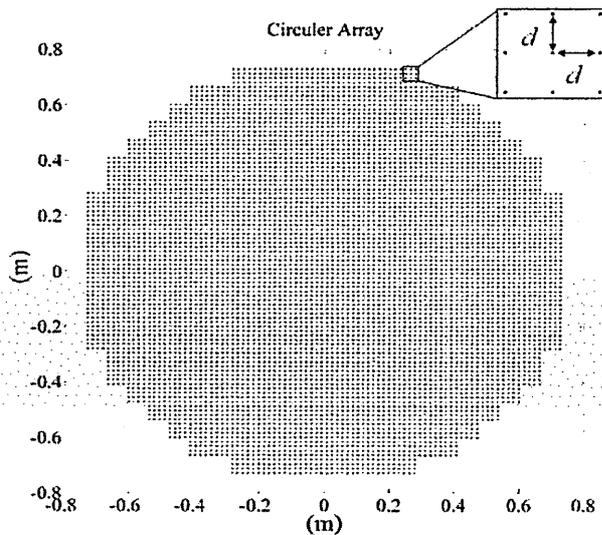


図 2 想定した 2 次元フェーズドアレイレーダの形状

の解析範囲として、アンテナ正面方向から仰角、方位角それぞれ $\pm 15^\circ$ としている。

#### 4. MMSE法を用いた偏波パラメータ観測による降雨観測精度の評価

本節では、前節で構成した二次元フェーズドアレイレーダを想定し受信信号からDBF方式にFR法またはMMSE法を用いて到来信号を算出し偏波観測パラメータの観測精度を比較する。まず観測精度検証方法について述べ、次に設定した分散性ターゲットに対する各偏波観測パラメータの観測シミュレーション結果及び考察について述べる。

##### 4-1. 偏波パラメータの設定(円形ターゲット)

まず、分散性ターゲットとして2次元にガウス分布を用いた円形ターゲットを降雨分布として仮定しシミュレーションを行った。円形ターゲットは平偏波によるレーダ反射因子 $Z_{hh}$  [dBZ]により定義する。本研究は、更に偏波パラメータの観測精度を考察することを目的にしているため、レーダ反射因子の値を参考に各偏波パラメータ(レーダ反射因子差： $Z_{dr}$ 、比偏波間位相差： $K_{dp}$ 及び偏波間相関係数： $\rho_{hv}$ )を理論的に計算した。またこのターゲットが距離方向に1.0[km]の幅があるものと設定した。まず、粒径分布 $N(D)$ をマーシャルパルマーの雨滴粒径分布と仮定すると以下の式が得られる。

$$N(D)[mm^{-1}m^{-3}] = N_0 \exp(-\Lambda D) \quad (31)$$

$$\Lambda[mm^{-1}] = 4.1 \times R^{-0.21} \quad (32)$$

$$N_0[mm^{-1}m^{-3}] = 8 \times 10^3 \quad (33)$$

$$Z = 200R^{1.6} \quad (34)$$

まず上式を用いて降雨強度 $R$ [mm/h]を求め、 $N(D)$ を仮定すると下記のように表される。

$$Z_{dr} \approx \frac{\int D^6 N(D) dD}{\int ratio^{1/3} D^6 N(D) dD} \quad (35)$$

レーダ反射因子差 $Z_{dr}$ は散乱振幅と雨滴粒径分布関数 $N(D)$ を用いて次式で表される。

$$Z_{dr} = 10 \log_{10} \frac{\int |S_{hh}(ratio, D)|^2 N(D) dD}{\int |S_{vv}(ratio, D)|^2 N(D) dD} \quad (36)$$

$K_{dp}$ は真空中の波数 $k_0$ 、前方散乱振幅 $\vec{f}$ 、水平方向の単位ベクトル $\vec{h}$ 、垂直方向の単位ベクトルを用いて次式で表される。

$$K_{dp} = \frac{2\pi}{k_0} \text{Re} \int N(D) \left[ \hat{h} \cdot \vec{f}(\text{ratio}, D) - \bar{v} \cdot \vec{f}(\text{ratio}, D) \right] dD \quad (37)$$

偏波間相関係数は以下の式で表される。

$$\rho_{hv} = \frac{\langle S_{vv} S_{hh}^* \rangle}{\langle |S_{hh}|^2 \rangle^{1/2} \langle |S_{vv}|^2 \rangle^{1/2}} \quad (38)$$

上記式により  $Z_{dr}$ ,  $K_{dp}$  及び  $\rho_{hv}$  を偏波観測パラメータの真値とした。作成した到来信号を前節で述べた二次元フェーズドアレイレーダで受信し、FR法及びMMSE法により到来信号を推定した。比較するために真値の  $Z_{hh} > 15[\text{dBZ}]$  の領域を対象とした。また、レーダ観測に利用するパルス数は128とした。

#### 4-2. MMSE法の有効性と評価

図3に想定した降雨分布 (Truth) に対する、FR法 (FR) とMMSE法 (MMSE) の適用結果を示す。1行目にレーダ反射因子  $Z_{hh}$  の結果を示す。それぞれ1列目(a-1)に真値、2列目(a-2)にFR法の結果、3行目(a-3)にMMSE法の結果を示している。FR法はTruthと比較して降雨の弱い領域で(中央から外側の部分)、中央の非常に強い降雨領域の影響を受けて、過大評価していることがわかる。これはビームフォーミングで形成されたメインローブを降雨の弱い領域に向けた際に、同時に形成されたサイドローブが反射強度の領域を捉えることが原因と考えられる。これは実際の観測においてはクラッタを考慮した場合も同様の事象が生じると考えられる。つまり、アンテナから見て低仰角に存在するビル等から反射する反射強度は非常に強い。それに対してその上空で降雨が発生した場合、クラッタの影響により降雨が過大評価され、弱い降雨でも強い降雨と推定してしまう。一方で、MMSE法は真値と比較してもそのような過大評価は見られず、非常に高精度な推定が可能であることがわかる。このように、非常に強い反射強度をもつクラッタ及び降雨が発生した場合、MMSE法は非常に有効なデジタルビームフォーミング手法であるといえる。以降、偏波観測を想定した、偏波パラメータについて議論する。

2行目(b-1,2,3)にレーダ反射因子差  $Z_{dr}$  の真値、FR法、MMSE法により算出した結果を示す。FR法による算出結果は真値における  $Z_{dr}$  が  $1.0[\text{dB}]$  以下の領域において過大評価しているのに対してMMSE法による算出結果では真値に近い値を示している。MMSE法が比較領域全体にわたって真値に近い値を算出しているのに対して、FR法は比較的降雨の弱い領域で過大評価している。この結果も  $Z_{hh}$  同様FR法のサイドローブの高さが原因だと考えられる。また、真値とFR法による算出結果の相関係数は  $0.30$  であるのに対して真値とMMSE法による算出結果の相関係数は  $0.96$  であり、MMSE法での算出結果がより真値との相関の高さを示した。またFR法による算出結果、誤差平均は  $0.74[\text{dB}]$  となった。それに対してMMSE法による算出結果、誤差平均は  $0.01[\text{dB}]$  となった。

3行目(c-1,2,3)にFR法, MMSE法により算出した比偏波間位相差( $K_{dp}$ )の結果を示す。FR法による算出結果は真値における $K_{dp}$ が0.25[deg/km]以下の領域において結果が真値より高い値を多く算出していることがわかる。 $Z_{hh}$ ,  $Z_{dr}$ と同様高いサイドローブレベルによる影響であると考えられる。それに対してMMSE法による算出結果では真値に近い値を示している。FR法での算出結果はばらつきが大きくなっているのに対しMMSE法での算出結果ではばらつきが小さくなり真値に近い値を算出できている。また, 真値とFR法による算出結果の相関係数は0.21で, 真値とMMSE法による算出結果の相関係数は0.99であり, 同様の考察ができる。またFR法による算出結果の誤差平均は0.66[deg/km]となった。それに対してMMSE法による誤差平均は-0.03[deg/km]となり, 高い精度を示した。

4行目(d-1,2,3)にFR法, MMSE法により算出した偏波間相関係数( $\rho_{hv}$ )の結果を示す。FR法で算出した $\rho_{hv}$ は真値に比べ小さい値を示しており, 特に降雨が弱い領域において値が特に小さくなっていることがわかる。これはFR法によるサイドローブが影響を与えていると考えられる。それに対してMMSE法は少し真値より小さい数値を算出しているが, 真値同様に降雨の弱い領域は強い領域に比べ高い値を示している。た, 真値とFR法による算出結果の相関係数は0.30と0に近い値を示したのに対して真値とMMSE法による算出結果の相関係数は0.92と1に近いとなり, 高い相関を示した。FR法による算出結果の誤差平均は0.25となった。それに対してMMSE法による算出結果, 誤差平均は-0.03となり, 誤差を小さくすることに成功した。

図4に散布図を示す。レーダ反射因子 $Z_{hh}$ に関して, FR法は30dBZ以下の降水分布で過大評価していることがわかる。それに対しMMSE法は弱い領域に関して正確に推定していることがわかる。また, レーダ反射因子差 $Z_{dr}$ に関して, 同様の傾向があるが, レーダ反射因子( $Z_{hh}$ )と比較しても, 分散が大きくなっていることがわかる。つまり, 偏波パラメータに対する影響は反射因子よりも大きいことがわかる。次に, 比偏波間位相差( $K_{dp}$ )に関して, FR法の推定結果は分散が大きく実用的には非常に困難な結果となった。それに対してMMSE法は分散も低く非常に高精度な推定結果となった。偏波間相関係数( $\rho_{hv}$ )に関しては, FR法は比偏波間位相差( $K_{dp}$ )と同様に, 推定困難な結果となる一方MMSE法は全ての範囲で高精度となった。

さらに, 観測に利用するパルス数を変化させた場合, 32, 64, 128とした場合の真値と推定値の相関係数, 平均誤差, 標準偏差を表1に示す。この結果, FR法は全てのパルス数において, レーダ反射因子は高い相関係数を持つことがわかる。一方偏波パラメータに関しては非常に低い相関係数となり, 降雨パラメータの推定は困難である。一方, MMSE法は全ての偏波パラメータにおいて高精度な推定が可能である。特に高速スキミングレーダでは, パルス数が少ないことが特徴である。そこで, パルス数に依存しないMMSE法は非常に有効であることを証明した。

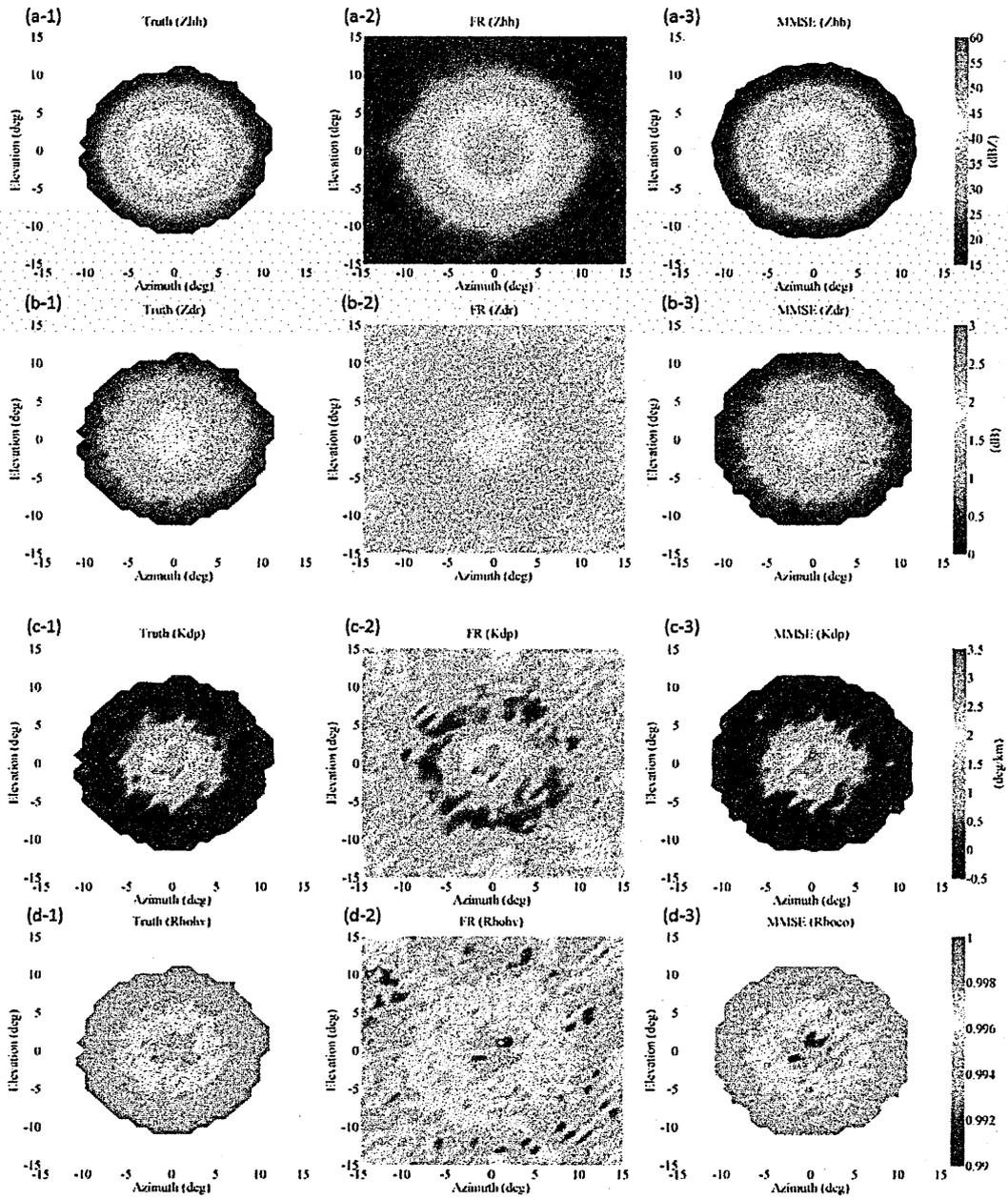


図3 偏波パラメータ推定結果

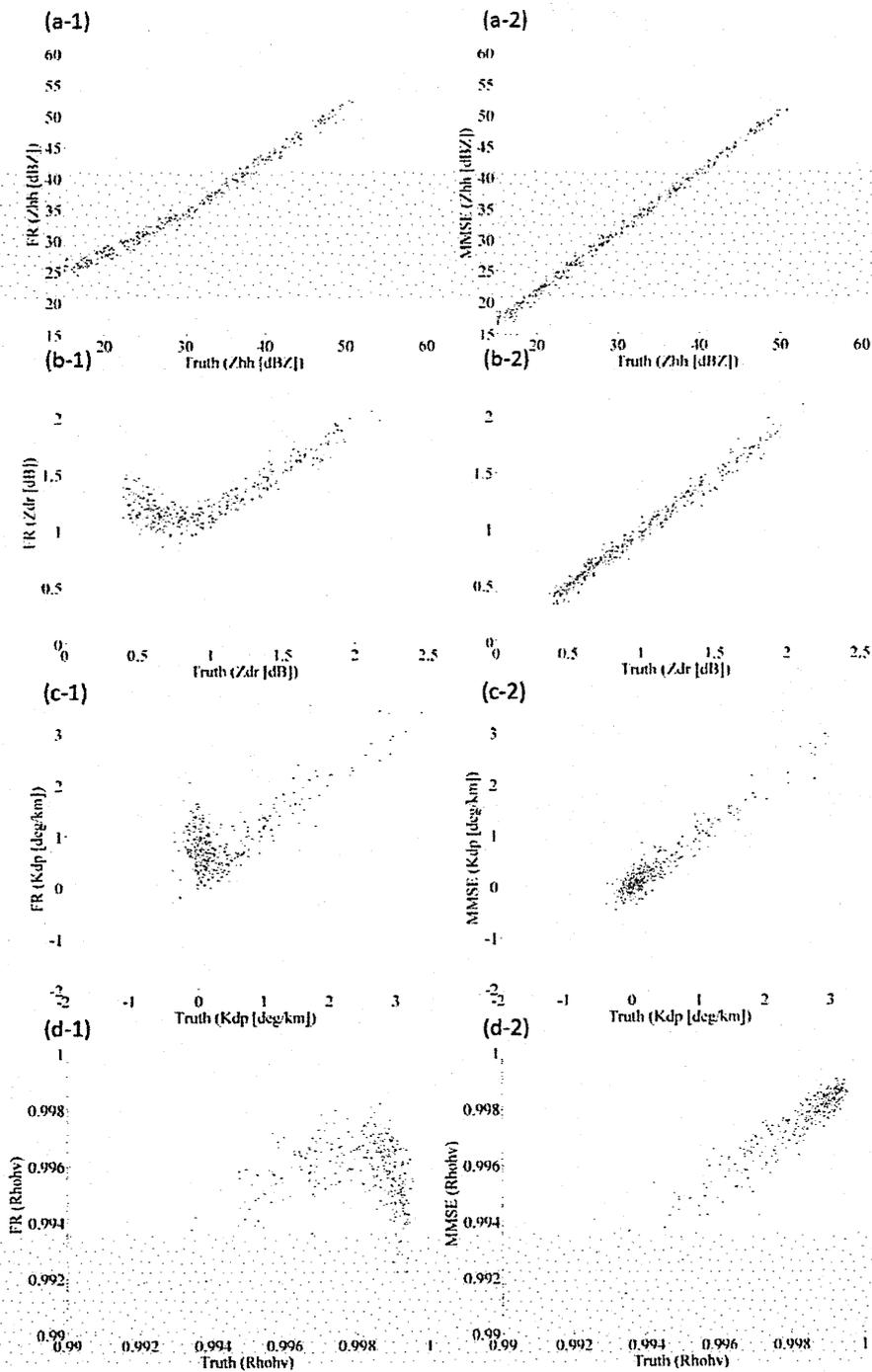


図4 偏波パラメータ推定結果(散布図)

表 1 パルス数と DBF による影響

		Number of Pulses			Number of Pulses			Number of Pulses		
		32			64			128		
		r	MEAN	S.D.	r	MEAN	S.D.	r	MEAN	S.D.
FR	Zhh [dBZ]	0.97	6.16	3.77	0.98	6.37	3.65	0.97	7.80	4.77
	Zdr [dB]	0.63	0.26	0.35	0.52	0.65	0.70	0.30	0.74	0.83
	Kdp [deg/km]	0.49	0.70	0.95	0.37	0.54	0.54	0.21	0.66	0.56
	Rhohv	0.21	0.24	0.43	0.09	0.26	0.44	0.30	0.25	0.44
MMSE	Zhh [dBZ]	0.99	1.03	1.48	0.99	1.22	1.07	0.99	1.38	0.88
	Zdr [dB]	0.91	-0.06	0.21	0.92	0.02	0.28	0.96	0.01	0.18
	Kdp [deg/km]	0.87	-0.02	0.45	0.96	-0.05	0.15	0.99	-0.03	0.09
	Rhohv	0.83	-0.06	0.26	0.86	-0.05	0.24	0.92	-0.03	0.18

## 5. まとめ

2次元フェーズドアレイレーダにおける観測シミュレーションによる偏波観測パラメータの精度評価について統括する。本研究ではX帯二次元フェーズドアレイレーダを仮装し、設定した受信信号に対してFR法またはMMSE法を用いて到来信号を推定し、偏波観測パラメータ $Z_{hh}$ ,  $Z_{dr}$ ,  $K_{dp}$ ,  $\rho_{hv}$ を求めその精度を比較した。特に降雨が強い領域に近くにある降雨の弱い領域においてその結果の差は顕著にみられた。FR法はサイドローブによる影響により、偏波パラメータの観測精度が実用上困難な値となったのに対して、MMSE法は全ての降雨観測パラメータにおいて非常に高精度な推定を行った。また、パルス数を32-128に変化させた検討結果においてもMMSE法はパルス数に依存せず高精度な結果を得た。つまり、高速スキャニングレーダを想定した場合の少ないパルス数にもMMSE法は非常に有用であることを示した。今回は両ターゲットに対して観測範囲を方位角、仰角ともに30[deg]、角度分解能も1[deg]に限定してシミュレーションを行ったが、範囲の拡大や分解能の設定により観測結果が変わる可能性もあり、さらなる検証が必要と考えられる。本研究により、仮装した二次元フェーズドアレイレーダにおいて偏波観測パラメータを算出する際、観測精度に関してMMSE法の有用性を示した。

## 参考文献

- [1] E. Yoshikawa, T. Ushio, Z. Kawasaki, S. Yoshida, T. Morimoto, F. Mizutani, and M. Wada, "MMSE Beam Forming on Fast-Scanning Phased Array Weather Radar," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 51, no. 5, pp. 3077, 3088, May 2013.
- [2] F. Mizutani, M. Wada, T. Ushio, E. Yoshikawa, S. Satoh, and T. Iguchi, "Development of active phased array weather radar," in *Proc. 35th Conf. Radar Meteorol.*, Pittsburgh, PA, 2011.

**Multi- and Single-Channel Bandpass Filters Composed of  
Two Long-Period Fiber Gratings and  
High Attenuation Fiber**

2つの長周期光ファイバグレーティングと高減衰光ファイバ  
より構成された多チャンネル及び単一チャンネル  
帯域通過フィルタ

**Fatemeh ABRISHAMIAN and Katsumi MORISHITA**

アブリシャーミアン ファテメイ 森下克己

**Osaka Electro-Communication University**

大阪電気通信大学

2015年3月26日

於 大阪電気通信大学

# Multi- and Single-Channel Bandpass Filters Composed of Two Long-Period Fiber Gratings and High Attenuation Fiber

Fatemeh ABRISHAMIAN and Katsumi MORISHITA

Osaka Electro-Communication University, 18-8 Hatsu-cho, Neyagawa-shi, Osaka, 572-8530 Japan

**Abstract** We demonstrate all-fiber bandpass filters that use a high attenuation metal-doped fiber placed between two long-period fiber gratings (LPGs). The first LPG couples the resonant core mode to the cladding mode, and the coupled cladding mode passes through the metal-doped fiber with low loss. The second LPG changes the coupled cladding mode back to the core mode, and induces the passband. On the other hand, the non-resonant core mode passing through the first LPG is absorbed greatly by the metal-doped fiber, and the stopband is formed. In the case of two LPGs whose resonance wavelengths almost agree with each other, the passbands emerge at around the resonance wavelengths. The insertion loss of the fabricated multi-channel bandpass filter was 4.5 dB at the center wavelength in a passband, and the stopband attenuation was more than 25 dB. In the case of two LPGs written in dissimilar fibers, the grating periods of two LPGs are adjusted so that the resonant wavelengths of only one pair of the same order cladding modes of both LPGs fit well with each other, and then a single-channel passband appears at around the resonance wavelengths. The insertion loss of the fabricated single-channel bandpass filter was 10.9 dB in the passband, and the stopband attenuation was more than 30 dB. We can increase the stopband attenuation by means of the high attenuation metal-doped fiber. Improving splicing between a metal-doped fiber and LPGs could decrease splice losses of cladding modes, and seems to result in reduction of insertion losses in passbands.

## 2つの長周期光ファイバグレーティングと高減衰光ファイバより構成された多チャネル及び単一チャネル帯域通過フィルタ

アブリシャミアン ファテメイ 森下 克己

大阪電気通信大学 〒572-8530 寝屋川市初町 18-8

**概要** 2つの長周期光ファイバグレーティング (LPG) の間に高減衰金属添加光ファイバを挿入した全光ファイバ帯域通過フィルタを製作した。最初の LPG で共振のコアモードはクラッドモードに変換され、金属添加光ファイバを少ない損失で通過する。変換されたクラッドモードは2番目の LPG で再びコアモードに戻されるので、通過帯域が形成される。他方、最初の LPG を通過する非共振コアモードは金属添加光ファイバでほとんど吸収されて、阻止帯域が形成される。共振波長がほぼ一致する2つの LPG を用いた場合には、複数の通過帯域が共振波長付近に現れる。製作した多チャネル帯域通過フィルタの1つの通過帯域中心における挿入損失は4.5 dB、阻止帯域減衰量は25 dB以上となった。異なる光ファイバに書き込まれた2つの LPG の場合、両 LPG の同じ次数の1つのクラッドモード対に対する共振波長のみがほぼ一致するようにグレーティング周期を調整すると、その共振波長付近に単一チャネルの通過帯域ができる。製作した単一チャネル帯域通過フィルタの通過帯域における挿入損失は10.9 dB、阻止帯域減衰量は30 dB以上となった。高減衰金属添加光ファイバを使用することによって、阻止帯域減衰量を大きくすることができた。金属添加光ファイバと LPG 間の接続を改善すると、クラッドモードの接続損失が減少し、通過帯域の挿入損失は下がると思われる。

### 1. Introduction

Various optical devices are used to construct optical communication and optical sensor systems. Long-period fiber gratings (LPGs) have drawn attention as all-fiber inline devices owing to easy fabrication, low insertion loss, low back-reflection, low polarization-dependent loss, and potentially low cost. LPGs have been widely applied as

in-line devices, such as band-rejection filters [1]-[8], bandpass filters [9]-[20], gain-flattening filters [21]-[24], dispersion compensators [25], add/drop filters [26]-[28], amplitude modulators [29], [30], and optical sensors [31], [32]. The transmission spectrum of an LPG contains inherently stopbands where the periodic structures couple the core mode to the forward-propagating cladding modes.

The coupled cladding modes decay rapidly owing to absorption loss caused by the fiber coating while they propagate along the fiber axis.

To obtain the bandpass characteristics, a  $\pi$ -phase shift was inserted in the middle of an LPFG [9]-[12]. However the effective spectral area of the filter was limited to within its stopband. All-fiber bandpass filters were demonstrated by employing a pair of LPFGs and a core mode blocker (CMB) [13]-[20]. The CMB was placed between the two LPFGs to intercept the non-resonance core mode transmission.

Several techniques for fabricating the CMB have been presented, and were based on the local damage of the core of an  $H_2$ -loaded Ge-doped fiber induced by high UV beam energy [13], the local core damage of an  $H_2$ -loaded Ge-B co-doped fiber by using an electric arc discharge [14], a hollow fiber [15], [16], an absorptive thin film at the core region on the fiber end [17], the damage track at the core-cladding boundary induced by side illumination of KrF laser [18], and a micro-sized crater made by using a femtosecond laser ablation technique [19]. The core damage, the hollow core, and the crater in the core scatter the non-resonance core light and attenuate the core mode. They, however, cause scattering and back-reflection, and a part of the scattered light would be coupled back to the core mode by the second LPFG, and emerge within the

stopbands. Therefore, the stopband attenuation would become worse.

In this paper, a high attenuation metal-doped fiber is used as a CMB to absorb the core mode and increase the stopband attenuation, and LPFGs are written in single mode fibers without photosensitization by a point-by-point arc discharge technique [32]. Multi-channel bandpass filters are demonstrated by using two LPFGs whose resonance wavelengths almost agree with each other. Sakata *et al.* presented a single-channel bandpass filter employing two concatenated LPFGs with different grating periods and an absorptive thin film CMB on the fiber end [17]. However, the insertion loss was relatively large and about 9.3 dB, because different cladding modes were used to couple the resonant wave back into the core [20]. We use the same order cladding modes of different fibers to achieve single-channel bandpass filters and try to improve the insertion loss.

**2. Core Mode Blocker Made by Metal-Doped Fiber**

Fig. 1 shows the schematic diagram of an all-fiber bandpass filter based on a pair of LPFGs and a high attenuation metal-doped fiber as a CMB. The first LPFG, LPFG1, couples the resonant core mode  $LP_{01}$  to the cladding mode  $LP_{0m}$ , and the coupled cladding mode passes through the

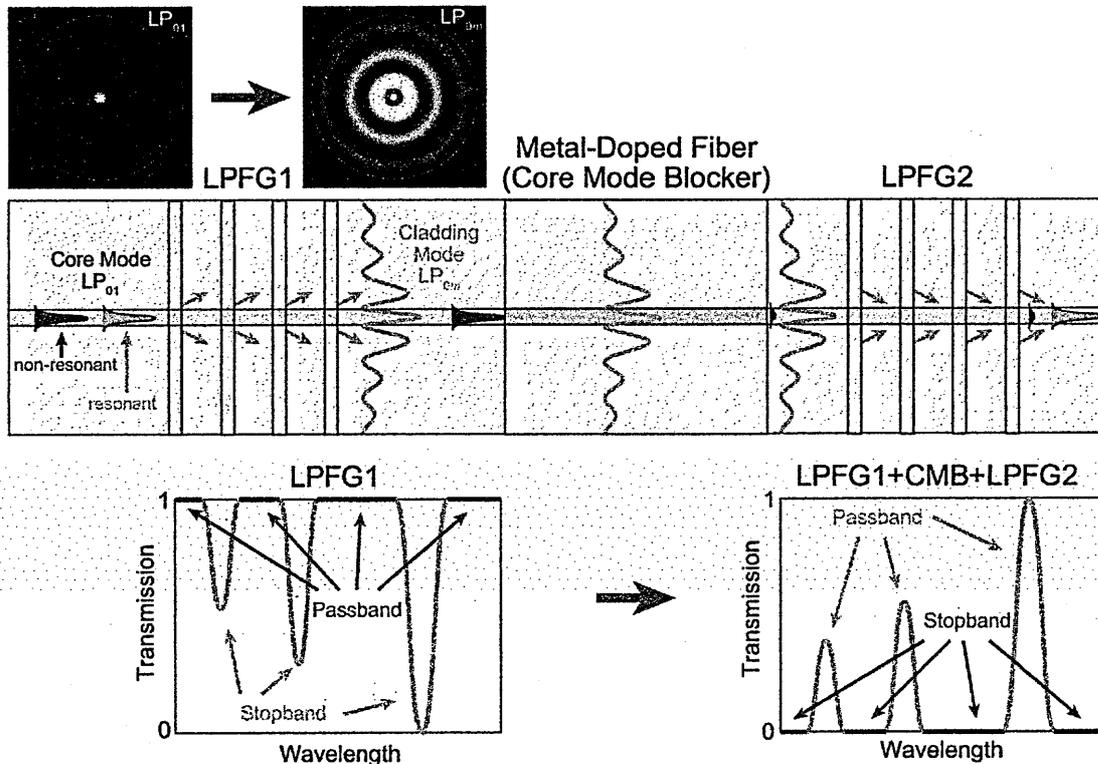


Fig. 1. Schematic diagram of a bandpass filter using a high attenuation metal-doped fiber as a core mode blocker and a pair of LPFGs, LPFG1 and LPFG2. The stopbands and the passbands of the first LPFG, LPFG1, are changed to the passbands and the stopband by the core mode blocker and the second LPFG, LPFG2, respectively.

metal-doped fiber with low loss because of the low proportion of the mode power in the core. The second LPFG, LPFG2, couples the resonant cladding mode back to the core mode, and then a passband is formed. On the other hand, the non-resonant core mode LP<sub>01</sub> passes through the LPFG1 without loss, and attenuates significantly while travelling the metal-doped fiber owing to the high power proportion in the core. Therefore, the stopbands and the passbands of the LPFG1 are converted to the passbands and the stopbands by the metal-doped fiber and the LPFG2, respectively, as shown in Fig. 1.

We employ a metal-doped fiber, ATN-FBX (CorActive High-Tech Inc.), as a CMB. The fiber has the core diameter of 6.24 μm, the cladding diameter of 125.1 μm, the cladding material of silica glass, the core material of metal-doped silica glass, the effective NA of 0.145, and the attenuation of 23.67 dB/cm over the 1.25 ~ 1.65 μm wavelength range. The ATN-FBX fiber is designed to attenuate the core mode by the absorption material in the core. To estimate the attenuation loss of the cladding modes, we applied the scalar approximation to analyze the ATN-FBX fiber with three layers of core, cladding, and air, and calculated the power proportion of the core and the cladding modes in the core.

Fig. 2 shows the power proportion of the core mode LP<sub>01</sub> and the cladding modes LP<sub>02</sub>, LP<sub>03</sub>, LP<sub>04</sub>, and LP<sub>05</sub> in the core. The insets are the radial power distribution of the cladding modes at 1.35 μm and 1.55 μm and their contour maps at 1.45 μm

maps of the mode power distribution at 1.45 μm. The power proportion of the cladding mode in the core increases with increasing the operating wavelength and the mode number. Contrarily the power proportion of the core mode in the core decreases as the operating wavelength increases. Therefore the attenuation of the cladding mode increases with the increasing wavelength and mode number. Assuming that the attenuation is proportional to the ratio of the mode power in the core and the attenuation of the core mode of the ATN-FBX fiber is 23.67 dB/cm, those of the cladding modes, LP<sub>02</sub>, LP<sub>03</sub>, LP<sub>04</sub>, and LP<sub>05</sub>, are estimated as 0.01, 0.05, 0.10, and 0.16 dB/cm at 1.3 μm, and 0.03, 0.11, 0.22, and 0.33 dB/cm at 1.55 μm, respectively. The ATN-FBX fiber would be effective enough to stop the core mode with high loss and pass through the cladding modes with low loss, and would be suitable for a CMB.

### 3. Experimental Results

In this section, we explain the fabrication of multi-/single-channel bandpass filters, and then we discuss our experimental results.

#### 3.1. Multi-Channel Bandpass Filter

Resonance wavelengths of two LPFGs with the same grating period written in the same fiber coincide with each other, and multi-channel bandpass filters were obtained

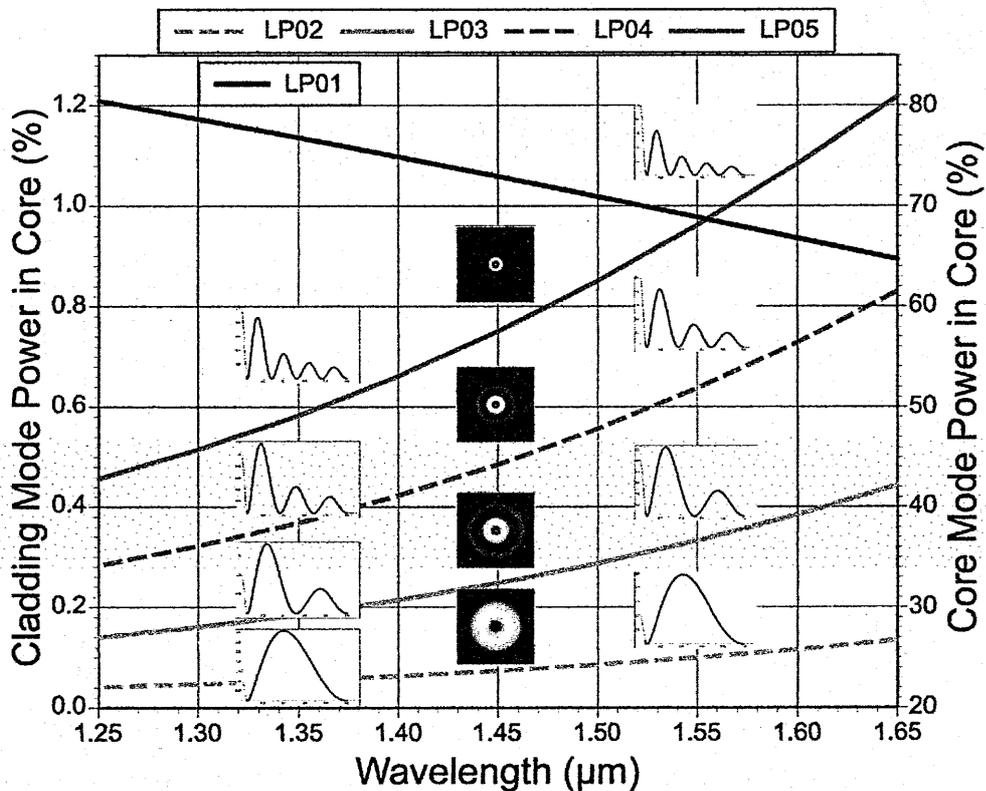


Fig. 2. Power proportion of the core mode LP<sub>01</sub> and cladding modes LP<sub>02</sub>, LP<sub>03</sub>, LP<sub>04</sub>, LP<sub>05</sub> in the core. The insets are the radial power distribution of the cladding modes at 1.35 and 1.55 μm and the contour maps of their mode powers at 1.45 μm.

[13]-[16]. We investigated the possibility of multi-channel bandpass filters using two conventional fibers. The grating periods were adjusted for the resonance wavelengths to fit well with each other.

We fabricated the LPFG1 in a conventional silica fiber (Corning SMF-28e, cutoff wavelength of 1.21  $\mu\text{m}$ ) by the point-by-point arc discharge technique. The discharge current and time were adjusted by a discharge controller and were 25 mA and 80 ms, respectively. The fiber was shifted by a grating period  $\Lambda_1 = 510 \mu\text{m}$  after heating locally by arc discharge (one discharge per shift). Then the fiber was heated again. During the LPFG fabrication, the spectral transmission was monitored and this procedure was repeated until the appropriate transmission was obtained, i.e., the red line in Fig.3 (a). The second LPFG, LPFG2, is fabricated by the same method in a conventional silica fiber (Corning SMF-28e+, cutoff wavelength of 1.19  $\mu\text{m}$ ) with grating

period  $\Lambda_2 = 480 \mu\text{m}$ . The discharge current and time were 25 mA and 84 ms, respectively.

In Fig. 3(a) the red and the blue curves indicate the measured transmission spectra for discharge numbers of 44 and 41, respectively. The resonance wavelengths of the LPFG1 and LPFG2 are 1252 nm and 1259 nm for LP<sub>02</sub>, 1299 nm and 1303 nm for LP<sub>03</sub>, 1390 nm and 1391 nm for LP<sub>04</sub>, 1586 nm and 1573 nm for LP<sub>05</sub>, respectively. We inserted the 17 mm long ATN-FBX fiber between the LPFG1 and LPFG2 using an arc fusion splicer (Fujikura Ltd., FSM-30S). The result of the monitored spectral transmission is shown in Fig.3 (b). The insertion losses in the passbands are orderly 6.78 dB at 1257 nm, 4.48 dB at 1300 nm, 6.90 dB at 1387 nm, and 10.51 dB at 1580 nm wavelengths, respectively. The transmission spectra of the LPFG1 and LPFG2 are deep at nearly the same wavelengths, which are the resonance wavelengths of the same order cladding modes. This produces the related multi-channel bandpass filter. The stopband attenuation is more than around 25 dB.

### 3.2. Single-Channel Bandpass Filter

Conventional fibers have similar characteristics, and resonance wavelengths of LPFGs written in them can be matched nearly with each other by adjusting the grating periods. To make single-channel bandpass filters, we need to employ fibers with dissimilar refractive-index difference and adjust the grating periods. We fabricated the LPFG1 and LPFG2 in fibers with very different characteristics so as to match the resonance wavelengths of only one pair of same order cladding modes and also avoid matching resonance wavelengths of other pairs. This makes it easy to design single-channel bandpass filters at desired specific wavelength.

We fabricated the LPFG1 in a conventional silica fiber (Corning SMF-28e+) by the point-by-point arc discharge technique with grating period  $\Lambda_1 = 600 \mu\text{m}$  and 50 times of arc discharge. The discharge current and time were 35 mA and 92 ms, respectively. The second LPFG is fabricated in a fiber with high index difference ( $\Delta = 2 \sim 2.5\%$ ), High Delta fiber (Mitsubishi Cable Industries Ltd.). The High Delta fiber has the core diameter of 2  $\mu\text{m}$ , the cladding diameter of 125  $\mu\text{m}$ , the mode field diameter of 5.4  $\mu\text{m}$  at 1.55  $\mu\text{m}$  wavelength, the cladding material of silica glass, and the core material of Ge-doped silica glass.

The grating period of the LPFG2 was adjusted so that only the resonance wavelength of the LP<sub>04</sub> cladding mode of the LPFG2 agreed well with that of the LPFG1. The grating period of the LPFG2 and the number of discharges were  $\Lambda_2 = 342 \mu\text{m}$  and 82, respectively. The discharge current and time were also 38 mA and 90 ms, respectively. To identify the orders of cladding modes for both fabricated

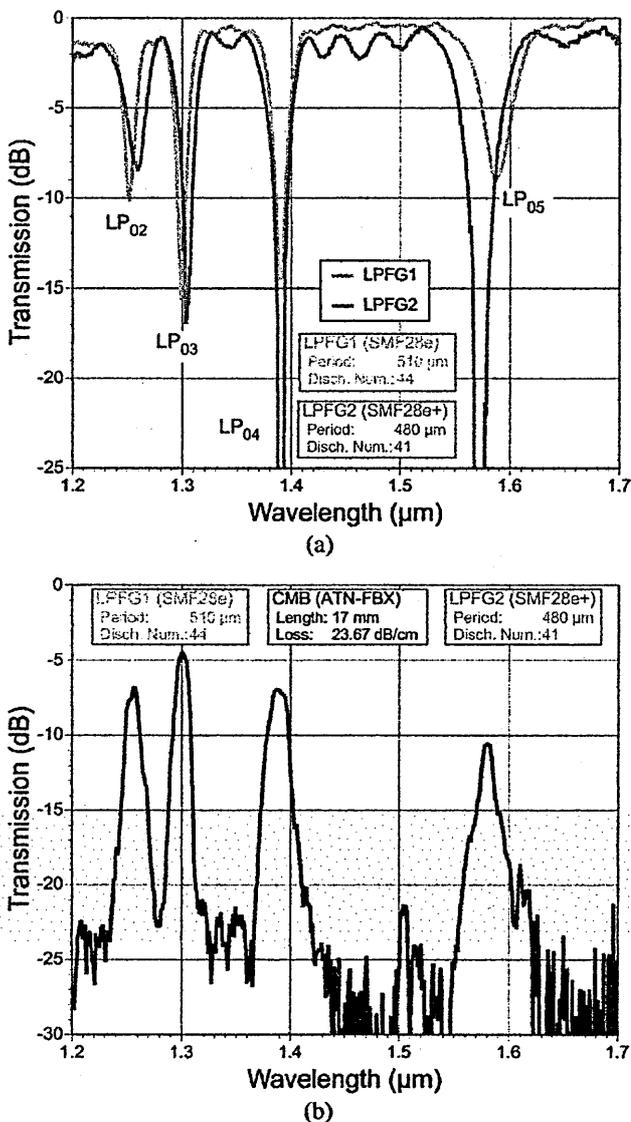


Fig. 3. The transmission spectra of (a) the LPFG1 and LPFG2, and (b) the multi-channel bandpass filter constructed by them and the 17 mm long metal-doped fiber.

LPGs, we measured the intensity profiles by an infrared camera (Hamamatsu Photonics K. K., C2741-03) and a tunable laser with wavelength range of 1500 nm ~ 1580 nm. The intensity patterns are shown as insets in Fig. 4(a). We confirmed the notches for the LPFG1 and LPFG2 at 1509 nm and 1510 nm are related to the LP<sub>04</sub> modes.

The transmission spectrum of the filter spliced the LPFG1, the high attenuation metal-doped fiber, and the LPFG2 is shown in Fig. 4(b). The length of the high attenuation metal-doped fiber was 22 mm. The single-channel bandpass filter peaks at 1508 nm with insertion loss of 10.93 dB, and the stopband attenuation is more than around 30 dB. We see the transmission in the stopband increases a little at around 1670 nm, and it is

caused by the resonance wavelength matching between different cladding modes (LP<sub>05</sub> of the LPFG1 and LP<sub>07</sub> of the LPFG2). The mode conversion losses of the LPFG1 and LPFG2 are estimated at about 1 dB and the calculated transmission loss of the 22 mm long ATN-FBX fiber is about 0.4 dB for the LP<sub>04</sub> mode at 1508 nm. Therefore, the splice loss between the CMB and LPFGs is roughly calculated to be 8.5 dB and is relatively large. Improving splicing could reduce the insertion loss.

#### 4. Conclusions

The all-fiber multi-/single-channel bandpass filters were demonstrated using a pair of LPFGs and a high attenuation metal-doped fiber as a core mode blocker. The multi-channel bandpass filter was fabricated by using conventional silica fibers, and the insertion losses in the passbands were 6.78 dB, 4.48 dB, 6.90 dB, and 10.51 dB. The single-channel bandpass filter was made by a conventional fiber and a fiber with high index difference, and the insertion loss was 10.93 dB. Contrary to previous methods, high attenuation metal-doped fiber cause little back reflection and scattering. Improving splicing between a CMB and LPFGs could decrease splice losses of cladding modes, and seems to result in reduction of insertion losses in the passbands.

#### Acknowledgment

The authors would like to thank M. Tanaka of Mitsubishi Cable Industries, Ltd. for providing the fibers.

#### References

- [1] A. M. Vengsarkar, P. J. Lemaire, J. B. Judkins, V. Bhatia, T. Erdogan, and J. E. Sipe, "Long-period fiber gratings as band-rejection filters," *J. Lightw. Technol.*, vol. 14, no. 1, pp. 58-65, Jan. 1996.
- [2] B. H. Lee and J. Nishii, "Dependence of fringe spacing on the grating separation in a long-period fiber grating pair," *Appl. Opt.*, vol. 38, no. 16, pp. 3450-3459, June 1999.
- [3] L. Wang and T. Erdogan, "Layer peeling algorithm for reconstruction of long-period fibre gratings," *Electron. Lett.*, vol. 37, no. 3, pp. 154-156, Feb. 2001.
- [4] J. Zhang, P. Shum, S. Y. Li, N. Q. Ngo, X. P. Cheng, and J. H. Ng, "Design and fabrication of flat-band long-period grating," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 15, no. 11, pp. 1558-1560, Nov. 2003.
- [5] M. Yan, S. Luo, L. Zhan, Y. Wang, Y. Xia, Z. Zhang, "Step-changed period chirped long-period fiber gratings fabricated by CO<sub>2</sub> laser," *Opt. Commun.*, vol. 281, no. 10, pp. 2784-2788, May 2008.
- [6] W. Shin, B. -A. Yu, Y. -C. Noh, J. Lee, and D. -K. Ko, and K. Oh, "Bandwidth-tunable band-rejection filter based on helicoidal fiber grating pair of opposite helicities," *Opt. Lett.*, vol. 32, no. 10, pp. 1214-1216, May 2007.
- [7] H. Jeong and K. Oh, "Enhancement of free spectral range of the resonance peaks in a long-period fiber grating by controlling material dispersion of cladding modes," *Opt. Commun.*, vol. 199, no. 1-4, pp. 103-110, Nov. 2001.

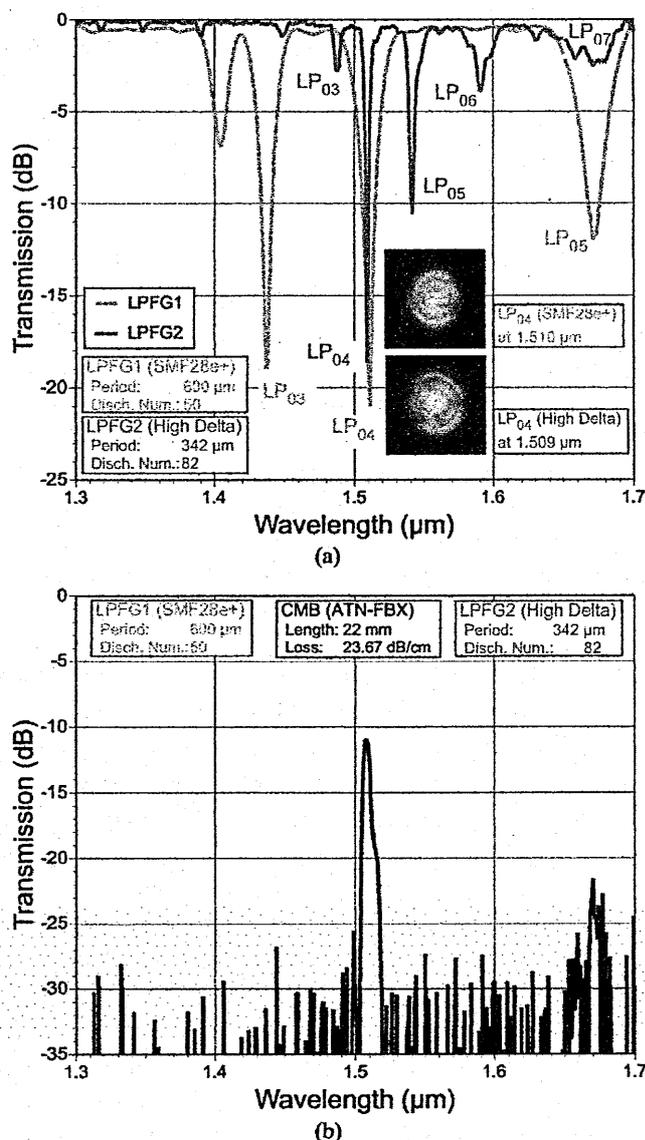


Fig. 4. The transmission spectra of (a) the LPFG1 and LPFG2, and (b) the single-channel bandpass filter constructed by them and the 22 mm long metal-doped fiber. The insets are the photos of the cladding modes LP<sub>04</sub> in the SMF28e+ fiber and the High Delta fiber at the resonance wavelengths, 1.510 and 1.509 μm, respectively.

- [8] C.-L. Lee and P. Han, "Optimal design of single resonant and ultrabroadband long-period fiber grating filters," *Opt. Eng.*, vol. 48, pp. 080501-1-08501-3, Aug. 2009.
- [9] O. Deparis, R. Kiyari, O. Pottiez, and M. Blondel, I. G. Korolev, S. A. Vasiliev, and E. M. Dianov, "Bandpass filters based on  $\pi$ -shifted long-period fiber gratings for actively mode-locked erbium fiber lasers," *Opt. Lett.*, vol. 26, no. 16, pp. 1239-1241, Aug. 2001.
- [10] L. R. Chen, "Design of flat-top bandpass filters based on symmetric multiple phase-shifted long-period fiber gratings," *Opt. Commun.*, vol. 205, no. 4-6, pp. 271-276, May 2002.
- [11] G. Humbert and A. Malki, "High performance bandpass filters based on electric arc-induced  $\pi$ -shifted long-period fibre gratings," *Electron. Lett.*, vol. 39, no. 21, pp. 1506-1507, Oct. 2003.
- [12] Y. Zhu, P. Shum, H. -W. Bay, X. Chen, C. -H. Tan, and C. Lu, "Wide-passband, temperature-insensitive, and compact  $\pi$ -phase-shifted long-period gratings in endlessly single-mode photonic crystal fiber," *Opt. Lett.*, vol. 29, no. 22, pp. 2608-2610, Nov. 2004.
- [13] D. S. Starodubov, V. Grubsky, and J. Feinberg, "All-fiber bandpass filter with adjustable transmission using cladding-mode coupling," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 10, no. 11, pp. 1590-1592, Nov. 1998.
- [14] Y. -G. Han, U. -C. Paek, and Y. Chung, "Fabrication of a novel core mode blocker and its application to tunable bandpass filters," *IEICE Trans. Electron.* vol. E86-C, no. 5, pp. 705-708, May 2003.
- [15] S. Choi, T. J. Eom, J. W. Yu, B. H. Lee, and K. Oh, "Novel all-fiber bandpass filter based on hollow optical fiber," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 14, no. 12, pp. 1701-1703, Dec. 2002.
- [16] S. Choi, T. J. Eom, Y. Jung, B. H. Lee, J. W. Lee, and K. Oh, "Broad-band tunable all-fiber bandpass filter based on hollow optical fiber and long-period grating pair," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 17, no. 1, pp. 115-117, Jan. 2005.
- [17] H. Sakata, Y. Takata, and S. Suzuki, "Single-channel bandpass filter based on vernier-aligned long-period fiber gratings," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 19, no. 20, pp. 1661-1663, Oct. 2007.
- [18] K. J. Lee, D. I. Yeom, and B. Y. Kim, "Narrowband, polarization insensitive all-fiber acousto-optic tunable bandpass filter," *Optics Express*, vol. 15, no. 6, pp. 2987-2992, March 2007.
- [19] S. D. Lim, J. G. Kim, K. Lee, S. B. Lee, and B. Y. Kim, "Fabrication of a highly efficient core-mode blocker using a femtosecond laser ablation technique," *Optics Express*, vol. 17, no. 21, pp. 18449-18454, Oct. 2007.
- [20] J. Bae, J. Bae, and S. B. Lee, "Design of tunable flat-top bandpass filter based on two long-period fiber grating and core mode blocker," *J. Opt. Soc. Korea*, vol. 15, no. 2, pp. 202-206, June 2011.
- [21] A. M. Vengsarkar, J. R. Pedrazzani, J. B. Judkins, P. J. Lemaire, N. S. Bergano, and C. R. Davidson, "Long-period fiber-grating-based gain equalizers," *Opt. Lett.*, vol. 21, no. 5, pp. 336-338, Mar. 1996.
- [22] P. F. Wysocki, J. B. Judkins, R. P. Espindola, M. Andrejco, and A. M. Vengsarkar, "Broad-band erbium-doped fiber amplifier flattened beyond 40 nm using long-period grating filter," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 9, no. 10, pp. 1343-1345, Oct. 1997.
- [23] J. R. Qian and H. F. Chen, "Gain flattening fibre filters using phase-shifted long period fibre gratings," *Electron. Lett.*, vol. 34, no. 11, pp. 1132-1133, May 1998.
- [24] M. Harumoto, M. Shigehara, and H. Sugauma, "Gain-flattening filter using long-period fiber gratings," *J. Lightw. Technol.*, vol. 20, no. 6, pp. 1027-1033, Jun. 2002.
- [25] D. B. Stegall and T. Erdogan, "Dispersion control with use of long-period fiber gratings," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 17, no. 2, pp. 304-312, Feb. 2000.
- [26] V. Grubsky, D. S. Starodubov, and J. Feinberg, "Wavelength-selective couplers and add-drop multiplexer using long-period fiber gratings," in *Tech. Dig. Optical Fiber Communication Conference (OFC2000)*, vol. 4, pp. 28-30, March 2000.
- [27] K. S. Chiang, F. Y. M. Chan, and M. N. Ng, "Analysis of two parallel long-period fiber gratings," *J. Lightw. Technol.*, vol. 22, no. 5, pp. 1358-1366, May 2004.
- [28] Y. -G. Han, S. B. Lee, C. -S. Kim, and M. Y. Jeong, "Tunable optical add-drop multiplexer based on long-period fiber gratings for coarse wavelength division multiplexing systems," *Opt. Lett.*, vol. 31, no. 6, pp. 703-705, Mar. 2006.
- [29] D. S. Starodubov, V. Grubsky, A. Skorucak, J. Feinberg, J. -X. Cai, K. -M. Feng, and A. E. Willner, "Novel fiber amplitude modulators for dynamic channel power equalization in WDM systems," in *Optical Fiber Communication Conference (OFC1998)*, Postdeadline paper PD8-1, 1998.
- [30] D. M. Costantini, H. G. Limberger, R. P. Salathé, C. A. P. Muller, P. Murali, N. Setter, S. A. Vasiliev, O. I. Medvedkov, and E. M. Dianov, "Acousto-optic amplitude modulator based on a long-period fiber grating Mach-Zehnder interferometer," in *Tech. Dig. Bragg Gratings, Photosensitivity, and Poling in Glass Waveguides*, pp. 35-37, 1999.
- [31] V. Bhatia and A. M. Vengsarkar, "Optical fiber long-period grating sensors," *Opt. Lett.*, vol. 21, no. 9, pp. 692-694, May 1996.
- [32] Y. -G. Han, S. B. Lee, C. -S. Kim, J. U. Kang, U. -C. Paek, and Y. Chung, "Simultaneous measurement of temperature and strain using dual long-period fiber gratings with controlled temperature and strain sensitivities," *Opt. Express*, vol. 11, no. 5, pp. 476-481, Mar. 2003.
- [33] F. Abrishamian, N. Dragomir, and K. Morishita, "Refractive index profile changes caused by arc discharge in long-period fiber gratings fabricated by a point-by-point method," *Appl. Opt.*, vol. 51, no. 34, pp. 8271-8276, Dec. 2012.

# 周期境界を持つ二層一様媒質での 平面波散乱回折理論 (I),(II)

– 影理論と周期イメージグリーン関数による厳密な積分方程式 –

Theory of plane wave scattering and diffraction from  
two-layered homogeneous media with a periodic rough  
boundary (I),(II)

– Exact integral equations by the shadow theory and a periodic image Green's function –

田村安彦<sup>1</sup>

(京都工芸繊維大学大学院 工芸科学研究科 電子システム工学部門)

中山純一

(京都工芸繊維大学名誉教授)

– 連立イメージ積分方程式の数値解析 –

– Numerical analysis of simultaneous image integral equations –

田村安彦<sup>1</sup>

(京都工芸繊維大学大学院 工芸科学研究科 電子システム工学部門)

<sup>1</sup> ytamura@kit.ac.jp

2015年3月26日 (木)

輻射科学研究会

(於 大阪電気通信大学 駅前キャンパス 3F301号室)

## 概要

本報告は、周期境界を持つ一様二層媒質からの平面波散乱回折を扱う新しい積分方程式の理論とその数値解析について提案及び議論をしている。また、影理論から導かれる散乱因子の相反性と対称性、ならびに回折効率の相反性と対称性についての最新の知見についても言及している。周期イメージグリーン関数を導入し、影理論とグリーン関数の定理より波動場が満たす厳密な連立イメージ積分方程式を導出する。これより導かれる散乱因子の解析性についても議論する。求積法を用いて連立イメージ積分方程式を数値解析する方法を提示する。具体的な周期境界に対する相反定理、光学定理や散乱因子自体の数値例を示して散乱回折特性を議論し、周期イメージグリーン関数による連立イメージ積分方程式の方法の妥当性を示す。

## 1 はじめに

周期構造は、分光・フィルター・カップラー・漏洩波アンテナなどに広く用いられており、その回折特性の解析は光学や電磁波工学の分野において重要である。一方、不規則表面からの電磁波散乱の数値解析や数値シミュレーションは工学的応用上のリモートセンシング等の基礎研究として重要である。後者については近年、不規則海面に沿う極低角度 (low grazing angle, LGA) 入射に対する S バンドないしは X バンドレーダーによる波浪状況のリモートセンシングが小型船舶航行の安全性確保等に民生用途において重要視されつつある。しかしながら、極低角度入射電磁波による不規則海面からの散乱特性については、理論的にはもとより数値解析や数値シミュレーションの意味でも現在なお、十分に解析解明されているとは言い難い。

従来の不規則表面電磁波散乱シミュレーションでは、FDTD 法のような計算機資源を投入した数値解析手法が適用される場合もあるものの、厳密解法である積分方程式の方法が主流である。解析モデルとして不規則表面を無限平面上の有限領域に限定してビームやテーパ型の平面波で照射するあるいは周期の大きい周期表面として扱う等の実際的な工夫が施されている。一方で、周期構造からの波動散乱・回折特性解析は、レーリーから始まる回折格子の理論と種々の数値解析手法 [1, 2] により現在なお連続と続く研究分野である。不規則表面として周期表面モデルを用いる場合は、それらの膨大な知見の蓄積が利用でき、実際様々な状況下での電磁波散乱解析に適用されている [3]。よく知られているように、周期グリーン関数を用いた積分方程式の方法は、周期表面の波動散乱を記述するヘルムホルツ方程式を解く厳密手法 [1, 2] であり、不規則表面電磁波散乱シミュレーションでも用いられるアプローチである [3, 4]。その反面無損失媒質中で横方向波数  $p$  の平面波入射を考えると、周期  $L$  の周期表面に対し従来の周期グリーン関数は、 $n$  次回折波の横方向波数  $p + 2n\pi/L$  がレーリー波数  $\pm k$  (水平方向への回折) と一致する '臨界入射' に対して全空間で発散する。このとき従来の周期グリーン関数を用いた積分方程式の方法は破綻する。非常に奇妙なことに、この欠点は従来指摘されてこなかった。

我々は周期グリーン関数を用いた積分方程式の方法を影理論 [5-7] に対応させるべく、'臨界入射' に対しても発散しない周期イメージグリーン関数を導入し、新たにイメージ積分方程式の方法を提案した。これにより、水平入射及び '臨界入射' に対しても問題なく次元完全導体周期表面からの TE, TM 平面波散乱回折解析が可能であることを示した [8-11]。

本報告では、次元周期境界を持つ二層一様媒質における平面波散乱回折の新しい解析理論について先の報告 [12] に引き続き議論する。波動場の形と導かれる散乱因子の新たな相反性と対称性、ならびに回折効率の相反性と対称性についても提示する。影理論に基づき、反射と透過の両側において周期フーリエ変換 [13] を用いて周期イメージグリーン関数を導入する。周期境界を含めた両側の領域において各々グリーン関数の定理を適用すれば、境界での電流と磁流としての未知境界値に関する厳密な連立イメージ積分方程式が得られる。水平入射及び '臨界入射' に対し破綻する従来の周期グリーン関数による積分方程式とは異なり、我々の連立イメージ積分方程式は破綻せず常に有効である。これより導かれる散乱因子の解析性についても一部言及する。次に、連立イメージ積分方程式を求積法を用いて数値的に方法に関して議論する。まず周期イメージグリーン関数を具体的に数値計算する方法について述べる。次に連立イメージ積分方程式に対して求積法を導入し行列方程式を導く。具体的な周期境界について行列方程式を解けば、境界値が得られ、更に復元公式から反射側散乱因子及び透過側散乱因子を導出できる。散乱因子の  $p$ -解析性として '臨界波数' で連続ではあるものの微分不可能な挙動やその相反性としての偶対称性や相似鏡映性について数値例を示す。また規格化光学定理を示し、理論的に指摘した反射回折効率や

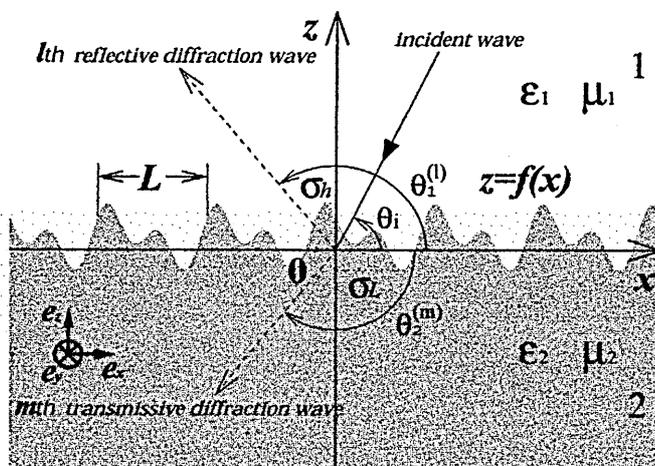


図1 座標系の設定

透過回折効率の水平入射での不連続性あるいは  $p$ -特性としての偶対称性や鏡映対称性を確認する。従来の周期グリーン関数を用いた積分方程式による数値解は'臨界波数'で破綻またはその近傍において解析精度が著しく低下する。一方、連立イメージ積分方程式の数値解は'臨界波数'及びその近傍波数に対しても破綻せず良い解析精度を維持することを示す。

本報告においては、時間因子を  $e^{-2\pi i f t}$  ( $f_i$  は周波数) として省略する。

## 2 影理論に基づく波動場の一般形

周期境界を持つ二層一様媒質<sup>†</sup>からの TE, TM 平面波の散乱回折を考える (図 1)。媒質 1 と 2 から成る二媒質構造であるため、入射は媒質 1 側もしくは媒質 2 側からの二通りを考慮する。

### 2.1 周期境界を持つ二層一様媒質

媒質 1, 2 は一様でありその比誘電率と比透磁率を  $\epsilon_j$  と  $\mu_j$  ( $j = 1, 2$ ) とおくと各媒質中の波数  $k_j$  は以下のように書ける。

$$k_j = \sqrt{\epsilon_j \mu_j} k, \quad k \equiv 2\pi/\Lambda \quad (1)$$

ここで  $k$  は真空中の波数、 $\Lambda$  は真空中の波長である。各媒質中での (裸の) 伝搬因子 (bare propagator)  $\beta_j(p)$  ( $j = 1, 2$ ) を以下のような二価関数として定義しておく<sup>‡</sup>。

$$\beta_j(p) = \sqrt{k_j + p} \sqrt{k_j - p}, \quad \beta_j(0) = k_j \quad (2)$$

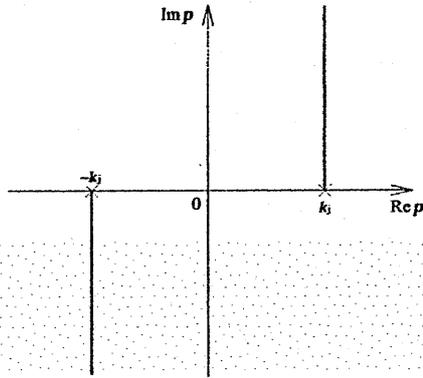
その二つの分岐線は複素  $p$ -平面上において分岐点  $p = k_j$  から  $k_j + i\infty$ 、分岐点  $s = -k_j$  から  $-k_j - i\infty$  へ至る虚  $p$ -軸上に平行な直線にとる (図 2(a))。このとき  $k_j$  が実数で媒質が無損失の場合は、実  $p$ -軸上で  $\text{Re } \beta_j(p), \text{Im } \beta_j(p) \geq 0$  ( $\text{Re}$  は実数部、 $\text{Im}$  は虚数部) を満たす。また実  $p$ -軸上の分岐点  $p = \pm k_j$  において伝搬因子は、“連続ではあるが微分可能でない” という意味での分岐点の特異性 (branch point singularity) を持つことに注意しておく (図 2(b))。二媒質周期境界を  $C^2$ -級の一価な周期関数

$$z = f(x), \quad \sigma_h = \max f(x), \quad \sigma_L = \min f(x) \quad (3)$$

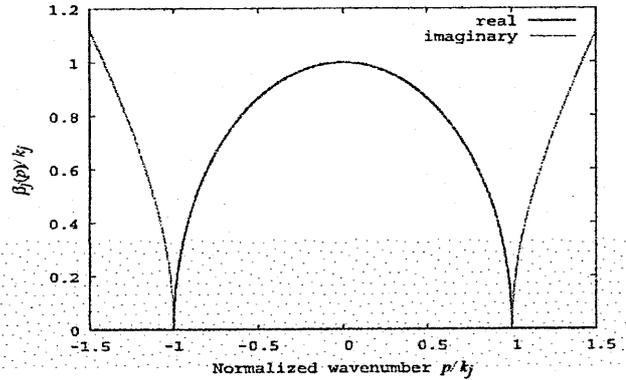
で記述する。  $L$  は周期で  $f(x + L) = f(x)$  を満たす。

<sup>†</sup>この報告では入射側は無損失媒質とし、透過側は少なくともゲイン媒質ではないとする。

<sup>‡</sup>Fortran77 でのコードは標準複素数引数の平方根関数を  $\sqrt{\cdot}$  とすれば  $\sqrt{-i(k_j + p)} \sqrt{-i(k_j - p)}$  で与える。



(a) 伝搬因子  $\beta_j(p)$  の分岐点と分岐線



(b) 実  $p$ -軸上で見た伝搬因子の分岐点の特異性

図 2 無損失媒質中の伝搬因子  $\beta_j(p)$  の分岐点と分岐線

## 2.2 波動場の表現

媒質  $j_1$  ( $j_1 = 1, 2$ ) 側から横方向波数  $p$  を入射波動ベクトルの  $x$ -軸への写影とする TE あるいは TM 平面波

$$\psi_{j_1}^i(x, z) = \begin{cases} e^{-ipx - i\beta_1(p)z} & (j_1 = 1) \\ e^{-ipx + i\beta_2(p)z} & (j_1 = 2) \end{cases} \quad (4)$$

が周期境界  $z = f(x)$  へ入射する。媒質  $j$  ( $j = 1, 2$ ) 中での TE 電界あるいは TM 磁界の  $y$  成分を  $\psi_{j_1 j_2}(x, z)$  と書き、二つの下付き添字の右  $j_1$  で入射側媒質を左  $j_2$  で散乱側媒質 (反射側媒質と透過側媒質) を表す。以下二つの下付もしくは上付き添字は同じ意味で用いる。影理論 (shadow theory) [5-7] より反射側媒質  $j_1$  中の全波動場  $\psi_{j_1 j_1}(x, z)$  は  $z = 0$  上で消滅する一次励振 (primary excitation)  $\psi_{j_1}^e(x, z)$  と二次波 (secondary wave) としての未知散乱波  $\psi_{j_1 j_1}^s(x, z)$  の和で書き、透過側媒質  $j_2$  ( $(j_1, j_2) = (1, 2), (2, 1)$ ) 中の全波動場は二次波のみで書ける。

$$\psi_{j_1 j_1}(x, z) = \psi_{j_1}^e(x, z) + \psi_{j_1 j_1}^s(x, z), \quad \psi_{j_2 j_1}(x, z) = \psi_{j_2 j_1}^s(x, z) \quad (5)$$

一次励振は次式で与えられる。

$$\psi_j^e(x, z) = \psi_j^i(x, z) - \psi_j^i(x, -z) = \frac{2\beta_j(p)}{k_j} e^{-ipx} v_j^e(z) \quad (6)$$

$$v_j^e(z) = \begin{cases} -ik_1 z \operatorname{sinc}(\beta_1(p)z) & (j = 1) \\ ik_2 z \operatorname{sinc}(\beta_2(p)z) & (j = 2) \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 $\operatorname{sinc}(\alpha) \equiv \sin \alpha / \alpha$ 、 $v_j^e(z)$  は基本励振 (basic excitation) である。一次励振  $\psi_j^e$  は水平入射  $p = \pm k_j$  において全空間で消滅する。入射平面波 (4) において  $-k_{j_1} \leq p \leq k_{j_1}$  の時、 $p = k_{j_1} \cos \theta_i$  である。 $\theta_i$  は  $+x$ -軸方向から反時計回りに測る仰角 (elevation angle) として定義される実数の入射角 ( $0 \leq \theta_i \leq \pi$  (媒質 1 側) あるいは  $0 \geq \theta_i \geq -\pi$  (媒質 2 側)) である。(4) は  $\theta_i$ -方向から原点へ伝搬する平面波を表す (図 1)。一方、 $p < -k_{j_1}$  あるいは  $p > k_{j_1}$  の時は (4) は等位相面が  $z$ -軸に平行で場の量が  $z \rightarrow +0$  (媒質 1 側) あるいは  $z \rightarrow -0$  (媒質 2 側) に対して指数関数的に減少するエバネッセント波を表し  $\theta_i$  は複素角をとる。

二媒質境界の周期性からフロケの定理 [14] と影理論より、散乱波  $\psi_{j_1 j_1}^s(x, z)$  の可能な形は

$$\psi_{j_1 j_1}^s(x, z) = \frac{2\beta_{j_1}(p)}{k_{j_1}} e^{-ipx} \psi_{Lj}(x, z) \quad (j = 1, 2) \quad (8)$$

に限られる。 $\psi_{Lj}(x, z)$  は  $x$  についての周期  $L$  の未知周期関数であり、水平入射  $p = \pm k_{j_1}$  ( $\theta_i = 0, \pi$ ) に対して有限  $|\psi_{Lj}(x, z)| < \infty$  である。よって、水平入射  $p = \pm k_{j_1}$  に対し散乱波ならびに全波動場は消滅し、全空間で '影' になる。

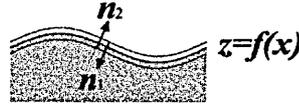


図3 境界上の二つの法線

全波動場  $\psi_{jj_1}(x, z)$  は  $z > f(x)$  ( $j = 1$ ) と  $z < f(x)$  ( $j = 2$ ) において二次元ヘルムホルツ方程式:

$$(\nabla^2 + k_j^2)\psi_{jj_1}(x, z) = 0, \quad \nabla \equiv e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (9)$$

及び境界  $z = f(x)$  上での電磁界接線方向成分の連続性条件:

$$\psi_{1j_1}(x, z) \Big|_{z=f(x)} = \psi_{2j_1}(x, z) \Big|_{z=f(x)}, \quad \frac{\partial \psi_{1j_1}(x, z)}{\partial n_1} \Big|_{z=f(x)} = -\gamma_{12} \frac{\partial \psi_{2j_1}(x, z)}{\partial n_2} \Big|_{z=f(x)} \quad (10)$$

を満たす。ここで定数  $\gamma_{12}$  は以下で定義する。

$$\gamma_{j_1 j_2} = \begin{cases} \mu_{j_1} / \mu_{j_2} & (\text{TE}) \\ \epsilon_{j_1} / \epsilon_{j_2} & (\text{TM}) \end{cases} \quad (11)$$

二媒質ゆえ  $(j_1, j_2) = (1, 2), (2, 1)$  であり、明らかに  $\gamma_{j_2 j_1} = \gamma_{j_1 j_2}^{-1}$  である。また、 $e_x, e_z$  は各々  $x, z$ -軸上の単位ベクトル(図1)、 $\frac{\partial}{\partial n_j}$  ( $j = 1, 2$ ) は境界  $z = f(x)$  上での外向き法線微分である(図3)。境界上の同一点  $(x, f(x))$  では法線微分は互いに逆向きである。

$$\partial / \partial n_1 = -\partial / \partial n_2 \quad (12)$$

境界上で  $\partial / \partial n_1$  を展開しておく。

$$\frac{\partial}{\partial n_1} = \frac{1}{\tau(x)} \left( f'(x) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (13)$$

$$\tau(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} \quad (14)$$

ここで、 $f'(x) \equiv df(x)/dx$  とおいた。

$\psi_{jj_1}$  が(10)の解であることから、より具体的な形として  $\psi_{L1}, \psi_{L2}$  は各々の外部領域  $z \geq \sigma_h \geq f(x), z \leq \sigma_L \leq f(x)$  において次のレーリー表現(Rayleigh expression)で書ける。

$$\psi_{L1}(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^{[1j_1]}(p) e^{-ink_L x + i\beta_1(p+nk_L)z} \quad (15)$$

$$\psi_{L2}(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^{[2j_1]}(p) e^{-ink_L x - i\beta_2(p+nk_L)z} \quad (16)$$

ただし、 $k_L \equiv 2\pi/L$  は周期境界が与える基本のブラッグベクトル(basic Bragg vector)であり、その整数倍が横方向波数に影響を与える。入射側媒質  $j_1$  ( $j_1 = 1, 2$ ) に対し、 $S_n^{[j_1 j_1]}(p)$  は  $n$  次の反射側散乱因子(reflective scattering factor)、 $S_n^{[j_2 j_1]}(p)$  ( $(j_1, j_2) = (1, 2), (2, 1)$ ) は  $n$  次の透過側散乱因子(transmissive scattering factor)である。各々  $(2\beta_{j_1}(p)/k_{j_1})$  倍が  $n$  次反射回折波と  $n$  次透過回折波の複素振幅を表す。 $\theta_{j_1}^{(l)}$  と  $\theta_{j_2}^{(l)}$  は  $l$  次の反射回折角と透過回折角を表す。

$$\begin{aligned} \theta_1^{(l)} &= \pi - \cos^{-1}(\cos \theta_i + lk_L/k_1) \\ \theta_2^{(l)} &= -\pi + \cos^{-1}((k_1/k_2)(\cos \theta_i + lk_L/k_1)) \end{aligned} \quad (l = 0, \pm 1, \dots) \quad (17)$$

ここで逆余弦関数を

$$\cos^{-1} \alpha \equiv -i \log \{ \alpha + i\sqrt{1-\alpha^2} \} \quad (18)$$

として  $\sqrt{\cdot}$  の分岐線の定義を伝搬因子  $\beta_j(p)$  と同期させておく†。  $\theta_1^{(l)}$  と  $\theta_2^{(l)}$  は実数角であれば  $0 \leq \theta_1^{(l)} \leq \pi, 0 \leq \theta_2^{(l)} \leq \pi$  をとる。(15)-(16)による散乱波(8)は定義領域  $|z| \rightarrow \infty$  での放射条件を満たす。これらは外向き伝搬

† Fortran77でのコードは標準組込複素数引数の対数関数  $\log^F(\cdot)$  と平方根関数  $\sqrt{\cdot}$  を用いて  $\pi/2 + i \log^F \{ i(\alpha + \sqrt{-i(\alpha+1)}) \sqrt{i(\alpha-1)} \}$  で与える。

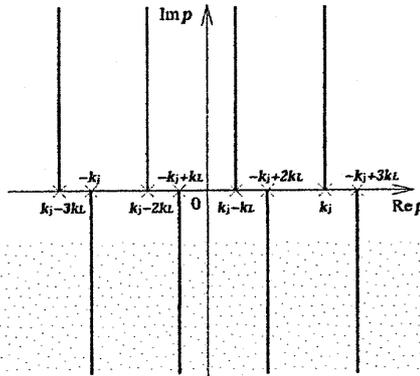


図4 派生伝搬因子  $\beta_j(p + nk_L)$  ( $j = 1, 2, n = 0, \pm 1, \dots$ ) の分岐点と分岐線

平面波と  $|z| \rightarrow \infty$  に対して指数関数的に振幅が減少するエバネッセント波の和で表され、散乱因子  $S_n^{[jj]}(p)$  が定まれば完全に決定される。

散乱因子  $S_n^{[jj]}(p)$  の解析性については、少なくとも実  $p$ -軸上での連続性と有限性  $|S_n^{[jj]}(p)| < \infty$  を仮定しておく。実  $p$ -軸上から複素波数  $p$  平面に拡張するとき、レーリー表現 (15), (16) のみから一般論として、“伝搬因子  $\beta_j(\cdot)$  の解析性より散乱因子  $S_n^{[jj]}(p)$  は図4で示すような(可算無限個の)派生伝搬因子  $\beta_1(p + nk_L), \beta_2(p + nk_L)$  の分岐点と分岐線の特異性を継承する”、とは言えない(現時点では直感的な予想である)。

## 2.3 相反定理と光学定理

相反定理 (reciprocal theorem) と光学定理 (optical theorem) の議論では基本的に無損失媒質 ( $Im k_j = 0, j = 1, 2$ ) かつ実数の  $p$  とする。これらは数値解析の妥当性を示すための指標として利用できる。

### 2.3.1 相反定理

相反定理の議論はグリーン関数の相反性から出発する作法 [15] もあるが、本報告では平面波入射を対象とした不規則表面 [16] や不完全周期表面の作法 [17] に従って行う。二つの入射波  $p, p'$  に対し各々の入射側媒質を  $j_1, j_2$  ( $j_1, j_2 = 1, 2$ ) とするとき、各媒質  $j$  ( $j = 1, 2$ ) 中のヘルムホルツ方程式 (9) の解  $\psi_{jj_1}, \psi_{jj_2}$  が満たす恒等式

$$\nabla \cdot (\psi_{jj_1} \nabla \psi_{jj_2} - \psi_{jj_2} \nabla \psi_{jj_1}) = 0 \quad (19)$$

より出発する。媒質  $j$  側において、閉曲線  $C_j$  (図5) で囲まれた領域  $S_j$  においてガウスの定理により恒等式を評価し、長さ  $2\chi$  で規格化すると、各媒質  $j$  内で成り立つ二つの線積分を得る。各積分で  $\chi \rightarrow \infty$  の極限において縦の直線経路上の積分の寄りは消滅<sup>†</sup>するので、二つの無限積分が導かれる。

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\chi} \int_{-\chi}^{\chi} \left\{ \psi_{1j_1}(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \psi_{1j_2}(x, z) - \psi_{1j_2}(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \psi_{1j_1}(x, z) \right\} \Big|_{z=h_1} dx + \lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\chi} \int_{-\chi}^{\chi} \left\{ \psi_{1j_1}(x, z) \frac{\partial}{\partial n_1} \psi_{1j_2}(x, z) - \psi_{1j_2}(x, z) \frac{\partial}{\partial n_1} \psi_{1j_1}(x, z) \right\} \Big|_{z=f(x)} \tau(x) dx = 0 \quad (20)$$

$$- \lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\chi} \int_{-\chi}^{\chi} \left\{ \psi_{2j_1}(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \psi_{2j_2}(x, z) - \psi_{2j_2}(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \psi_{2j_1}(x, z) \right\} \Big|_{z=h_2} dx + \lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\chi} \int_{-\chi}^{\chi} \left\{ \psi_{2j_1}(x, z) \frac{\partial}{\partial n_2} \psi_{2j_2}(x, z) - \psi_{2j_2}(x, z) \frac{\partial}{\partial n_2} \psi_{2j_1}(x, z) \right\} \Big|_{z=f(x)} \tau(x) dx = 0 \quad (21)$$

<sup>†</sup>通常、相反定理の議論では表面に沿う一周期を含む閉領域をとり、入射波  $p$  に対するもう一つの入射波  $p'$  を予め相反性の対象となるように  $p' = -(p + nk_L)$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) と置く (例えば文献 [1])。このとき被積分関数は  $x$  について周期  $L$  の周期関数となるので縦の直線経路上の積分の寄りは互いにキャンセルする。ここでの議論は  $p'$  のとり得る形、すなわち  $p' \neq -(p + nk_L)$  が相反性の候補ではないこと、をも導き出す作法となっている。

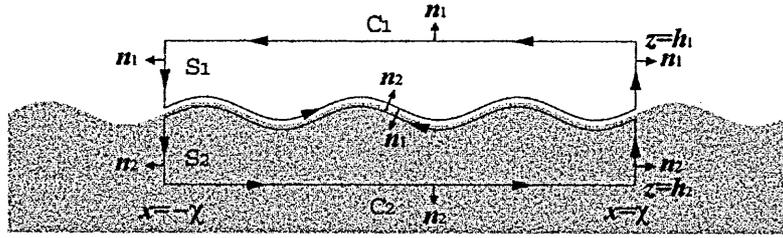


図5 相反定理及び光学定理導出のための積分領域

ここで  $h_1, h_2$  は、 $h_1 > \sigma_h, h_2 < \sigma_L$  を満たす任意定数である。境界条件 (10)-(11) と (12)-(14) より、無限積分 (20)-(21) の境界  $z = f(x)$  上の積分を消去すると次の結合無限積分を得る。

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\chi} \int_{-\chi}^{\chi} \left\{ \psi_{1j_1}(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \psi_{1j_2}(x, z) - \psi_{1j_2}(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \psi_{1j_1}(x, z) \right\} \Big|_{z=h_1} + \gamma_{21} \left\{ \psi_{2j_1}(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \psi_{2j_2}(x, z) - \psi_{2j_2}(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \psi_{2j_1}(x, z) \right\} \Big|_{z=h_2} dx = 0 \quad (22)$$

**反射側相反定理** 反射側相反定理は同じ媒質  $j$  ( $j = 1, 2$ ) からの二つの入射波  $p, p'$  に対して考える。この場合透過側媒質は損失媒質でもよい。外部領域でのレーリー表現 (15), (16) と次の連続変数版クロネッカーデルタ  $\delta_{\lambda, 0}$  の関係式

$$\delta_{\lambda, 0} \equiv \lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\chi} \int_{-\chi}^{\chi} e^{i\lambda x} dx = \begin{cases} 1 & (\lambda = 0) \\ 0 & (\lambda \neq 0) \end{cases} \quad (23)$$

より結合無限積分 (22) を評価する。(22) の透過側散乱因子に関する項は常に消滅し関係式は出て来ない<sup>†</sup>。反射側散乱因子については、 $p + p' + nk_L \neq 0$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) では自明な関係式となるため、自明でない関係式は  $p + p' + nk_L = 0$  を満たす  $p, p'$  (図6) に対してのみ現れ、反射側散乱因子  $S_n^{[jj]}(p)$  ( $j = 1, 2$ ) の相反性

$$S_n^{[jj]}(p) = S_n^{[jj]}(-p - nk_L) \quad (n = 0, \pm 1, \dots) \quad (24)$$

を得る。これは水平入射  $\beta_j(p)\beta_j(p + nk_L) = 0$  に対しても定義される。また透過側が損失媒質であっても成り立つ。相反性は完全導体周期表面において文献 [1] 等では伝搬因子を伴った回折振幅の相反性の意味では既に示されているが、もちろんこれは水平入射に対して定義されていなかった。更には本報告で扱う周期的二媒質境界 (誘電体周期表面) の意味では従来全く具体的な議論されて来なかった。その意味でも相反性 (24) は今回新たに見出された基本的関係である。(24) の別の表現として実  $p$  の関数として見るとき  $p = nk_L/2$  に関する偶対称性 (even symmetry) を示しておく。

$$S_n^{[jj]}(p - nk_L/2) = S_n^{[jj]}(-p - nk_L/2) \quad (25)$$

**透過側相反定理** 透過側相反定理は異なる無損失媒質  $j_1, j_2$  ( $(j_1, j_2) = (1, 2), (2, 1)$ ) からの二つの入射波  $p, p'$  に対して考える。反射側相反定理の同様に結合無限積分 (22) を評価すると、反射側散乱因子  $S_n^{[j_1 j_1]}(p), S_n^{[j_2 j_2]}(p)$  が関わる項は常に消滅し関係式は出て来ない。透過側散乱因子については、 $p + p' + nk_L \neq 0$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) では自明な関係式となるため、自明でない関係式は  $p + p' + nk_L = 0$  を満たす  $p, p'$  (図6) に対してのみ現れ、透過側散乱因子  $S_n^{[j_2 j_1]}(p), S_n^{[j_1 j_2]}(p)$  の相反性

$$S_n^{[j_1 j_2]}(p) = \gamma_{j_1 j_2} \frac{k_{j_2}}{k_{j_1}} S_n^{[j_2 j_1]}(-p - nk_L) \quad (j_1, j_2) = (1, 2), (2, 1), \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (26)$$

を得る。こちらも水平入射  $\beta_{j_2}(p)\beta_{j_1}(p + nk_L) = 0$  に対しても定義される。こちらは従来盲点とも言えるくらい全く議論されて来なかった、今回新たに見出された基本的関係である。(26) の別の表現として実  $p$  の関数として

<sup>†</sup> 散乱因子の積の項は消滅し、一次励振との積の項から散乱因子の単独項が生き残る。

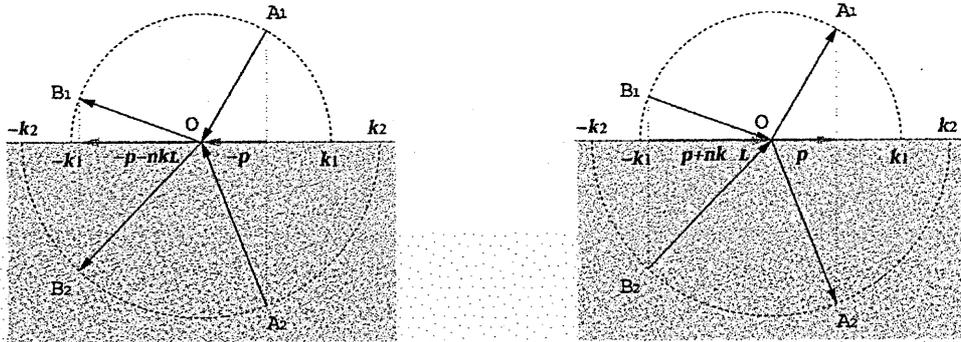


図 6 相反定理における二つの入射波  $p, p' = -p - nk_L$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ )

見るとき  $p = nk_L/2$  に関する相似鏡映性 (similar reflectivity) を示しておく。

$$S_n^{[j_1 j_2]}(p - nk_L/2) = \gamma_{j_1 j_2} \frac{k_{j_2}}{k_{j_1}} S_n^{[j_2 j_1]}(-p - nk_L/2) \quad (27)$$

これは入射側媒質  $j_2$  に対する透過散乱因子が入射側媒質  $j_1$  に対する透過散乱因子の  $\gamma_{j_1 j_2} \frac{k_{j_2}}{k_{j_1}}$  倍に対し  $p = nk_L/2$  に関する鏡映性を持つことを表している。

### 2.3.2 光学定理

光学定理 媒質  $j_1$  ( $j_1 = 1$  もしくは  $j_1 = 2$ ) 側から入射させるとき、各媒質  $j$  ( $j = 1, 2$ ) 中のヘルムホルツ方程式 (9) の解  $\psi_{j j_1}$  が満たす保存則

$$\nabla \cdot \{ \text{Im} (\psi_{j j_1}^* \nabla \psi_{j j_1}) / k \} = 0 \quad (28)$$

より出発する (\* は複素共役)。相反定理と同様な積分領域 (図 5) においてガウスの定理を評価する<sup>†</sup>と実  $p$  入射に関する光学定理 (optical theorem)

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Re} \beta_{j_1}(p)}{k} + \frac{(2\text{Im} \beta_{j_1}(p))^2}{kk_{j_1}} \text{Re} S_0^{[j_1 j_1]}(p) \\ &= \frac{\text{Re} \beta_{j_1}(p)}{k} \left| \frac{2\beta_{j_1}(p) S_0^{[j_1 j_1]}(p)}{k_{j_1}} - 1 \right|^2 + \frac{1}{k} \sum_{n \neq 0} \left| \frac{2\beta_{j_1}(p) S_n^{[j_1 j_1]}(p)}{k_{j_1}} \right|^2 \text{Re} \beta_{j_1}(p + nk_L) \\ & \quad + \frac{\gamma_{j_1 j_2}}{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{2\beta_{j_1}(p) S_n^{[j_2 j_1]}(p)}{k_{j_1}} \right|^2 \text{Re} \beta_{j_2}(p + nk_L) \end{aligned} \quad (29)$$

と 0 次反射側散乱因子に関する関係式

$$\text{Re} S_0^{[j_1 j_1]}(p) > 0 \quad (30)$$

を得る。ここで  $(j_1, j_2) = (1, 2), (2, 1)$  である。伝搬波動入射 ( $-k_{j_1} \leq p \leq k_{j_1}$ ) の場合、(29) の左辺第一項が入射波自体による入射電力を表す。エバネッセント波入射 ( $p < -k_{j_1}$  あるいは  $p > k_{j_1}$ ) の場合、(29) の左辺第一項が入射波と 0 次回折波との (積の) 干渉により生ずる電力流の寄与で実効的な入射電力として働く。(29) の右辺第一項は伝搬波動入射で意味を持つ 0 次の回折波電力 (鏡面反射電力)、第二項は 0 次以外の反射回折電力の総和及び第三項は全透過回折電力を表す。これらの電力は水平入射  $\beta_{j_1}(p) = 0$  で全て零になる。

<sup>†</sup> 光学定理の議論では電力流  $\text{Im} (\psi_{j j_1}^* \nabla \psi_{j j_1}) / k$  が  $\alpha$  について周期  $L$  の周期関数となる。このため相反定理と同様に表面に沿う一周期分を含む閉領域を扱う作法が回折理論では主流である。ここでは図 5 の共有のためである。

**規格化光学定理** 光学定理 (29) を対応する入射電力で規格化すると、規格化光学定理 (normalized optical theorem) あるいはエネルギーバランス基準 (energy balance criterion)

$$1 = \eta_R^{[j]} + \eta_T^{[j]} \quad (31)$$

$$\eta_R^{[j]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_{R_n}^{[j]}(p) \quad \eta_T^{[j]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_{T_n}^{[j]}(p) \quad (32)$$

を得る。ここで、 $\eta_R^{[j]}$  と  $\eta_T^{[j]}$  は各々規格化全反射電力と規格化全透過電力である。上付きの添字  $[j]$  は入射側媒質  $j$  を表す。 $\eta_{R_n}^{[j]}(p)$  と  $\eta_{T_n}^{[j]}(p)$  は各々、 $n$  次の反射回折効率 ( $n$ th reflective diffraction efficiency) と  $n$  次の透過回折効率 ( $n$ th transmissive diffraction efficiency) である。伝搬波動入射 ( $|p| \leq k_j$ ) では

$$\eta_{R_0}^{[j]}(p) = \left| \frac{2\beta_j(p)S_0^{[jj]}(p)}{k_{j_1}} - 1 \right|^2 \quad (33)$$

$$\eta_{R_n}^{[j]}(p) = |S_n^{[jj]}(p)|^2 \frac{4\beta_j(p)}{k_{j_1}^2} \operatorname{Re} \beta_j(p + nk_L) \quad (n \neq 0) \quad (34)$$

$$\eta_{T_n}^{[j_1]}(p) = \gamma_{j_1 j_2} |S_n^{[j_2 j_1]}(p)|^2 \frac{4\beta_{j_1}(p)}{k_{j_1}^2} \operatorname{Re} \beta_{j_2}(p + nk_L) \quad (35)$$

であり、エバネッセント波入射 ( $|p| > k_j$ ) では

$$\eta_{R_n}^{[j]}(p) = |S_n^{[jj]}(p)|^2 \frac{\operatorname{Re} \beta_j(p + nk_L)}{k_{j_1} \operatorname{Re} S_0^{[jj]}(p)} \quad (36)$$

$$\eta_{T_n}^{[j_1]}(p) = \gamma_{j_1 j_2} |S_n^{[j_2 j_1]}(p)|^2 \frac{\operatorname{Re} \beta_{j_1}(p + nk_L)}{k_{j_1} \operatorname{Re} S_0^{[j_1 j_1]}(p)} \quad (37)$$

となる。透過回折効率の表式 (35), (37) においては  $(j_1, j_2) = (1, 2), (2, 1)$  である。従来理論や解析手法 [1-4] では、水平入射  $\beta_j(p) = 0$  での零除算となり真に水平入射を取り扱うことは出来なかった (水平入射での回折効率の未定義性)。影理論に基づく定式化においては水平入射時も合理的に定義されていることを指摘しておきたい。

**回折効率のレーリー波数での不連続性** ここまでの議論で 0 次の反射回折効率 (33), (36) より水平入射  $p = \pm k_j$  での不連続性

$$\lim_{p \rightarrow \pm k_j \mp 0} \eta_{R_0}^{[j]}(p) = 1, \quad \lim_{p \rightarrow \mp k_j \pm 0} \eta_{R_0}^{[j]}(p) = 0 \quad (38)$$

が自明な性質として得られる。これは完全導体周期表面の場合 [10] と同じ性質である。透過回折効率と 0 次以外の反射回折効率については (34)-(35) より伝搬波動での水平入射極限  $p \rightarrow k_{j_1} - 0, p \rightarrow -k_{j_1} + 0$  では

$$\lim_{p \rightarrow \pm k_{j_1} \mp 0, n \neq 0} \eta_{R_n}^{[j_1]}(p) = \lim_{p \rightarrow \pm k_{j_1} \mp 0} \eta_{T_n}^{[j_1]}(p) = 0 \quad (39)$$

は自明である。エバネッセント波入射での水平入射極限  $p \rightarrow k_{j_1} + 0, p \rightarrow -k_{j_1} - 0$  では、散乱因子  $S_n^{[j_1 j_1]}(p)$  ( $j = 1, 2$ ) の  $p = \pm k_{j_1}$  での連続性と (36)-(37) より

$$\lim_{p \rightarrow \pm k_{j_1} \mp 0} \eta_{R_n}^{[j_1]}(p) \neq 0 \quad (|p + nk_L| < k_{j_1}), \quad \lim_{p \rightarrow \pm k_{j_1} \mp 0} \eta_{T_n}^{[j_1]}(p) \neq 0 \quad (|p + nk_L| < k_{j_2}) \quad (40)$$

となり同じく水平入射  $p = \pm k_{j_1}$  で不連続になる。このような規格化電力としての不連続性は一見不可思議な印象を受けるが、規格化の際の入射電力が伝搬波動入射時とエバネッセント波入射時では異なることに起因する。

**回折効率の相反性と対称性** 片側における伝搬波入射 ( $|p|, |p + nk_L| \leq k_j$ ) に限定するとき、反射側散乱因子の偶対称性 (24)-(25) と反射回折効率 (33)-(34) より、 $n$  次反射回折効率の相反性

$$\eta_{R_n}^{[j]}(p) = \eta_{R_n}^{[j]}(-p - nk_L) \quad (41)$$

あるいは、 $n$  次反射回折効率の  $p = nk_L/2$  を中心とする偶対称性 (even symmetry)

$$\eta_{R_n}^{[j]}(p - nk_L/2) = \eta_{R_n}^{[j]}(-p - nk_L/2) \quad (42)$$

が導かれる。この性質は

- ・ 反射回折効率の波数  $p$  に関する偶対称性 (偶関数性)
- ・ 従来の数多くの文献や論文等 [1, 2] においては回折角  $\theta_j^{(n)}$  で議論したため、完全導体周期表面 [10] で初めて提示されるまで偶対称性が見落とされて来たこと
- ・ 誘電体周期表面として初めて提示したこと
- ・ 周期境界の対称性を含めて形状に依存しないこと

を改めて指摘しておく。なお、透過側媒質が損失を持つとき、その透過回折率は定義できなくなるものの反射側回折率自体は定義できかつ偶対称性 (42) を保持することに留意すべきである。

次に、各々の媒質内での伝搬波入射 ( $|p|, |p + nk_L| \leq k_1, k_2$ ) に限定するとき、透過側散乱因子の相似鏡映性 (26)-(27) と伝搬波動入射での透過回折効率 (35) より、 $n$  次透過回折効率の相反性

$$\eta_{T_n}^{[j_2]}(p) = \eta_{T_n}^{[j_1]}(-p - nk_L) \quad (43)$$

あるいは、 $n$  次透過回折効率の  $p = nk_L/2$  を中心とする鏡映対称性 (reflective symmetry)

$$\eta_{T_n}^{[j_2]}(p - nk_L/2) = \eta_{T_n}^{[j_1]}(-p - nk_L/2) \quad (44)$$

が著しい性質として得られる。この性質は

- ・ 新しく見い出された基本性質
- ・ 透過回折効率の波数  $p$  に関する鏡映性 (鏡写的対称性)
- ・ 周期境界の対称性を含めて形状に依存しないこと

を指摘しておく。

### 3 連立イメージ積分方程式

#### 3.1 周期イメージグリーン関数

一樣媒質  $j$  中  $(x_s, z_s)$  に単位線波源を置くと、対応するグリーン関数  $G_j$  は非斉次ヘルムホルツ方程式

$$(\nabla^2 + k_j^2)G_j(x, z; x_s, z_s) = -\delta(x - x_s)\delta(z - z_s) \quad (45)$$

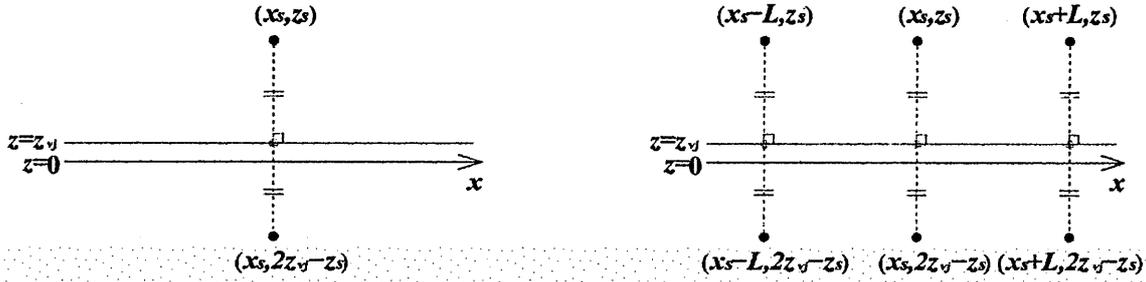
の特殊解として得られる。ここで、 $\delta(\cdot)$  はディラックデルタである。(45) より外向き放射条件を満たす解として

$$G_j(x, z; x_s, z_s) = \frac{i}{4\pi} H_0^{(1)}(k_j \sqrt{(x - x_s)^2 + (z - z_s)^2}) \quad (46)$$

が導かれる。 $H_0^{(1)}(\alpha)$  は 0 次の第一種ハンケル関数である。グリーン関数  $G_j$  は影理論の一次励振 (6) に対応しないため、イメージグリーン関数  $G_j^{(IM)}$  を二つのグリーン関数の和としてのダイポール構成

$$G_j^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}) \equiv G_j(x, z; x_s, z_s) - G_j(x, z; x_s, 2z_{vj} - z_s) \quad (47)$$

として導入すれば一次励振に対応付け出来る (図 7(a))。(47) の右辺第二項は対称点  $(x_s, z_{vj})$  ( $z_{vj} \neq z_s$ ) に対する第一項の鏡像である。このようなダイポール構成は平面  $z = z_{vj}$  上で場の量を零にするため、一次励振 (6) のレベルシフト  $z = z_{vj}$  に対応したグリーン関数になっている。言うまでもなく、線波源を複数 (あるいは可算無限個) 設定した非斉次ヘルムホルツ方程式は (45) の線形結合の形で書け、その解はグリーン関数の線形結合で書け



(a)  $(x_s, z_{vj})$  を対称点とするイメージグリーン関数 (b)  $z = z_{vj}$  を対称面とする周期イメージグリーン関数

図 7 イメージグリーン関数と周期イメージグリーン関数

る。そこで、グリーン関数あるいはイメージグリーン関数の線形結合としての周期フーリエ変換 [13](付録参照) による特別な無限和  $G_{pj}, G_{pj}^{(IM)}$  を

$$G_{pj}(x, z; x_s, z_s | p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{impL} G_j(x, z; x_s + mL, z_s) \quad (48)$$

$$G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj} | p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{impL} G_j^{(IM)}(x, z; x_s + mL, z_s; z_{vj}) \quad (49)$$

として定義する。(49) に対応する非斉次ヘルムホルツ方程式は

$$(\nabla^2 + k_j^2) G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj} | p) = -\{\delta(z - z_s) - \delta(z - (2z_{vj} - z_s))\} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{impL} \delta(x - x_s - mk_L) \quad (50)$$

である。 $e^{-ipx} G_{pj}, e^{-ipx} G_{pj}^{(IM)}$  は  $x$  に関して周期  $L$  の  $p$ -周期関数となるため、よく知られるように  $G_{pj}$  は (伝統的な) 周期グリーン関数 (periodic Green's function) と呼ばれる。同じく、 $G_{pj}^{(IM)}$  を周期イメージグリーン関数 (periodic image Green's function) と呼ぶことにする。更には  $G_{pj}, G_{pj}^{(IM)}$  は  $p$  に関して周期  $k_L$  の周期関数である。このような周期性から周期イメージグリーン関数  $G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj} | p)$  は従来の周期グリーン関数  $G_{pj}(x, z; x_s, z_s | p)$  を平面  $z = z_{vj}$  を対称面とする鏡像と合わせて作るとも言える (図 7(b))。 (48), (49) は空間的表現であり、対応するスペクトル表現は

$$G_{pj}(x, z; x_s, z_s | p) = \frac{i}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(p+mk_L)(x-x_s)} \frac{e^{i\beta_j(p+mk_L)|z-z_s|}}{\beta_j(p+mk_L)} \quad (51)$$

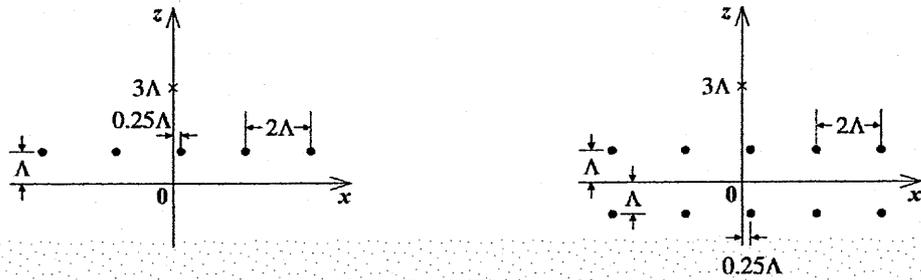
$$G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj} | p) = \frac{i}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(p+mk_L)(x-x_s)} \frac{e^{i\beta_j(p+mk_L)|z-z_s|} - e^{i\beta_j(p+mk_L)|z+z_s-2z_{vj}|}}{\beta_j(p+mk_L)} \quad (52)$$

で与えられる。スペクトル表現から明らかのように (伝統的な) 周期グリーン関数 (51) は伝搬因子が零  $\beta_j(p+mk_L) = 0$  となる '臨界波数' (critical wavenumber)

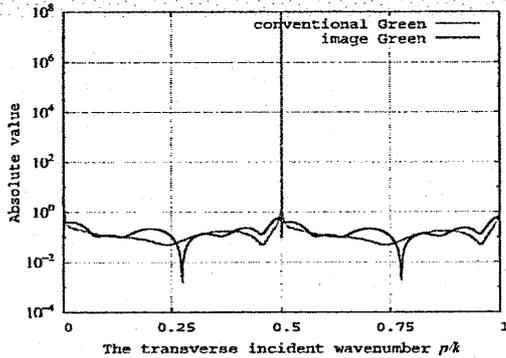
$$p = p_{j\pm}^{[m]} \equiv \pm k_j - mk_L \quad (53)$$

で発散する。別の言い方では、 $m$  次の反射回折波あるいは透過回折波の横方向波数が無損失媒質 1 あるいは 2 でのレーリー波数  $\pm k_1, \pm k_2$  に一致するときに全空間で周期グリーン関数が発散する。(53) を満たす入射を '臨界入射' (critical incidence) と呼ぶことにする。無損失媒質中の '臨界入射' では周期グリーン関数 (51) (及び (48)) は破綻するため以降の解析が出来なくなる、と言うよりも従来の周期グリーン関数による積分方程式が成立しなくなることに注意されたい。これは明白な従来法の欠点<sup>†</sup>であるが、奇妙なことに我々が知る限り指摘されていない。一方、臨界入射に対しても周期イメージグリーン関数 (52) (及び (49)) は (個別の波源位置  $(x, z) \neq (x_s + mL, z_s), (x_s + mL, 2z_{vj} - z_s)$ )

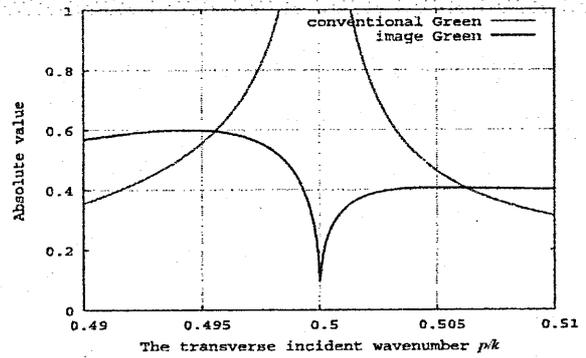
<sup>†</sup> 透過側媒質  $j_2$  が損失媒質の場合は、実  $p$  入射に関しては伝搬因子  $\beta_{j_2}(p+mk_L)$  の分岐点と一致せず幸にはならないので、対応する (伝統的な) 周期グリーン関数 (51) は発散しない。その場合でも入射側は無損失媒質とするから '臨界入射' の問題からは逃れられない。



(a) 波源の配置と観測点の関係



(b)  $G_{p1}(0, 3\Lambda; 0.25\Lambda, \Lambda|p)$  と  $G_{p1}^{(IM)}(0, 3\Lambda; 0.25\Lambda, \Lambda; 0|p)$  の比較



(c) (b) の  $p/k_1 = 0.5$  近傍の拡大図

図 8 周期グリーン関数  $G_{p1}$  と周期イメージグリーン関数  $G_{p1}^{(IM)}$  の  $p$ -特性数値例

( $m = 0, \pm 1, \dots$ ) を除いては) 有限である。  $p$  の関数として考えると、  $G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}|p)$  は  $p = p_{j\pm}^{[m]}$  で連続ではあるものの伝搬因子群  $\beta_j(p + mk_L)$  ( $j = 1, 2, m = 0, \pm 1, \dots$ ) の分岐点の特異性により微分可能ではないことを指摘しておきたい (cf. 図 4)。 図 8 に周期グリーン関数  $G_{p1}(0, 3\Lambda; 0.25\Lambda, \Lambda|p)$  と周期イメージグリーン関数  $G_{p1}^{(IM)}(0, 3\Lambda; 0.25\Lambda, \Lambda; 0|p)$  の比較 ( $k_1 = k, L = 2\Lambda, k_1L = 4\pi$ ) を示す。 このパラメータでは  $p/k$  について  $k_L/k = 0.5$  の周期関数となる。 臨界波数  $p/k = 0, 0.5, 1$  において周期グリーン関数は発散するが周期イメージグリーン関数は有限値をとる。 また臨界波数における周期イメージグリーン関数は鋭く尖ったディップを示し、明らかに連続ではあるものの微分可能ではない分岐点の特異性を継承することが分かる。

### 3.2 連立イメージ積分方程式

ここでは入射側媒質  $j_1$  ( $j_1 = 1, 2$ ) からの入射として議論しよう。  $\chi$  を任意の実数として固定する時、一周期分の閉区間  $[\chi, \chi + L]$  を考える。 周期イメージグリーン関数を構成する波源  $(x_s, z_s)$  ( $\chi < x_s < \chi + L$ ) に対し、図 9 に示す曲線  $C_j (= A_j B_j C_j D_j A_j)$  で囲まれる閉領域  $S_j$  を考える。  $h_j$  は  $h_1 > \sigma_h \geq f(x_s), h_2 < \sigma_L \leq f(x_s)$  を満たす定数にとっておく。 一方、  $z_{vj}$  は周期イメージグリーン関数を作る際の対称面の位置であるが、通常は

$$z_{v1} < \sigma_L, z_{v2} > \sigma_h \quad (54)$$

を満たす定数にとればよい。 厳密には  $z_{v1} < f(x_s) < z_{v2}$  を満たせばよいので、一般性を持たせた対称面として  $x_s$  の依存性を付加して

$$z_{vj} = z_{vj}(x_s) \quad (j = 1, 2) \quad (55)$$

として報告 [12] を一般化して議論しよう。 以下単に  $z_{vj}$  と書くときは (54) の定数の意味にとるものとする。  $z_{vj}(x_s)$  に要求される条件は

$$z_{vj}(x_s + L) = z_{vj}(x_s) \quad -\infty < z_{v1}(x_s) < f(x_s) < z_{v2}(x_s) < \infty \quad (56)$$

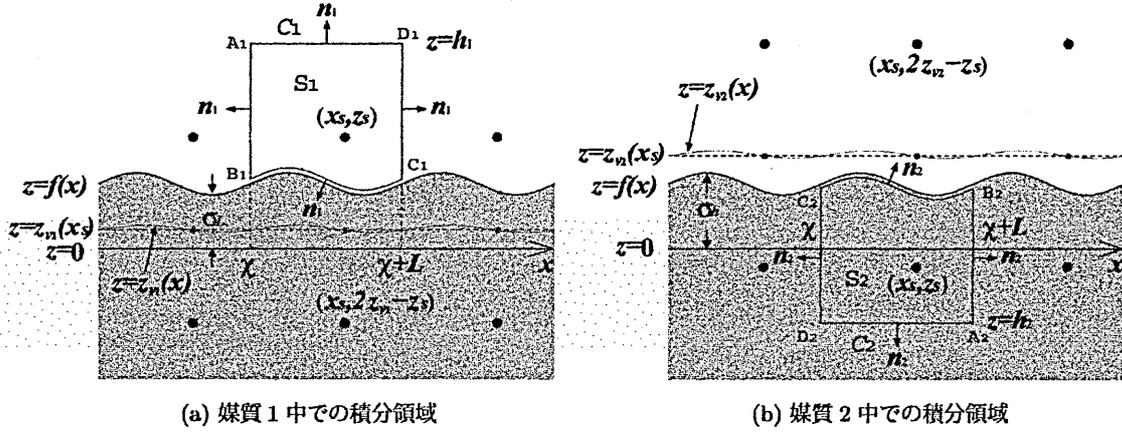


図9 各媒質中でのグリーンの定理のための積分領域設定

のみである<sup>†</sup>。このような閉領域  $S_j$  中の (固定した) 波源  $(x_s, z_s)$  を参照点として考え、ヘルムホルツ方程式 (9) の解  $\psi_{jj1}$  と非斉次ヘルムホルツ方程式 (50) の解  $G_{pj}^{(IM)}$  ( $j=1,2$ ) に対しグリーンの定理を適用する。

$$\iint_{S_j} \nabla \cdot \{G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p) \nabla \psi_{jj1}(x, z) - \psi_{jj1}(x, z) \nabla G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p)\} dS_j$$

$$= \oint_{C_j} \left\{ G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p) \frac{\partial}{\partial n_j} \psi_{jj1}(x, z) - \psi_{jj1}(x, z) \frac{\partial}{\partial n_j} G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p) \right\} dl_j \quad (57)$$

ここで、 $dS_j$  は  $S_j$  の面要素、 $dl_j$  は  $C_j$  の線要素である。(50) を用いて (57) の左辺を評価すれば、領域  $S_j$  の波源は位置  $(x_s, z_s)$  の波源のみであり、その対応する位置  $(x_s, 2z_{vj}(x_s) - z_s)$  の鏡像波源は無関係であるから

$$\iint_{S_j} \nabla \cdot \{G_{pj}^{(IM)} \nabla \psi_{jj1} - \psi_{jj1} \nabla G_{pj}^{(IM)}\} dS_j = \psi_{jj1}(x_s, z_s)$$

を得る。次に (57) の右辺の線積分を考える、 $\psi_{jj1} \frac{\partial}{\partial n_j} G_{pj}^{(IM)}$ 、 $G_{pj}^{(IM)} \frac{\partial}{\partial n_j} \psi_{jj1}$  が  $x$  について周期  $L$  の周期関数となることから、二つの縦の直線経路  $\overline{A_j B_j}, \overline{C_j D_j}$  上の積分は互いにキャンセルする。よって、(57) の右辺は

$$\oint_{C_j} \left\{ G_{pj}^{(IM)} \frac{\partial}{\partial n_j} \psi_{jj1} - \psi_{jj1} \frac{\partial}{\partial n_j} G_{pj}^{(IM)} \right\} dl_j$$

$$= \int_{\overline{B_j C_j}} \left\{ G_{pj}^{(IM)} \frac{\partial}{\partial n_j} \psi_{jj1} - \psi_{jj1} \frac{\partial}{\partial n_j} G_{pj}^{(IM)} \right\} dl_j + \int_{\overline{D_j A_j}} \left\{ G_{pj}^{(IM)} \frac{\partial}{\partial n_j} \psi_{jj1} - \psi_{jj1} \frac{\partial}{\partial n_j} G_{pj}^{(IM)} \right\} \Big|_{z=h_j} dl_j$$

になる。更に横の直線経路  $\overline{D_j A_j}$  上の積分を評価すれば

$$\int_{\overline{D_j A_j}} \left\{ G_{pj}^{(IM)} \frac{\partial}{\partial n_j} \psi_{jj1} - \psi_{jj1} \frac{\partial}{\partial n_j} G_{pj}^{(IM)} \right\} \Big|_{z=h_j} dl_j = \begin{cases} \delta_{1j1} \psi_1^e(x_s, z_s - z_{v1}(x_s)) e^{-i\beta_1(p)z_{v1}(x_s)} & (j_1=1) \\ \delta_{2j1} \psi_2^e(x_s, z_s - z_{v2}(x_s)) e^{i\beta_2(p)z_{v2}(x_s)} & (j_1=2) \end{cases}$$

を得る。ただし、 $\delta_{mn}$  はクロネッカーデルタ  $\delta_{mn} = 1 (m=n), = 0 (m \neq n)$  である。以上をまとめるとイメージ表現 (image representation)

$$\psi_{1j1}(x_s, z_s) = \delta_{1j1} \psi_1^e(x_s, z_s - z_1(x_s)) e^{-i\beta_1(p)z_{v1}(x_s)}$$

$$+ \int_{\chi}^{\chi+L} \left\{ G_{p1}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{v1}(x_s)|p) \frac{\partial}{\partial n_1} \psi_{1j1}(x, z) \right. \\ \left. - \psi_{1j1}(x, z) \frac{\partial}{\partial n_1} G_{p1}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{v1}(x_s)|p) \right\} \Big|_{z=f(x)+0} \tau(x) dx \quad (58)$$

<sup>†</sup> 設定の自由度があるから、物理的解釈や数値計算の意味で有利なように決めればよい。なお、区分的連続関数も許される。本報告では関係ないが、完全導体周期表面への TE 波入射に対する第二種イメージ積分方程式は別期イメージグリーン関数の参照点  $(x_s, f(x_s))$  での法線微分を必要とするため  $C^1$ -級であることが要求される。

$$\begin{aligned} \psi_{2j_1}(x_s, z_s) &= \delta_{2j_1} \psi_2^e(x_s, z_s - z_{v2}(x_s)) e^{i\beta_2(p)z_{v2}(x_s)} \\ &+ \int_x^{x+L} \left\{ G_{p2}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{v2}(x_s)|p) \frac{\partial}{\partial n_2} \psi_{2j_1}(x, z) \right. \\ &\quad \left. - \psi_{2j_1}(x, z) \frac{\partial}{\partial n_2} G_{p2}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{v2}(x_s)|p) \right\} \Big|_{z=f(x)-0} \tau(x) dx \end{aligned} \quad (59)$$

が得られる。(58)あるいは(59)の右辺第一項はレベルシフト  $z = z_{v1}(x_s)$  あるいは  $z = z_{v2}(x_s)$  に対応した一次励振を表す。各々の媒質において参照点  $(x_s, z_s)$  を境界に近づける極限:  $z_s \rightarrow f(x_s) + 0$  (媒質1側)、 $z_s \rightarrow f(x_s) - 0$  (媒質2側) をとり、周期イメージグリーン関数  $G_{pj}^{(IM)}, \frac{\partial}{\partial n_j} G_{pj}^{(IM)}$  の  $x = x_s, z = z_s$  での可積分特異性を評価すれば

$$\begin{aligned} &\delta_{1j_1} \psi_1^e(x_s, f(x_s) - z_{v1}(x_s)) e^{-i\beta_1(p)z_{v1}(x_s)} \\ &= \frac{1}{2} \psi_{1j_1}(x_s, f(x_s)) - \text{p.v.} \int_x^{x+L} \left\{ G_{p1}^{(IM)}(x, f(x); x_s, z_s; z_{v1}(x_s)|p) \frac{\partial}{\partial n_1} \psi_{1j_1}(x, f(x)) \right. \\ &\quad \left. - \psi_{1j_1}(x, f(x)) \frac{\partial}{\partial n_1} G_{p1}^{(IM)}(x, f(x); x_s, z_s; z_{v1}(x_s)|p) \right\} \Big|_{z_s \rightarrow f(x_s) + 0} \tau(x) dx \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} &\delta_{2j_1} \psi_2^e(x_s, f(x_s) - z_{v2}(x_s)) e^{i\beta_2(p)z_{v2}(x_s)} \\ &= \frac{1}{2} \psi_{2j_1}(x_s, f(x_s)) - \text{p.v.} \int_x^{x+L} \left\{ G_{p2}^{(IM)}(x, f(x); x_s, z_s; z_{v2}(x_s)|p) \frac{\partial}{\partial n_2} \psi_{2j_1}(x, f(x)) \right. \\ &\quad \left. - \psi_{2j_1}(x, f(x)) \frac{\partial}{\partial n_2} G_{p2}^{(IM)}(x, f(x); x_s, z_s; z_{v2}(x_s)|p) \right\} \Big|_{z_s \rightarrow f(x_s) - 0} \tau(x) dx \end{aligned} \quad (61)$$

を得る。ここで、p.v. $\int$  は主値積分を表す。影理論では一次励振が散乱を引き起こすと考えるため、未知境界値のとり得る形は

$$\psi_{jj_1}(x, f(x)) = \frac{2\beta_{j_1}(p)}{k_{j_1}} e^{-ipx} \xi_j(x|p) \quad (62)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_j} \psi_{jj_1}(x, f(x)) = \frac{2\beta_{j_1}(p)}{k_{j_1}} e^{-ipx} \eta_j(x|p) \frac{1}{\tau(x)} \quad (63)$$

となり、実効的に  $\xi_j(x|p)$  と  $\eta_j(x|p)$  は TE 波入射時は境界での磁流と電流、TM 波入射時は境界での電流と磁流に関連する量を表す。境界値  $\xi_j(x|p), \eta_j(x|p)$  も  $x$  について周期  $L$  の周期関数である。境界条件 (10)-(11) と (12) より

$$\xi_2(x|p) = \xi_1(x|p), \quad \eta_2(x|p) = -\gamma_{21} \eta_1(x|p) \quad (64)$$

となるので、(6)-(8), (60)-(64) を用いることで、連立イメージ積分方程式 (simultaneous image integral equations, SIIIE) を得る。

$$-\int_x^{x+L} \{g_1(x, x_s|p) \eta_1(x|p) - g_{n1}(x, x_s|p) \xi_1(x|p)\} dx + \frac{1}{2} \xi_1(x_s|p) = \delta_{1j_1} v_1^e(f(x_s) - z_{v1}(x_s)) e^{-i\beta_1(p)z_{v1}(x_s)} \quad (65)$$

$$\int_x^{x+L} \{\gamma_{21} g_2(x, x_s|p) \eta_1(x|p) + g_{n2}(x, x_s|p) \xi_1(x|p)\} dx + \frac{1}{2} \xi_1(x_s|p) = \delta_{2j_1} v_2^e(f(x_s) - z_{v2}(x_s)) e^{i\beta_2(p)z_{v2}(x_s)} \quad (66)$$

ここで、積分核は

$$g_j(x, x_s|p) \equiv e^{-ip(x-x_s)} G_{pj}^{(IM)}(x, f(x); x_s, f(x_s); z_{vj}(x_s)|p) \quad (67)$$

$$g_{nj}(x, x_s|p) \equiv \tau(x) e^{-ip(x-x_s)} \frac{\partial}{\partial n_j} G_{pj}^{(IM)}(x, f(x); x_s, f(x_s); z_{vj}(x_s)|p) \quad (68)$$

となる。これらは

$$\begin{aligned} g_j(x+L, x_s|p) &= g_j(x, x_s|p), \quad g_{nj}(x+L, x_s|p) = g_{nj}(x, x_s|p) \\ g_j(x, x_s+L|p) &= g_j(x, x_s|p), \quad g_{nj}(x, x_s+L|p) = g_{nj}(x, x_s|p) \end{aligned}$$

を満たすため  $x$  あるいは  $x_s$  に関する周期  $L$  の周期関数となる。導出過程から明らかなように連立イメージ積分方程式は透過側の媒質損失の有無には無関係に成立する。

(62)-(63) 及び連立イメージ積分方程式 (65)-(66) を解けば、境界値  $\xi_1, \eta_1$  が得られる。なお、数学的には境界値  $\xi_1, \eta_1$  は対称面  $z = z_{vj}(x_s)$  の取り方には依存しないことを改めて指摘しておく。適当な対称面  $z = z_{vj}(x_s)$  設定とイメージ表現 (58)-(59) を用いることで任意の参照点  $(x_s, z_s)$  における波動場  $\psi_{jj_1}(x_s, z_s)$  が得られる。

境界値  $\xi_1(x|p), \eta_1(x|p)$  を  $p$  の関数として見直してみよう。グリーンの定理から導かれた連立イメージ積分方程式 (65)-(66) は、積分核  $g_j(x, x_s; z_{vj}|p), g_{nj}(x, x_s; z_{vj}|p)$  の構成要素である周期イメージグリーン関数が内蔵する伝搬因子群  $\beta_j(p + lk_L)$  ( $l = 0, \pm 1, \dots$ ) の存在のため、実  $p$ -軸上で分岐点  $p = p_{j\pm}^{[l]}$  ( $l = 0, \pm 1, \dots$ ) の特異性を持ち、'臨界波数'  $p = p_{j\pm}^{[l]}$  で連続ではあるものの微分可能でない性質を有する (図 7)。一方、励振項は伝搬因子  $\beta_{j_1}(p)$  のみを持ち、入射側分岐点  $p = \pm k_{j_1}$  を除いては実  $p$ -軸上で微分可能である。このため厳密な連立イメージ積分方程式において、一般には境界値  $\xi_1(x|p), \eta_1(x|p)$  自体が  $p = p_{j\pm}^{[l]}$  ( $l = 0, \pm 1, \dots$ ) での積分核の特異性を打ち消すような特異性を継承せねばならない。よって  $\xi_1(x|p), \eta_1(x|p)$  は、'臨界波数'  $p = p_{j\pm}^{[l]}$  ( $l = 0, \pm 1, \dots$ ) において実  $p$ -軸上で連続ではあるものの微分可能でない性質を備えることになる。

**ハイブリッド型連立イメージ積分方程式** イメージ積分方程式の導出過程から分かるように、透過側の積分方程式では'臨界波数'での発散の問題が無ければ周期イメージグリーン関数は必須ではない。例えば、 $p$  が'臨界波数'(およびその近傍)でない場合や透過側媒質  $j_2$  が損失媒質である場合は従来の周期グリーン関数を用いることに理論上(及び後の数値解析上)ならん問題は無い。その場合は (65)-(66) における透過側の積分核  $g_{j_2}, g_{nj_2}$  を

$$g_{j_2}(x, x_s|p) \rightarrow e^{-ip(x-x_s)} G_{pj_2}(x, f(x); x_s, f(x_s)|p) \quad (69)$$

$$g_{nj_2}(x, x_s|p) \rightarrow \tau(x) e^{-ip(x-x_s)} \frac{\partial}{\partial n_{j_2}} G_{pj_2}(x, f(x); x_s, f(x_s)|p) \quad (70)$$

と置き換えれば入射側は周期イメージグリーン関数を、透過側は周期グリーン関数を用いたハイブリッド型連立イメージ積分方程式となる。なお、入射側の積分方程式で'臨界波数'の発散のことを無視して周期グリーン関数を用いる場合は、励振項を

$$v_1^e(f(x_s) - z_{v1}(x_s)) e^{-i\beta_1(p)z_{v1}(x_s)} \rightarrow \frac{k_1}{2\beta_1(p)} e^{-i\beta_1(p)f(x_s)}, v_2^e(f(x_s) - z_{v2}(x_s)) e^{i\beta_2(p)z_{v2}(x_s)} \rightarrow -\frac{k_2}{2\beta_2(p)} e^{i\beta_2(p)f(x_s)} \quad (71)$$

とし、積分核  $g_{j_1}, g_{nj_1}$  を

$$g_{j_1}(x, x_s|p) \rightarrow e^{-ip(x-x_s)} G_{pj_1}(x, f(x); x_s, f(x_s)|p) \quad (72)$$

$$g_{nj_1}(x, x_s|p) \rightarrow \tau(x) e^{-ip(x-x_s)} \frac{\partial}{\partial n_{j_1}} G_{pj_1}(x, f(x); x_s, f(x_s)|p) \quad (73)$$

に変更する。しかしながら、この従来型の積分方程式は'臨界波数'で破綻する。

### 3.3 散乱因子

境界値  $\xi_1, \eta_1$  から散乱因子  $S_n^{[jj_1]}(p)$  を求めておけば、外部領域  $z \geq \sigma_h$  あるいは  $z \leq \sigma_L$  においては (8) とレーリー表現 (15)-(16) を用いてイメージ表現よりも簡単に波動場  $\psi_{jj_1}$  が得られる。平面でない一般的な対称面  $z = z_{vj}(x_s)$  からはレーリー表現に移行しないため、対称面  $z = z_{vj}$  は  $x_s$  に依存しない定数 (54) を採用する。(4)-(8), (15)-(16), (52), (58)-(59) から  $S_n^{[jj_1]}(p)$  の復元公式 (recovery formula) が得られる。

$$\begin{aligned} S_n^{[jj_1]}(p) &= e^{-i\beta_1(p+nk_L)z_{v1}} \frac{1}{L} \int_x^{x+L} e^{ink_L x} \left[ f_1(x) \operatorname{sinc}(\beta_1(p+nk_L)f_1(x)) \eta_1(x|p) \right. \\ &\quad \left. - \{i f_1(x) f_1'(x) (p+nk_L) \operatorname{sinc}(\beta_1(p+nk_L)f_1(x)) - \cos(\beta_1(p+nk_L)f_1(x))\} \xi_1(x|p) \right] dx \\ &\quad + \delta_{1j_1} \delta_{n0} v_1^e(-z_{v1}) e^{-i\beta_1(p)z_{v1}} \end{aligned} \quad (74)$$

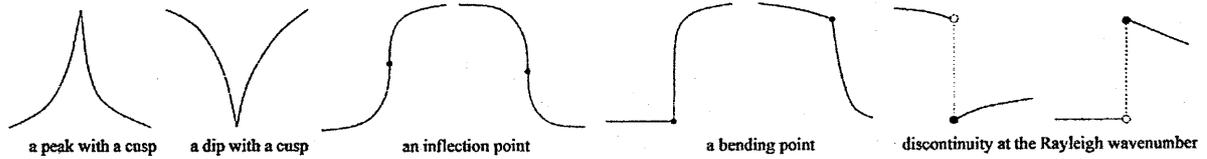


図 10 回折効率  $p$ -特性上での伝搬因子の分岐点の特異性発現形態

$$\begin{aligned}
 S_n^{[2j_1]}(p) = & e^{i\beta_2(p+nk_L)z_{v2}} \frac{1}{L} \int_x^{x+L} e^{ink_L x} \left[ -\gamma_{21} f_2(x) \operatorname{sinc}(\beta_2(p+nk_L)f_2(x)) \eta_1(x|p) \right. \\
 & \left. + \{i f_2(x) f'(x)(p+nk_L) \operatorname{sinc}(\beta_2(p+nk_L)f_2(x)) + \cos(\beta_2(p+nk_L)f_2(x))\} \xi_1(x|p) \right] dx \\
 & + \delta_{2j_1} \delta_{n0} v_2^e(-z_{v2}) e^{i\beta_2(p)z_{v2}}
 \end{aligned} \quad (75)$$

が得られる。ただし、ここで

$$f_1(x) \equiv f(x) - z_{v1}, \quad f_2(x) \equiv z_{v2} - f(x) \quad (76)$$

とおいた。 $S_0^{[j_1]}(p)$  の第二項目は平面  $z=0$  による一次励振から、レベルシフトした対称面  $z=z_{vj}$  を用いたことによる補正項である。この意味では、入射側媒質 1 のときは  $\sigma_L > 0$  として平面  $z_{v1}=0$  を、入射側媒質 2 のときは  $\sigma_h < 0$  として平面  $z_{v2}=0$  を使用出来るように周期境界  $z=f(x)$  を最初から選択しておく方が簡便ではある。散乱因子  $S_n^{[j_1]}(p)$  を  $p$  の関数として見ると、境界値の性質から同じく、'臨界波数'  $p=p_{j\pm}^{[l]}$  ( $l=0, \pm 1, \dots$ ) において実  $p$ -軸上で連続ではあるものの微分可能でない性質を備えることになる。これは散乱因子が少なくとも図 4 のように実  $p$ -軸上で分岐点の特異性を継承することを意味する。

次に (33)-(37) で与える回折効率  $\eta_{R_n}^{[j]}(p), \eta_{T_n}^{[j]}(p)$  を  $p$  の関数として見直してみよう。実  $p$ -軸上で見るとき'水平入射'  $p=\pm k_{j_1}$  において不連続であることに加えて、'臨界波数'  $p=p_{j\pm}^{[l]}$  ( $l=0, \pm 1, \dots$ ) では散乱因子の解析性から、連続ではあるものの微分可能でない性質を継承する。これは、 $p$ -特性として尖った先端としてのカusp (cusp) を伴うピークやディップ、( $p$  に関する微係数無限大の) 変曲点 (inflection point)、折れ曲がり点 (bending point)、あるいはレーリー波数での不連続として例えば図 10 のように発現することが予想される。従来のほとんど全ての研究ではこれらは数値計算例としての提示はあるものの、特に明示的に指摘されて来なかったことを指摘しておきたい。これまでの、厳密解法である周期グリーン関数による積分方程式が'臨界波数'において無効となることが要因で数学的な正当性が崩れてしまっていた。一方、'臨界波数'においても発散しない周期イメージグリーン関数からなる厳密な連立イメージ積分方程式の導入により、散乱因子の'臨界波数'での振舞いについて初めて数学的な正当性が保証されたと結論付けできる。

## 4 求積法による連立イメージ積分方程式の数値解法

連立イメージ積分方程式は外形としては、完全導体周期表面に対する TE, TM 波入射に対する第二種型イメージ積分方程式 [8, 9] と TE 波入射に対する第一種型イメージ積分方程式 [11] のハイブリッド構成となっている。よってそれらの解析に用いた求積法を適用することで連立イメージ積分方程式を数値的に解く。以下の議論では一般性を失うこと無く  $\chi=0$  とする。

### 4.1 周期イメージグリーン関数の数値計算

積分核 (67)-(68) の計算に周期境界  $z=f(x)$  上の周期イメージグリーン関数  $G_{pj}^{(IM)}(x, f(x); x_s, f(x_s); z_{vj}(x_s)|p)$  及びその法線微分  $\frac{\partial}{\partial n_j} G_{pj}^{(IM)}(x, f(x); x_s, f(x_s); z_{vj}(x_s)|p)$  が必要になる。従来の周期グリーン関数自体、その数値計算にコストを要するのは周知のことであり周期グリーン関数が提案されて以降様々なアプローチにより計算されて来た [1, 4, 18]。周期イメージグリーン関数の計算においては、周期グリーン関数の計算アプローチがある程

度利用できる面もあるものの最適なアルゴリズムの確定には未だ至っていない。ここでは、現時点でのアプローチを示す。

$G_{pj}^{(IM)}$  の計算 周期イメージグリーン関数  $G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p)$  のスペクトル表示は (52) に既に示してある。空間的表示については (46), (49) より

$$G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p) = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{impL} \{ H_0^{(1)}(k_j \sqrt{(x - mL - x_s)^2 + (z - z_s)^2}) - H_0^{(1)}(k_j \sqrt{(x - mL - x_s)^2 + (2z_{vj}(x_s) - (z + z_s))^2}) \} \quad (77)$$

を示しておく。z-方向の差が大きい  $k_j|z - z_s| \geq \delta_z$  時は、スペクトル表現 (52) は無限和における指数因子  $e^{i\beta_j(\cdot)}$  により  $|m| \rightarrow \infty$  について指数関数的に急速に収束することが期待できるので、十分大きな  $|m|$  に対する有限和はよい近似を与える。収束判定は適当な閾値  $\delta_m > 0$  に対し (52) の有限和の更新による判定時毎に相対誤差が  $\delta_m$  以下となるまで計算すればよい。ここで定数  $\delta_z, \delta_m$  は数値的なテストにより決める。一方、z-方向の差が小さい  $k_j|z - z_s| < \delta_z$  時は、スペクトル表現 (52) は無限和の収束が遅いため数値計算に有効ではない。そこで論文 [4] で示された積分アプローチを空間的表現 (77) に応用する。まずは (77) をハンケル関数の有限和と二つの半無限和の三つに分ける。

$$G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p) = G_{Mj}^+(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s), M|p) + G_{Mj}^-(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s), M|p) + G_{Mj}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s), M|p) \quad (78)$$

ここで

$$G_{Mj}^{\pm}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s), M|p) = \frac{i}{4} \sum_{m=\pm(M+1)}^{\pm\infty} e^{ipmL} \{ H_0^{(1)}(k_j \sqrt{(x - mL - x_s)^2 + (z - z_s)^2}) - H_0^{(1)}(k_j \sqrt{(x - mL - x_s)^2 + (2z_{vj}(x_s) - (z + z_s))^2}) \} \quad (79)$$

$$G_{Mj}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s), M|p) = \frac{i}{4} \sum_{m=-M}^M e^{ipmL} \{ H_0^{(1)}(k_j \sqrt{(x - x_s - mL)^2 + (z - z_s)^2}) - H_0^{(1)}(k_j \sqrt{(x - x_s - mL)^2 + (2z_{vj}(x_s) - (z + z_s))^2}) \} \quad (80)$$

M は非負整数である<sup>†</sup>。ハンケル関数の有限和においてはハンケル関数の引数が大きいたまには適宜それに応じた漸近展開を用いることで数値計算負荷を低減可能である。次に半無限和は次の積分表現に解析できる。

$$G_{Mj}^{\pm}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s), M|p) = \frac{1}{\pi} e^{\mp ik_j(x-x_s)} e^{i(M+1)(k_j \pm p)L} \int_0^{\infty} e^{-k_j \{(M+1)L \mp (x-x_s)\} \alpha^2} F_j^{\pm}(\alpha; z, z_s; z_{vj}(x_s)) d\alpha \quad (81)$$

$$F_j^{\pm}(\alpha; z, z_s; z_v(x_s)) = \frac{\cos(k_j|z - z_s| \alpha \sqrt{\alpha^2 - 2i}) - \cos(k_j|2z_{vj}(x_s) - (z + z_s)| \alpha \sqrt{\alpha^2 - 2i})}{(1 - e^{i(k_j \pm p)L - k_j L \alpha^2}) \sqrt{\alpha^2 - 2i}} \quad (82)$$

閉区間  $[0, L]$  を考えるとき、 $G_{Mj}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s), M|p)$  は  $x = x_s, z = z_s$  においてハンケル関数による可積分特異性を持つため、求積法の適用においては注意が必要である。一方、 $M \geq 1$  での  $G_{Mj}^{\pm}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s), M|p)$  は考え得る如何なる状況下でも  $x$  についても連続 (かつ滑らか) な関数であり<sup>‡</sup>、求積法の適用自体に特に問題は無い。(81) の数値積分は相対誤差  $\delta_M > 0$  を設定して精度判定する。しかしながら、 $k_j|z - z_s|$  が小さい場合で分子の鏡像項での  $k_j|2z_{vj}(x_s) - (z + z_s)|$  は同様に小さいとは限らない。特に周期境界のピークピーク値が大きい場合は  $k_j|2z_{vj}(x_s) - (z + z_s)| > \delta_z$  となることがあり、このとき  $\alpha$  が増加する際の被積分関数  $F_j^{\pm}$  は、分子の鏡像項  $\cos(k_j|2z_{vj}(x_s) - (z + z_s)| \alpha \sqrt{\alpha^2 - 2i})$  により非常に大きい振幅を伴って振動する。これにより (81) を高精

<sup>†</sup>論文 [4] は  $M = 0$  とした場合の周期グリーン関数の計算になっている。

<sup>‡</sup>臨界波数  $p = p_{\pm}^{[m]}$  に対して鏡像項が無い従来の周期グリーン関数では、対応する被積分関数は下端  $\alpha = 0$  で可積分ではなくなり積分は発散する。これはスペクトル表現での伝達因子による明示的な発散に対応する空間的表現での発散である。一方、周期イメージグリーン関数では鏡像項  $\cos(k_j|2z_{vj}(x_s) - (z + z_s)| \alpha \sqrt{\alpha^2 - 2i})$  により有限値となり積分は存在する。

度に数値積分することが困難になる。そこで数値積分の精度が確保出来るように適切な  $M$  を設定し、指数因子  $e^{-k_j\{(M+1)L\pm(x-x_s)\}\alpha^2}$  により十分に  $F_j^\pm$  の振動を抑制する。この場合、ハンケル関数の有限和  $G_{Mj}$  の数値計算負荷は大きくならざるを得ない。

実際には、 $k_j|z-z_s| < \delta_z$  の条件下かつ' 臨界波数' 近傍でない:  $|\beta_j(p+mk_L)|/k_j > \delta_\beta$  (i.e.  $|p+mk_L| \neq k_j$ ) 場合の数値計算には次のようにする。周期イメージグリーン関数を二つの周期グリーン関数に分けて

$$G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p) = G_{pj}(x, z; x_s, z_s|p) - G_{pj}(x, z; x_s, 2z_{vj}(x_s) - z_s|p) \quad (83)$$

第一項の周期グリーン関数を  $M=1$  とした積分アプローチ ((82) の分子の鏡像項が無い場合) で計算する。第二項の鏡像部分は、可積分特異性は発現せずかつ殆ど全ての場合で  $k_j|2z_{vj}(x_s) - (z+z_s)| > \delta_z$  が成り立つと考えられるので、スペクトル表現 (51) を用いて計算する。このようにすれば CPU 時間の低減が期待できる。定数  $\delta_M, \delta_\beta$  も数値的なテストにより決める。

$\frac{\partial}{\partial n_j} G_{pj}^{(IM)}$  の計算 文献 [1,18] の作法に従う。スペクトル表現 (52) の  $z=f(x)$  上での法線微分  $\frac{\partial}{\partial n_1}$  をとり ( $\frac{\partial}{\partial n_2}$  については符号反転すればよい)、 $|m| \rightarrow \infty$  に対する漸近形  $\beta_j(p+mk_L) \simeq i|m|k_L$  を考慮することで無限和を書き直すと、 $x \neq x_s$  もしくは  $z \neq z_s$  の時

$$\begin{aligned} & \tau(x) \frac{\partial}{\partial n_1} G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p) \\ &= \frac{i}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(p+mk_L)(x-x_s)} \left[ \frac{i(p+mk_L)f'(x) \frac{e^{i\beta_j(p+mk_L)|z-z_s|} - e^{i\beta_j(p+mk_L)|2z_{vj}(x_s)-(z+z_s)|}}{\beta_j(p+mk_L)} \right. \\ & \quad \left. - is e^{i\beta_j(p+mk_L)|z-z_s|} + it e^{i\beta_j(p+mk_L)|2z_{vj}(x_s)-(z+z_s)|} \right. \\ & \quad \left. - \{ \text{sign}(m)f'(x) - is \} e^{-|m|k_L|z-z_s|} + \{ \text{sign}(m)f'(x) - it \} e^{-|m|k_L|2z_{vj}(x_s)-(z+z_s)|} \right] \\ & \quad + \frac{i}{2L} e^{ip(x-x_s)} \left[ \frac{f'(x) - is}{e^{k_L(|z-z_s|-i(x-x_s))} - 1} - \frac{f'(x) + is}{e^{k_L(|z-z_s|+i(x-x_s))} - 1} - is \right. \\ & \quad \left. - \frac{f'(x) - it}{e^{k_L(|2z_{vj}(x_s)-(z+z_s)|-i(x-x_s))} - 1} + \frac{f'(x) + it}{e^{k_L(|2z_{vj}(x_s)-(z+z_s)|+i(x-x_s))} - 1} + it \right] \quad (84) \end{aligned}$$

$$s = \text{sign}(z - z_s), \quad t = \text{sign}(2z_{vj}(x_s) - (z + z_s)) (\neq 0) \quad (85)$$

を得る。ただし、 $\text{sign}(\alpha)$  は符号関数

$$\text{sign}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha = 0 \\ -1 & \alpha < 0 \end{cases} \quad (86)$$

である。 $x=x_s$  かつ  $z=z_s$  の場合は以下を用いる。

$$\begin{aligned} & \tau(x) \frac{\partial}{\partial n_1} G_p^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p) \Big|_{x=x_s, z=z_s} \\ &= \frac{i}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \left\{ i(p+mk_L)f'(x_s) \frac{1 - e^{2i\beta_j(p+mk_L)|z_{vj}(x_s)-z_s|}}{\beta_j(p+mk_L)} - \text{sign}(m)f'(x_s)(1 - e^{-2|m|k_L|z_{vj}(x_s)-z_s|}) \right\} \right. \\ & \quad \left. - it(e^{2i\beta_j(p+mk_L)|z_v-z_s|} - e^{-2|m|k_L|z_{vj}(x_s)-z_s|}) \right] + \frac{-f''(x_s)}{4\pi\{1+(f'(x_s))^2\}} - i \frac{pf'(x_s)}{2\pi} \\ & \quad + \frac{i}{2L} \left[ \frac{2it}{e^{2k_L|z_{vj}(x_s)-z_s|} - 1} + it \right] \quad (87) \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial n_1} G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p)$  は  $x=x_s$  においても連続であり (cf. 文献 [1,18])、求積法の適用に特に問題は無い。元のスペクトル表現の無限和が  $O(1/m)$  の収束性を持つのに対し、(84) や (87) は  $O(1/m^2)$  の収束性であるため比較的高速に数値計算できる。これらの収束判定は (52) の有限和計算と同じく相対誤差が閾値  $\delta_m$  を下まわるまでとする。

## 4.2 求積法による連立イメージ積分方程式の数値解析

連立イメージ積分方程式 (65)-(66) に求積法を適用するため閉区間  $[0, L]$  を  $x_j$  ( $1 \leq j \leq N$ ) をサンプリング点とする  $N$  個の部分区間  $[x_j, x_{j+1}]$  に分割する。サンプリングは次の不等間隔とする。

$$0 \equiv x_1 < \dots < x_j < \dots < x_N < x_{N+1} \equiv L \quad (88)$$

積分核  $g_j(x, x_s; z_{vj}(x_s)|p)$  は  $x = x_s$  に可積分特異性を持つため、求積法の重み計算では拡張台形公式 [19] を適用する。そこで未知境界値  $\eta_l(x|p)$  が部分区間  $[x_j, x_{j+1}]$  上で次の線形補間でよく近似できると仮定する。

$$\eta_l(x|p) \approx \frac{\eta_l(x_{j+1}|p)(x - x_j) + \eta_l(x_j|p)(x_{j+1} - x)}{x_{j+1} - x_j} \quad (89)$$

これを (65)-(66) に適用すると重みが得られる。一方、積分核  $g_{nj}(x, x_s; z_{vj}(x_s)|p)$  は  $x = x_s$  で連続であることから、特に必要でなければ CPU 時間低減のため求積法の重み計算では古典的な台形公式を適用する。また境界値の周期性:  $\xi_1(L|p) = \xi_1(0|p), \eta_1(L|p) = \eta_1(0|p)$  を考慮すればサンプリング点  $x = x_{N+1} = L$  は不要になる。このため提案する求積法は  $[0, L]$  に対する求積法となり、次の  $2N$  次元行列方程式が得られる。

$$Db = e \quad (90)$$

ここで行列  $D = \{D_{lm}\}$  は

$$\begin{aligned} D_{lm} &= \Delta_{1lm}^{(1)}, D_{l,N+m} = \Delta_{1lm}^{(2)} \\ D_{l+N,m} &= \Delta_{2lm}^{(1)}, D_{l+N,N+m} = \Delta_{2lm}^{(2)} \quad (1 \leq l, m \leq N) \end{aligned} \quad (91)$$

与えられ境界値ベクトル  $b$  と励振ベクトル  $e$  は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} b &= [\eta_1(x_1|p), \dots, \eta_1(x_N|p), \xi_1(x_1|p), \dots, \xi_1(x_N|p)]^t \\ e &= \begin{cases} [-v_1^e(f(x_1) - z_{v1}(x_1))e^{-i\beta_1(p)z_{v1}(x_1)}, \dots, -v_1^e(f(x_N) - z_{v1}(x_N))e^{-i\beta_1(p)z_{v1}(x_N)}, 0, \dots, 0]^t & (\text{入射側媒質 1}) \\ [0, \dots, 0, -v_2^e(f(x_1) - z_{v2}(x_1))e^{i\beta_2(p)z_{v2}(x_1)}, \dots, -v_2^e(f(x_N) - z_{v2}(x_N))e^{i\beta_2(p)z_{v2}(x_N)}]^t & (\text{入射側媒質 2}) \end{cases} \end{aligned} \quad (92)$$

$^t$  は転置を表す。ここで重み  $\Delta_{jlm}^{(1)}, \Delta_{jlm}^{(2)}$  ( $j = 1, 2, 1 \leq l, m \leq N$ ) は以下で与える。

$$\Delta_{j1l}^{(1)} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} g_j(x, x_l; z_{vj}(x_l)|p)(x_2 - x)dx + \frac{1}{x_{N+1} - x_N} \int_{x_N}^{x_{N+1}} g_j(x, x_l; z_{vj}(x_l)|p)(x - x_N)dx \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{jlm}^{(1)} &= \frac{1}{x_m - x_{m-1}} \int_{x_{m-1}}^{x_m} g_j(x, x_l; z_{vj}(x_l)|p)(x - x_{m-1})dx \\ &\quad + \frac{1}{x_{m+1} - x_m} \int_{x_m}^{x_{m+1}} g_j(x, x_l; z_{vj}(x_l)|p)(x_{m+1} - x)dx \quad (2 \leq m \leq N) \end{aligned} \quad (94)$$

$$\Delta_{1l}^{(2)} = \{\delta_{1l} + (x_2 - x_1 + x_{N+1} - x_N)g_{nj}(x_1, x_l; z_{vj}(x_s)|p)\}/2 \quad (95)$$

$$\Delta_{jlm}^{(2)} = \{\delta_{lm} + (x_{m+1} - x_{m-1})g_{nj}(x_m, x_l; z_{vj}(x_s)|p)\}/2 \quad (2 \leq m \leq N) \quad (96)$$

## 5 数値計算

### 5.1 計算パラメータ

本報告では、周期境界として非対称関数

$$f(x) = \sigma \{ \cos(k_L x) - \sin(2k_L x) + 2 \} \quad (97)$$

を用い、パラメータは

$$\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, L = 1.1\lambda, \sigma = 0.3\lambda \quad (98)$$

に設定する。このとき  $\sigma_h \approx 0.79765\Lambda$ ,  $\sigma_L \approx 0.050875\Lambda$  となるため、対称面を  $z_{v1} = 0, z_{v2} = \sigma_h + \sigma_L \approx 0.84853\Lambda$  とする。透過側相反性の確認のため TE, TM 波を媒質 1 側からの入射と媒質 2 側から入射を計算する。p-特性を計算する範囲は  $-3k \leq p \leq 3k$  とする。このとき計算範囲内の臨界波数は媒質 1 側の 14 個:

$$\begin{aligned} p_{1-}^{[-4]} &= 2.63636363636364k, p_{1-}^{[-3]} = 1.72727272727273k, p_{1+}^{[-2]} = 2.81818181818182k \\ p_{1-}^{[-2]} &= 0.818181818181818k, p_{1+}^{[-1]} = 1.90909090909091k, p_{1-}^{[-1]} = -0.09090909090909k \\ p_{1+}^{[0]} &= k_1 = k, p_{1-}^{[0]} = -k_1 = k, p_{1+}^{[1]} = 0.09090909090909k, p_{1-}^{[1]} = -1.90909090909091k \\ p_{1+}^{[2]} &= -0.818181818181818k, p_{1-}^{[2]} = -2.81818181818182k, p_{1+}^{[3]} = -1.72727272727273k \\ p_{1+}^{[4]} &= -2.63636363636364k \end{aligned} \quad (99)$$

及び媒質 2 側の 14 個:

$$\begin{aligned} p_{2-}^{[-5]} &= 2.813403737885668k, p_{2-}^{[-4]} = 1.904312828794759k, p_{2-}^{[-3]} = 0.9952219197038497k \\ p_{2-}^{[-2]} &= 0.0861310106129408k, p_{2+}^{[-1]} = 2.641141716659786k, p_{2-}^{[-1]} = -0.8229598984779682k \\ p_{2+}^{[0]} &= k_2 = 1.732050807568877k, p_{2-}^{[0]} = -k_2 = -1.732050807568877k \\ p_{2+}^{[1]} &= 0.8229598984779682k, p_{2-}^{[1]} = -2.641141716659786k, p_{2+}^{[2]} = -0.0861310106129408k \\ p_{2+}^{[3]} &= -0.9952219197038497k, p_{2-}^{[4]} = -1.904312828794759k, p_{2-}^{[5]} = -2.813403737885668k \end{aligned} \quad (100)$$

の合計 28 個存在する。ただし、両側で対になるような臨界波数 (例えば  $p_{1-}^{[-4]}$  と  $p_{2+}^{[-1]}$ ) は比較的近接しているため、後の数値計算結果の全体的な図示ではグラフ上の区別は困難である。その他の周期イメージグリーン関数計算と求積法に関わるパラメータは

$$\delta_z = 10^{-3}, \delta_m = 10^{-8}, \delta_\beta = 3.183 \times 10^{-4}, \delta_M = 10^{-5}, M = 65536, N = 300 \quad (101)$$

を指定する。(81) の数値積分には相対精度保証付き二重指数型公式を、重み (93)-(94) の数値積分には上限レベルを 16 とするロンバーグ積分を用いる。求積法のサンプリングでは等分分割を採用して行列方程式 (90) を解き、得られた境界値離散系列  $\xi_1(x_j|p), \eta_1(x_j|p)$  ( $1 \leq j \leq N$ ) からどちらも線形補間により  $[0, L]$  での境界値を算出する。これらを用いて復元公式 (74)-(75) から散乱因子  $S^{[jj]}$  を得るが、入射方向の相違を吸収するため外部領域でのレーリー表現 (15)-(16) を  $z = \sigma_h$  もしくは  $z = \sigma_L$  基準とした変形表現に書き換えておく。

$$\psi_{L1}(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^{[1j_1]}(p) e^{i\beta_1(p+nk_L)\sigma_h} \cdot e^{-ink_L x + i\beta_1(p+nk_L)(z-\sigma_h)} \quad (102)$$

$$\psi_{L2}(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^{[2j_1]}(p) e^{-i\beta_2(p+nk_L)\sigma_L} \cdot e^{-ink_L x - i\beta_2(p+nk_L)(z-\sigma_L)} \quad (103)$$

更には入射媒質中でのエバネッセント入射  $|p| > k_j$  ( $j = 1, 2$ ) となる場合のため  $\psi_1^1(x, \sigma_h) = 1$  あるいは  $\psi_2^1(x, \sigma_L) = 1$  を満たすように入射波振幅を

$$\begin{aligned} e^{-ipx - i\beta_1(p)(z-\sigma_h)} &= e^{i\beta_1(p)\sigma_h} \cdot e^{-ipx - i\beta_1(p)z} \\ e^{-ipx + i\beta_2(p)(z-\sigma_L)} &= e^{-i\beta_2(p)\sigma_L} \cdot e^{-ipx + i\beta_2(p)z} \end{aligned}$$

として正規化しておく。これらを踏まえ、散乱因子  $S_n^{[jj]}$  ( $j_1, j = 1, 2$ ) に対し正規化散乱因子  $U_n^{[j]}, V_n^{[j]}$

$$\begin{aligned} U_n^{[1]}(p) &= S_n^{[11]}(p) e^{i(\beta_1(p) + \beta_1(p+nk_L))\sigma_h}, V_n^{[1]}(p) = S_n^{[21]}(p) e^{i(\beta_1(p)\sigma_h - \beta_2(p+nk_L)\sigma_L)} \\ U_n^{[2]}(p) &= S_n^{[22]}(p) e^{-i(\beta_2(p) + \beta_2(p+nk_L))\sigma_L}, V_n^{[2]}(p) = S_n^{[12]}(p) e^{-i(\beta_2(p)\sigma_L - \beta_1(p+nk_L)\sigma_h)} \\ \bar{V}_n^{[2]}(p) &= \gamma_{21} k_1 k_2^{-1} V_n^{[2]}(p) \end{aligned} \quad (104)$$

を用いて散乱因子や回折効率を議論していく<sup>†</sup>。透過側の正規化散乱因子 (104) を用いると (26) の相似鏡映性は

$$\bar{V}_n^{[2]}(p) = V_n^{[1]}(-p - nk_L) \quad (n = 0, \pm 1, \dots) \quad (105)$$

として鏡映性の形に書ける。

<sup>†</sup>(104) を用いても回折効率は値不変である

## 5.2 実際の数値計算での工夫

**ロウ処理** 数値計算上の工夫を施しても周期グリーン関数と周期イメージグリーン関数の計算コストは共に CPU 時間の意味で小さくは無い。従って、計算精度を確保しつつ如何に求積法における参照回数を減らすかが重要である。積分核  $g_{nj}$  に関する重み  $\Delta_{jlm}^{(2)}$  の計算は 1 回だけ  $\frac{\partial}{\partial n} G_{pj}^{(IM)}$  を参照するのみであり演算負荷は小さい。一方、積分核  $g_j$  に関する重み  $\Delta_{jlm}^{(1)}$  の計算は (93),(94) の数値積分によるから  $G_p^{(IM)}$  の参照回数は少なくなく、特に  $x = x_s$  での可積分特異性を含む重み、具体的には  $l$  を固定するとき  $m = l, m = l-1 (l=1$  の時は  $m = N), m = l+1 (l = N$  の時は  $m = 1)$  となる三つの重みについて可積分特異性が関与するため、参照回数は多くなることが予想される。そこで特にそのような重みでは、周期イメージグリーン関数  $G_{pj}^{(IM)}$  を

$$G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p) = G_{cj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p) + G_{3j}(x; x_s) \quad (106)$$

$$G_{cj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p) \equiv G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}(x_s)|p) - G_{3j}(x; x_s) \quad (107)$$

$$\begin{aligned} G_{3j}(x; x_s) &= e^{-ipL} \{ \log(k_j |x - x_s + L|/2) - \gamma \} \\ &\quad + \{ \log(k_j |x - x_s|/2) - \gamma \} \\ &\quad + e^{ipL} \{ \log(k_j |x - x_s - L|/2) - \gamma \} \quad (\gamma = 0.577215664901532 \dots) \end{aligned} \quad (108)$$

と書き換え、 $G_{3j}$  に  $x = x_s$  での可積分特異性を代表させれば、重み計算で  $G_{pj}^{(IM)}$  とは無関係に可積分特異性を数値積分を評価できる。一方、 $G_{cj}^{(IM)}$  は  $x = x_s$  で理論的には連続な関数となるから、元の重み計算と比較すると、 $G_{pj}^{(IM)}$  の参照回数の抑制を期待できる。より実際的には、重み  $\Delta_{jlm}^{(1)}$  で  $l$  を固定して (i.e. 積分方程式で  $x_s$  を固定)  $m$  を振らせる (i.e. 積分方程式の積分変数  $x$  を動かす) ように処理するとき、 $G_{Mcj}$  ( $0 \leq x \leq L$ ) を必要点数  $\bar{N}$  だけ最初計算して保存しておき、重みの数値積分ではそのスプライン補間値を用いて、 $G_{pj}^{(IM)}$  を新たに計算しないで演算負荷を小さくする数値計算的な技巧を挙げておく (ロウ処理)。境界形状の依存性による可否と若干の計算精度低下があり得るものの数倍程度高速に計算でき得る。本報告では  $\bar{N} = N = 300$  として採用する。

**媒質 2 側からの入射** 媒質 1 側からの入射に対処する元々の計算コードに対して

$$\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2, \quad \mu_1 \leftrightarrow \mu_2 \quad (\text{媒質定数の交換}), \quad f(x) \leftrightarrow (\sigma_h + \sigma_L) - f(x) \quad (\text{周期境界の上下反転})$$

を施しかつ正規化散乱因子 (104) の適用 (と必要であれば入射波振幅の調整に伴う境界値の補正) により、媒質 2 側からの入射を同じ計算コードを用いて対処できる。本報告での数値計算でも採用している。

## 5.3 数値計算

使用計算機環境は CPU : Intel Core i7-2600 3.4GHz、MB:MSI P67A-C43、Memory:PC-1600 DDR3 4GB×4 による自作 PC において、OS:openSuSE 11.4 x86-64 下でのコンパイラ: Intel Fortran Ver.11.0.83 によるオブジェクトを実行する。なお、最適化のためのコンパイルオプションは `-r8 -O3 -ipo -no-prec-div -static -xO -axS -msse3 -inline all` を指定した。

**境界値** TE 波及び TM 波入射時の境界値  $|\eta_1(0|p)|, |\xi_1(0|p)|$  の  $p$ -特性を図 11 に示す。理論どおりに臨界波数 (99),(100) において伝搬因子の分岐点の特異性の継承としての尖った先端を持つピークやディップ、変曲点あるいは折れ曲がり点を伴う  $p$ -特性となることが確認できる。図 12 は媒質 2 側からの TM 波入射時の境界値の  $p = p_{1-}^{[-2]}, p_{2+}^{[1]}$  近傍の拡大図である。図 11 では判別困難な近接する二つの臨界波数での折れ曲がり方が明確に分かる。

<sup>†</sup>数値計算精度確保の意味では  $x = x_s$  の  $\epsilon$ -近傍を除いて桁落ちを考慮した処理をする必要がある。

**反射側散乱因子と透過側散乱因子** TE 波入射時の反射側散乱因子と透過側散乱因子の  $p$ -特性を図 13,14 に、同じく TM 波入射の  $p$ -特性を図 15,16 に示す。0 次を含めて全ての散乱因子が  $p$  の連続関数であることに注意されたい。TE 波と TM 波共に反射側散乱因子の  $nk_L/2$  での偶対称性と透過側散乱因子の  $nk_L/2$  での (相似) 鏡映対称性が理論どおりに発現している。また臨界波数 (99),(100) において伝搬因子の分岐点の特異性の継承としての尖った先端を持つピークやディップを伴う  $p$ -特性となることが確認できる。

**回折効率** 次に TE 波入射時の反射側回折効率、透過側回折効率及び規格化全反射電力と規格化全透過電力の  $p$ -特性を図 17 に TM 波のそれらを図 18 に示す。入射側レーリー波数  $p/k = \pm 1$  (媒質 1),  $p/k = \pm 1.7320508075689$  (媒質 2) における回折効率の不連続性が理論どおりに発現している。これらは規格化全反射電力や規格化全透過電力の意味でも生じることが分かる。また散乱因子の  $p$ -特性を反映し、回折効率も伝搬因子の分岐点の特異性の継承としての図 10 のようなカスプを持つピークやディップ、変曲点あるいは折れ曲がり点を伴う  $p$ -特性となることが確認できる。伝搬波入射に対する同媒質内の反射側回折効率  $|p|/k \leq 1$  (媒質 1),  $|p|/k \leq 1.7320508075689$  (媒質 2) については反射側媒質 (入射側媒質)  $nk_L/2$  での偶対称性が、同じく伝搬波入射に対する透過側回折効率については相互的に  $nk_L/2$  での鏡映対称性が発現している。これらを見やすくするため改めて図 19-24 に示しておく。

**誤差評価** 対数エネルギー誤差として

$$OPT_{err} \equiv \log_{10} \left| 1 - \left( \sum \eta_{R_n} + \sum \eta_{T_n} \right) \right| \quad (109)$$

を図 25 に示す。比較のため従来の周期イメージグリーン関数を用いた計算結果<sup>†</sup>も示しておく。全体としては概ね精度  $10^{-4} \sim 10^{-3}$  程度で光学定理が満たされている。従来の周期グリーン関数を用いた計算では臨界波数で破綻するため数値計算不可能である。図 25 からは、その近傍波数での解析精度が著しく低下していることが分かる。一方、周期イメージグリーン関数を用いた計算ではそのような波数に対しても良好なパフォーマンスが維持されることを示している。同じく相反性の誤差として規格化散乱因子について対数誤差を

$$U_{err} \equiv \log_{10} \left| \frac{U_n^{[j]}(p - nk_L/2) - U_n^{[j]}(-p - nk_L/2)}{U_n^{[j]}(p - nk_L/2) + U_n^{[j]}(-p - nk_L/2)} \right| \quad (j = 1, 2) \quad (110)$$

$$V_{err} \equiv \log_{10} \left| \frac{V_n^{[1]}(p - nk_L/2) - \bar{V}_n^{[2]}(-p - nk_L/2)}{V_n^{[1]}(p - nk_L/2) + \bar{V}_n^{[2]}(-p - nk_L/2)} \right| \quad (111)$$

とする。図 26 に  $n = 0$  の結果を示す。(110) は  $p = nk_L/2$  についての偶関数であるため  $p > 0$  と  $p < 0$  で媒質 1  $\rightarrow$  2 入射, 媒質 2  $\rightarrow$  1 入射を区別している。図 26 より反射側相反性は概ね精度  $10^{-5} \sim 10^{-4}$  で、透過側相反性は概ね精度  $10^{-4} \sim 10^{-3}$  で満たされている。

**CPU 時間** ロウ処理の有無による CPU 時間の相違を表 1 に示す。臨界波数  $p = p_{2+}^{[1]}$  では約 1000 倍、臨界波数以外では約 10 倍程度ロウ処理により高速化されていることが分かる。臨界波数 (及びその近傍波数) でのイメージグリーン関数の有限和の個数指定は  $M = 1024$  と  $65536$  では両者ほぼ精度は同等、処理速度としては前者の方が二倍程度速く計算されている。ロウ処理は周期境界 (97)-(98) に対しては非常に有効である。

## 6 むすび

本報告では、回折格子の理論の基礎部分関わる最新の知見に関して周期境界を持つ二層媒質からの平面波散乱回折において影理論から導かれる波動場の形及び相反定理と光学定理を議論し新たな散乱因子の相反性と対称性、ならびに回折効率の相反性と対称性を示した。このような系に対し、これまでの周期グリーン関数を用いた積分方程式の方法は厳密解法であるものの臨界波数に対して破綻する。新たに周期イメージグリーン関数を導入し、影理論とグリーン関数の定理から厳密な連立イメージ積分方程式を提示した。これは臨界波数に対しても破綻

<sup>†</sup> 連立イメージ積分方程式 (65)-(66) に対し周期グリーン関数による積分核と対応する励振項として (69)-(73) を用いた連立積分方程式を使用する。これは従来の周期グリーン関数による積分方程式の方法で形式的に影理論を適用した形になる。もちろん、臨界波数<sup>†</sup>で破綻する。

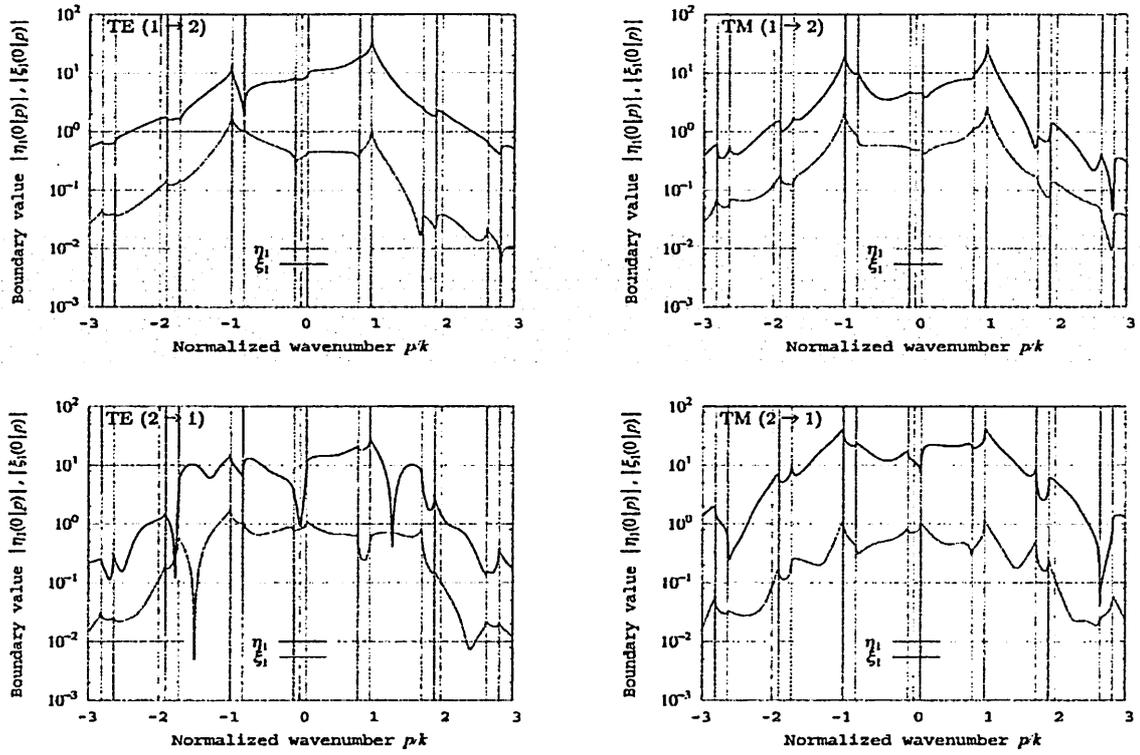


図 11 境界値の  $p$ -特性  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1$

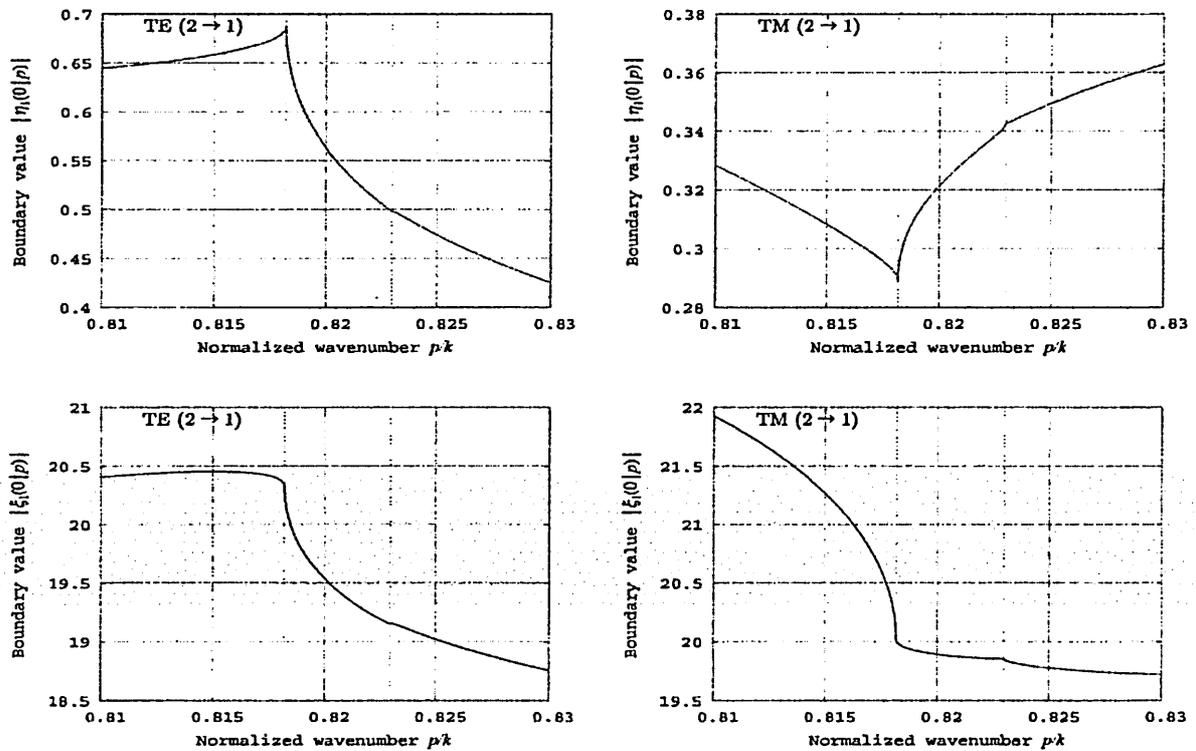


図 12 境界値の  $p$ -特性 (臨界波数近傍の拡大図)  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

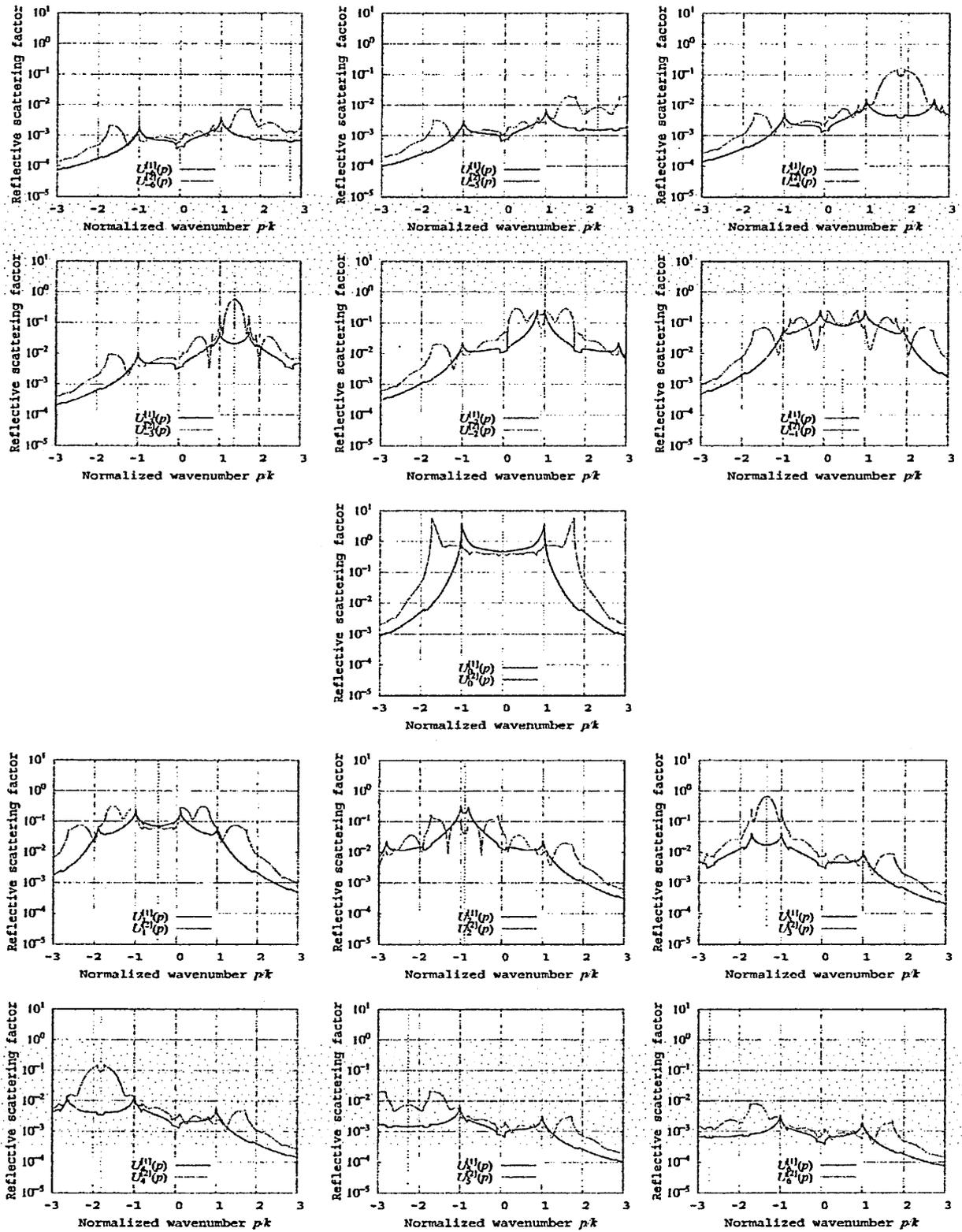


図 13 TE 反射側散乱因子の相反性 (偶対称性)  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

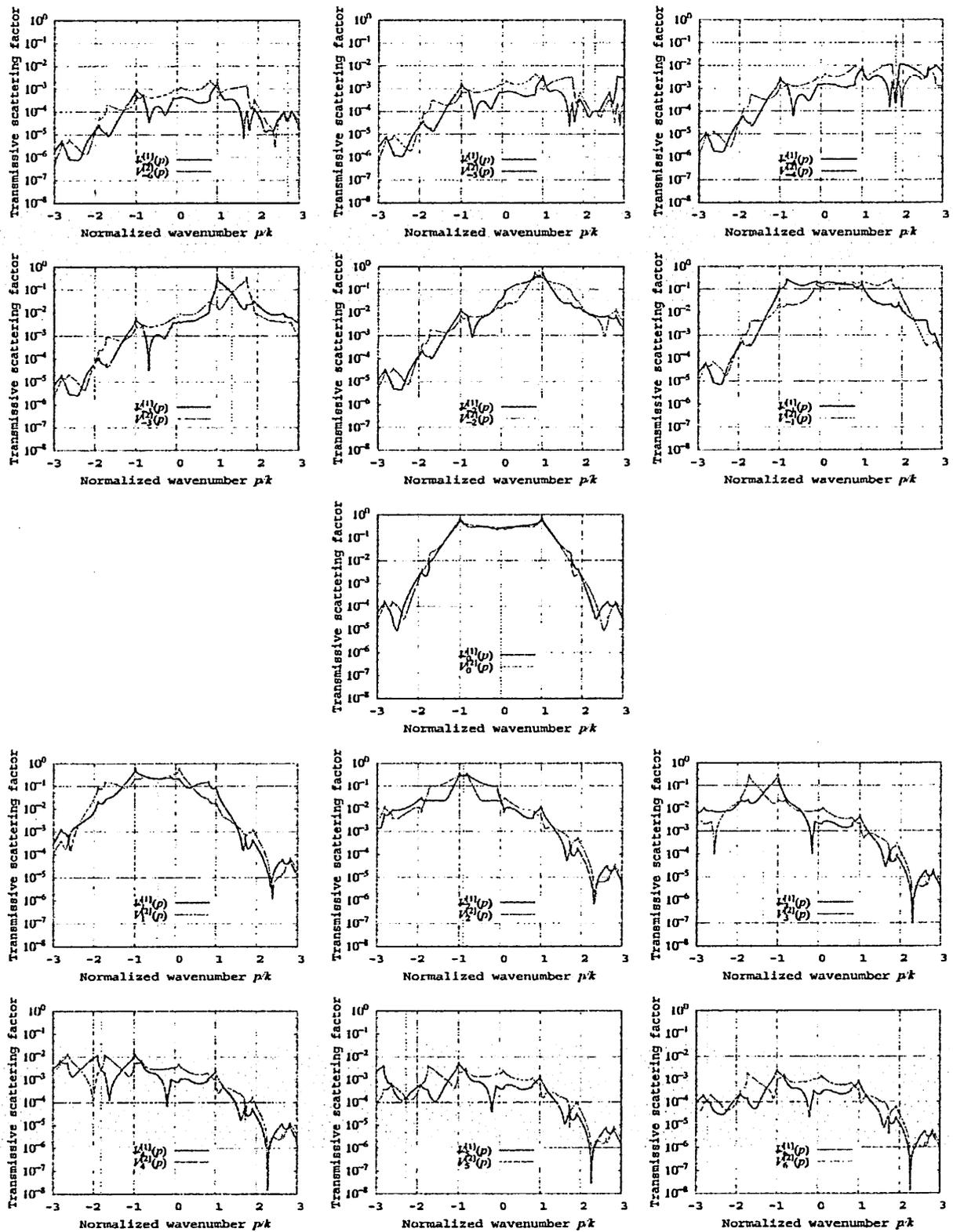


図 14 TE 透過側散乱因子の相反性 (相似鏡映性)  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

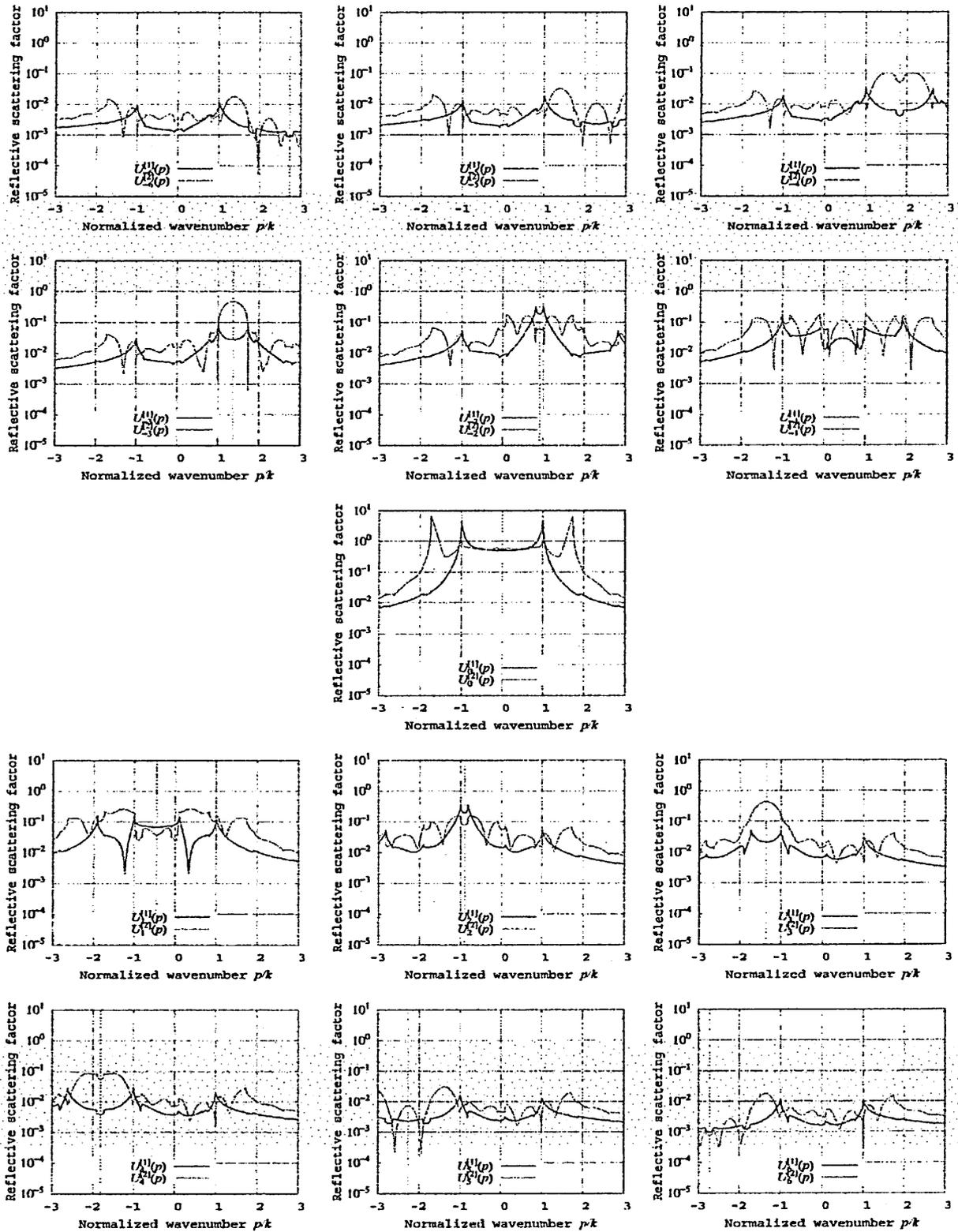


図 15 TM 反射側散乱因子の相反性 (偶対称性)  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

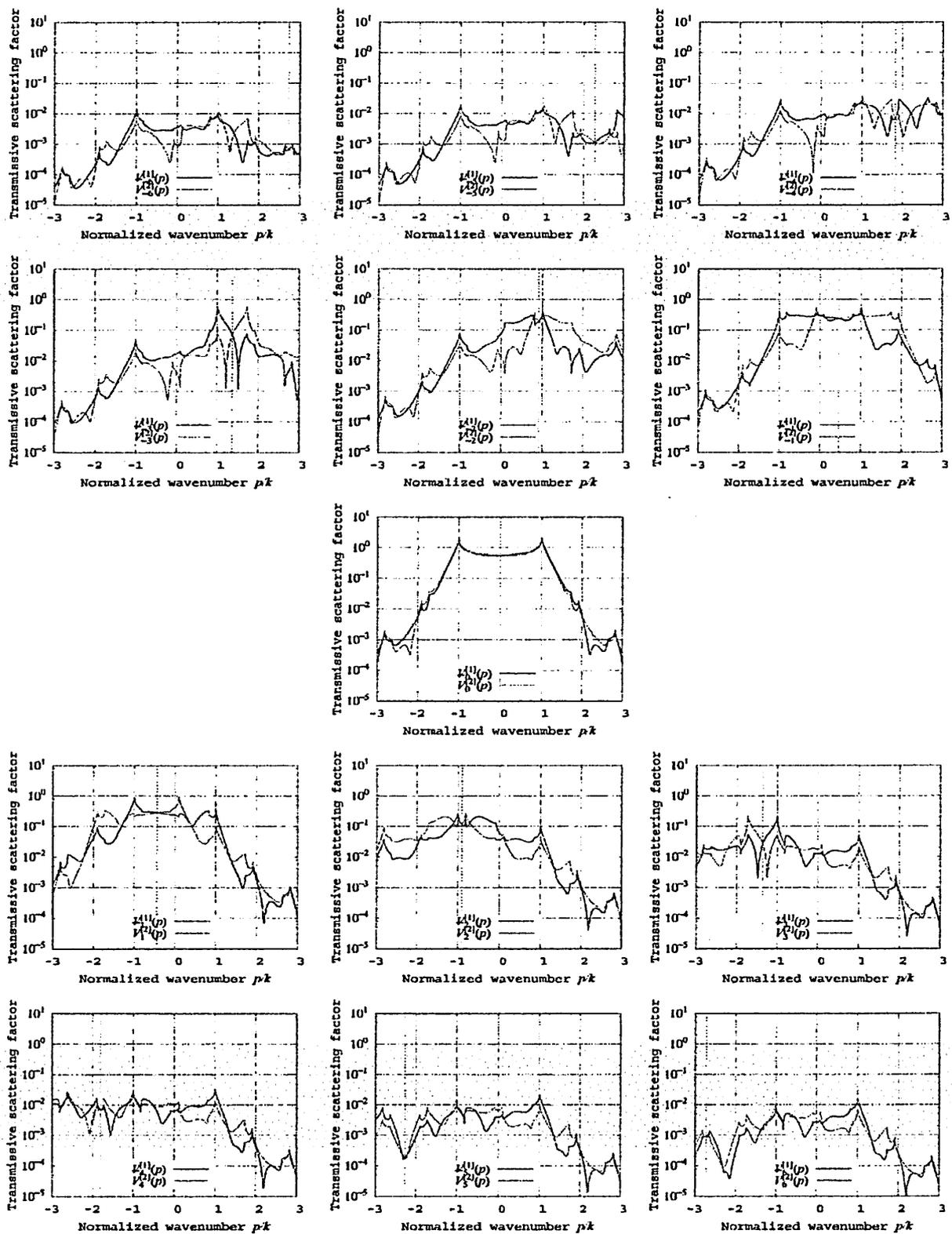


図 16 TM 透過側散乱因子の相反性 (相似鏡映性)  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

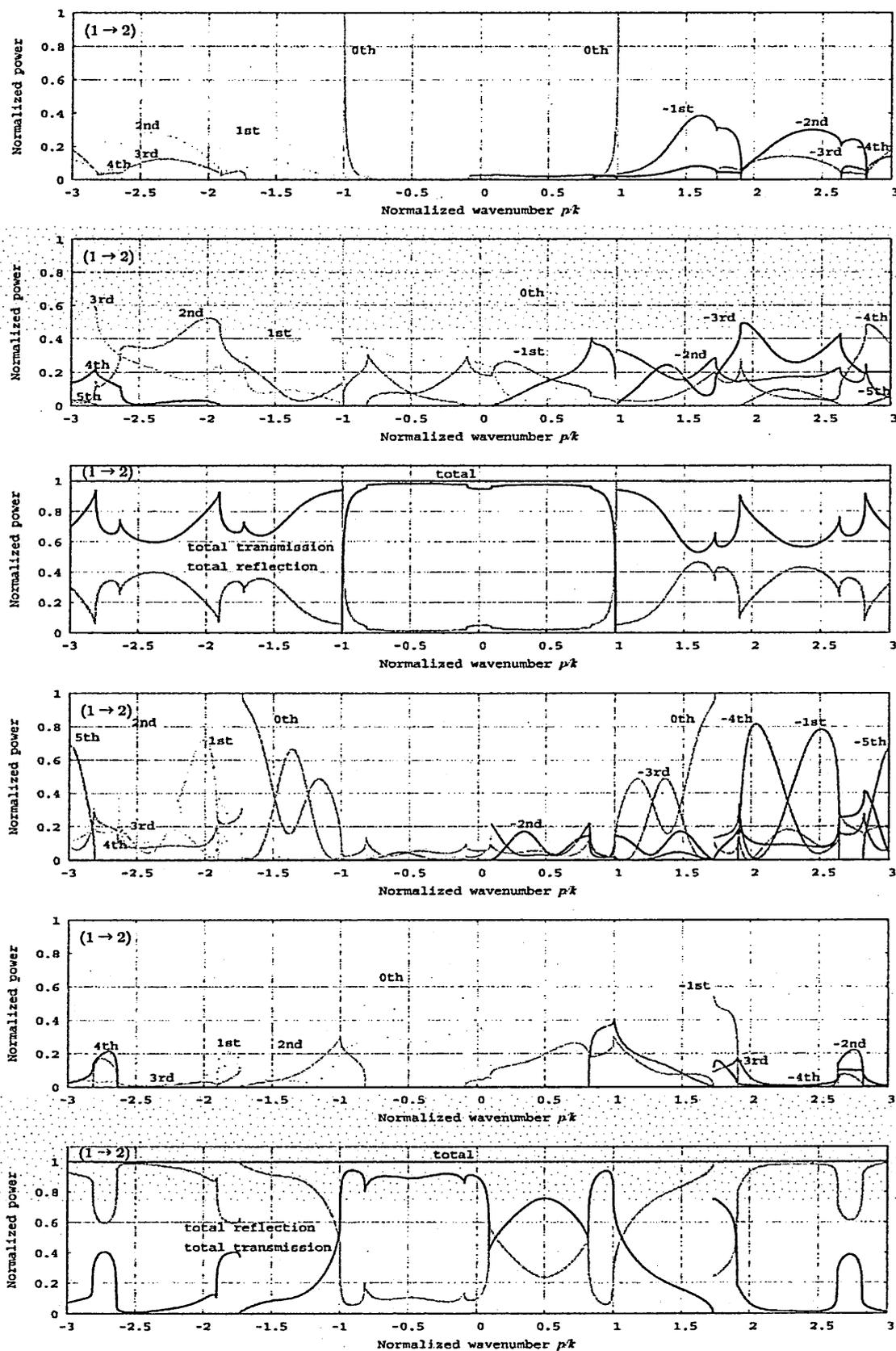


図 17 TE 回折効率の  $p$ -特性  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

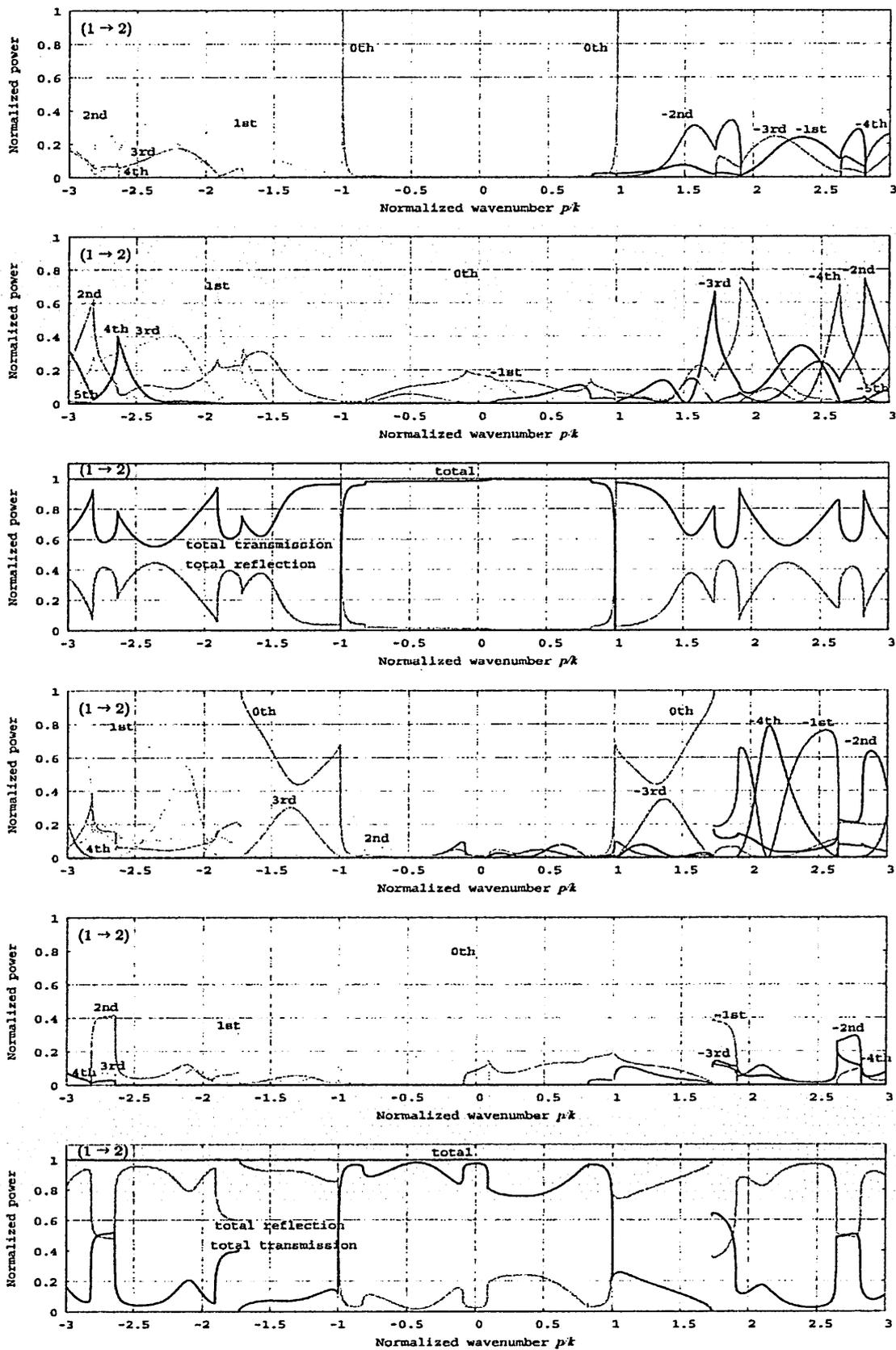


図 18 TM 回折効率の  $p$ -特性  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

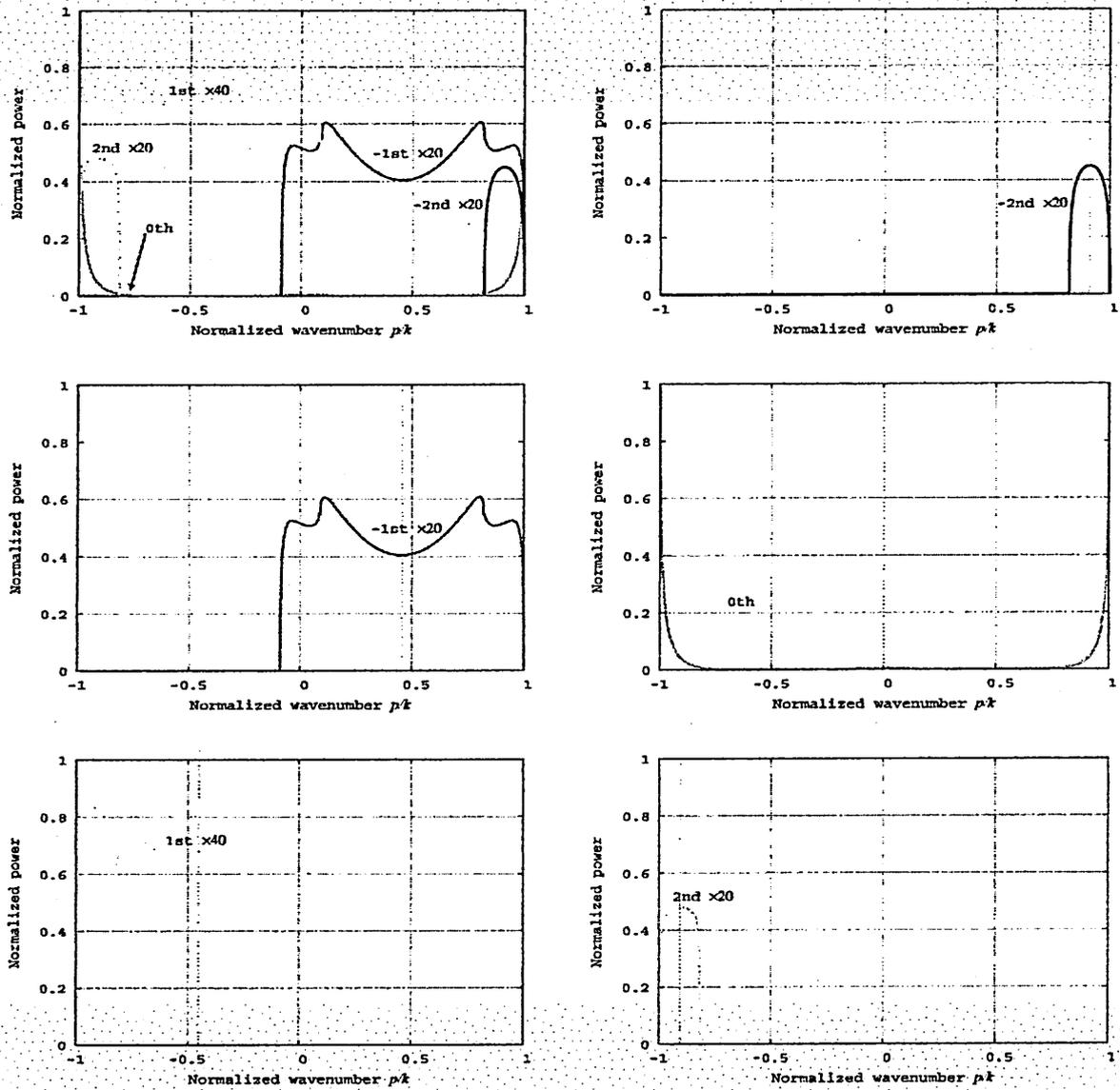


図 19 TE 波入射 (1 → 2) 反射回折効率の偶対称性  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

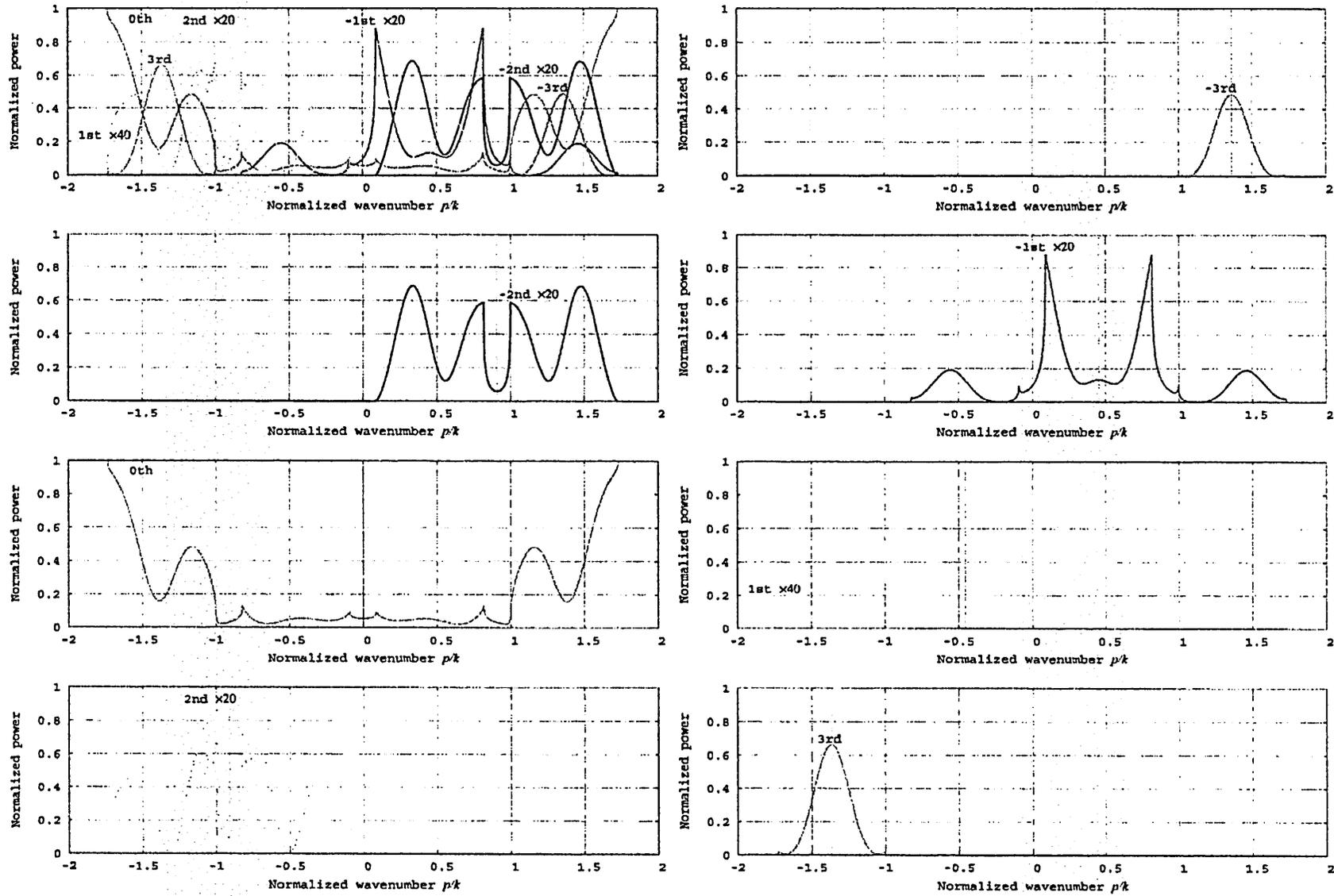


図 20 TE 波入射 ( $2 \rightarrow 1$ ) 反射回折効率の偶対称性  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

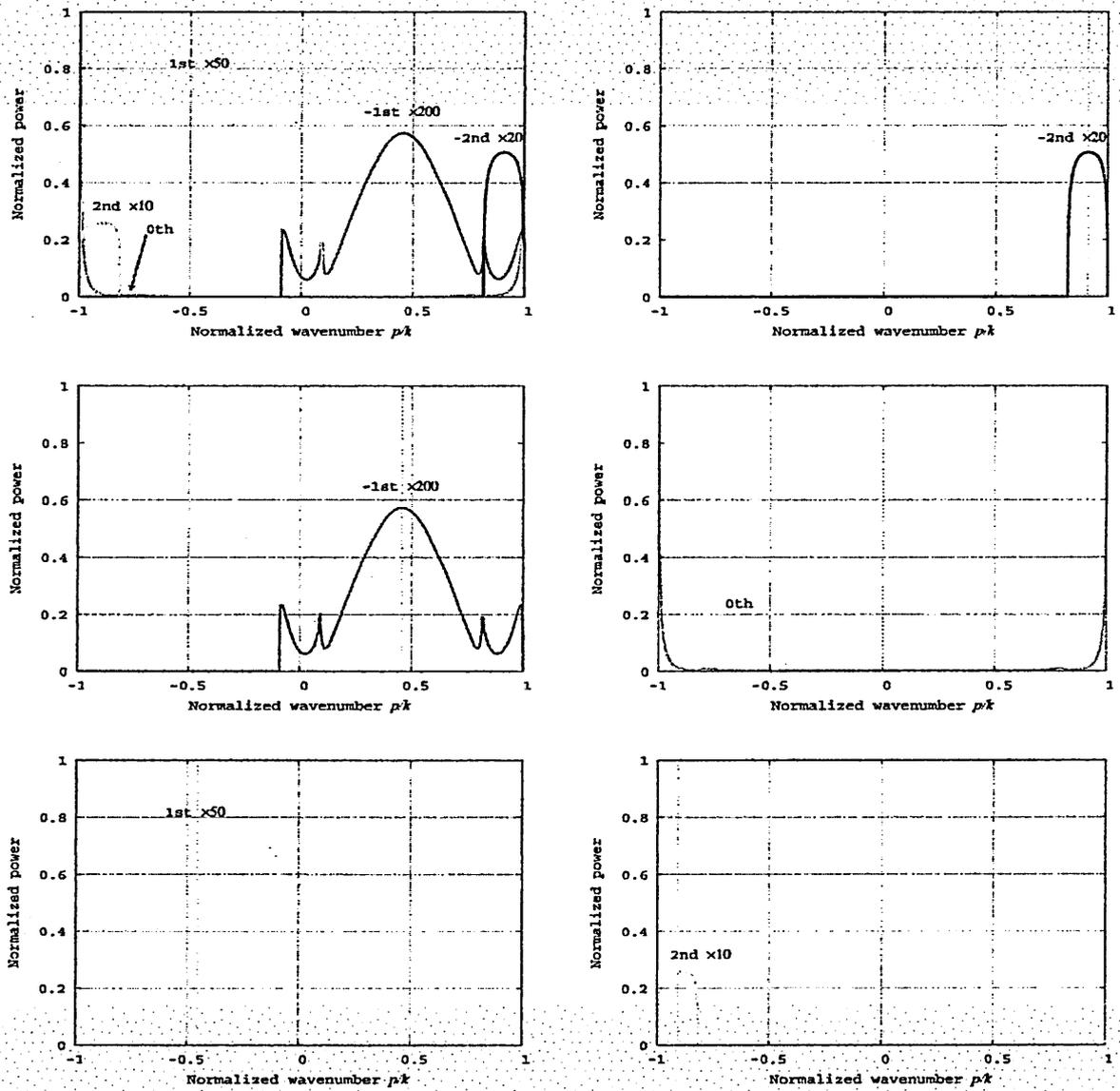


図 21 TM 波入射 (1 → 2) 反射回折効率の偶対称性  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

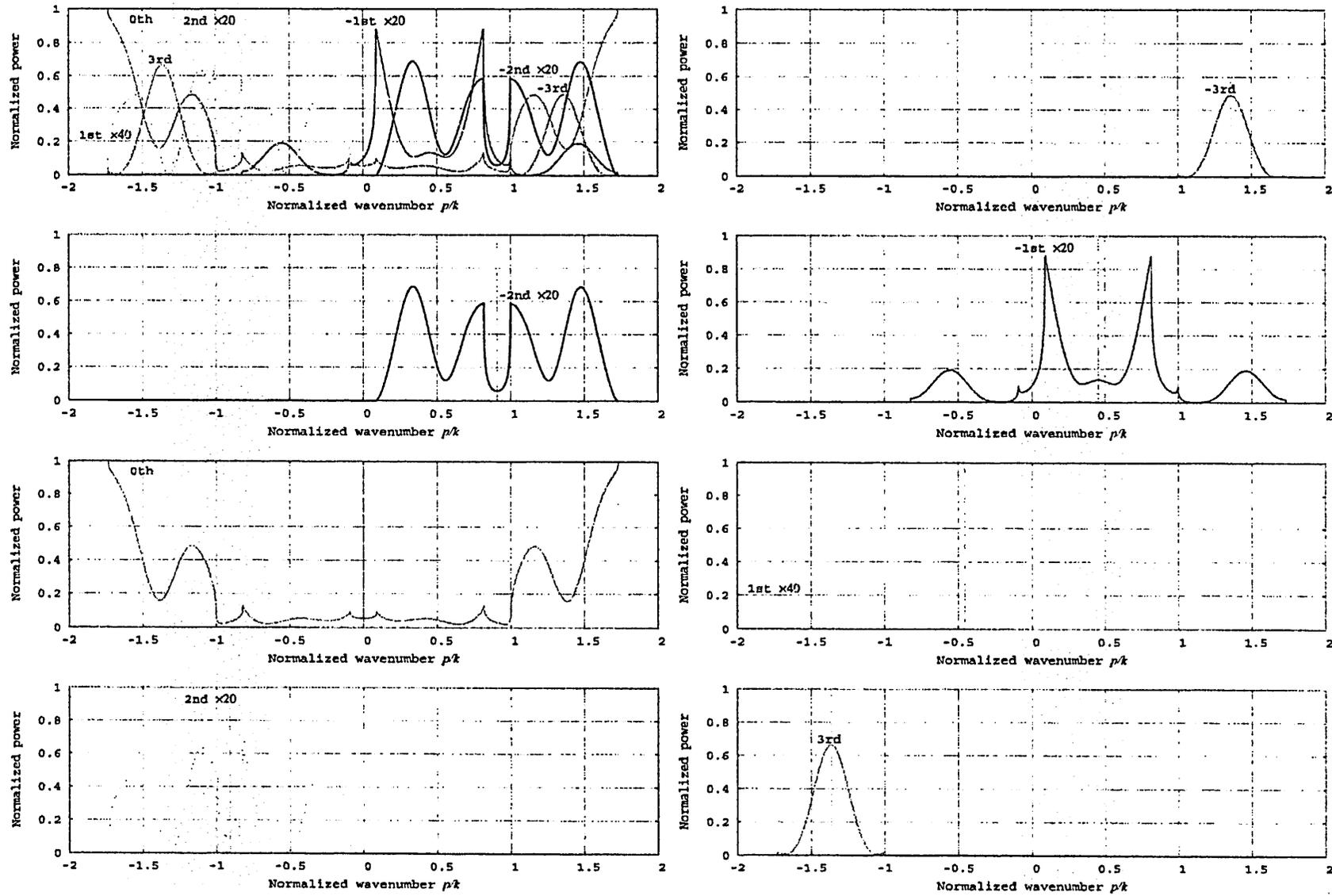


図 22 TM 波入射 (2 → 1) 反射回折効率の偶対称性  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

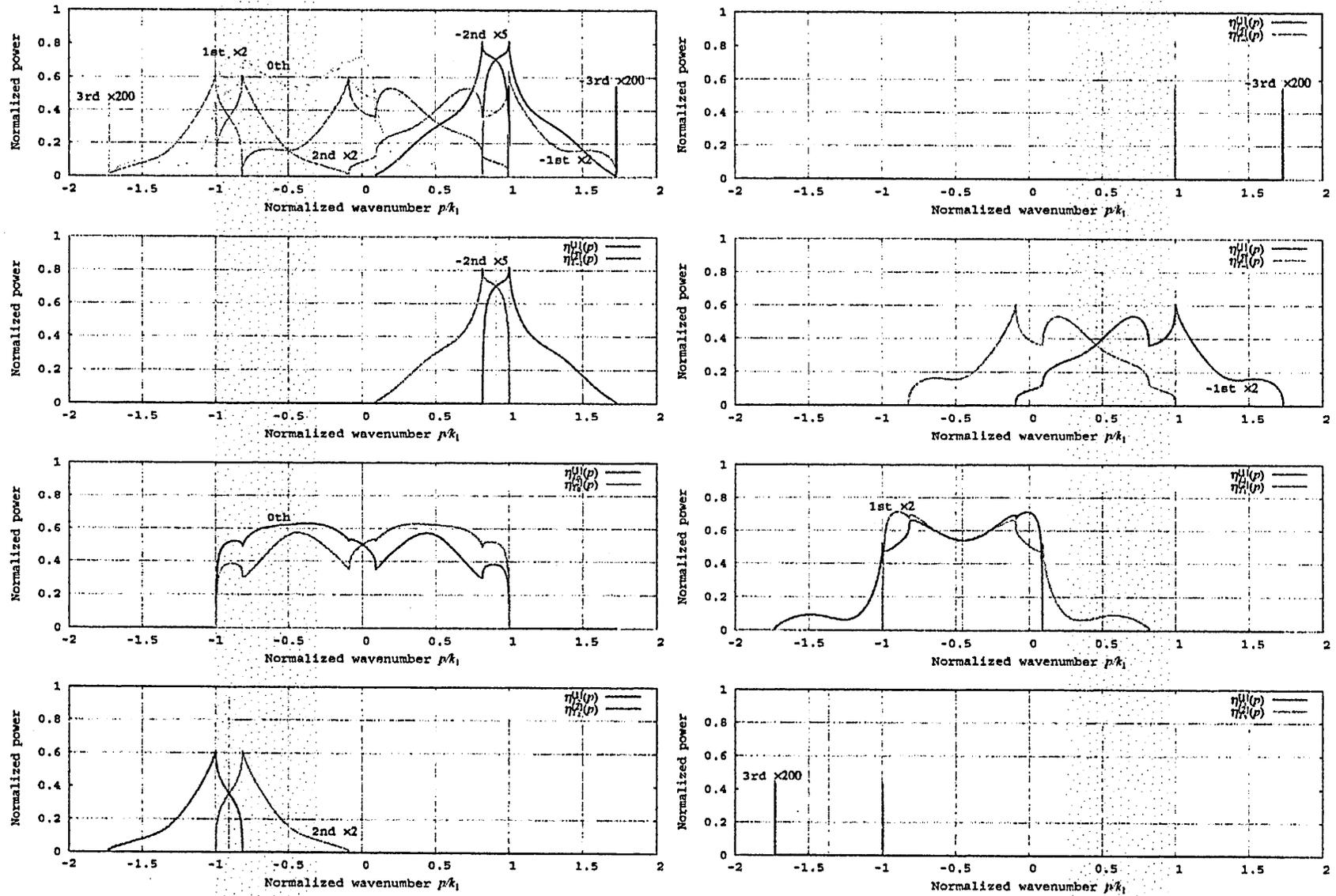


図 23 TE 透過回折効率の鏡映対称性  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

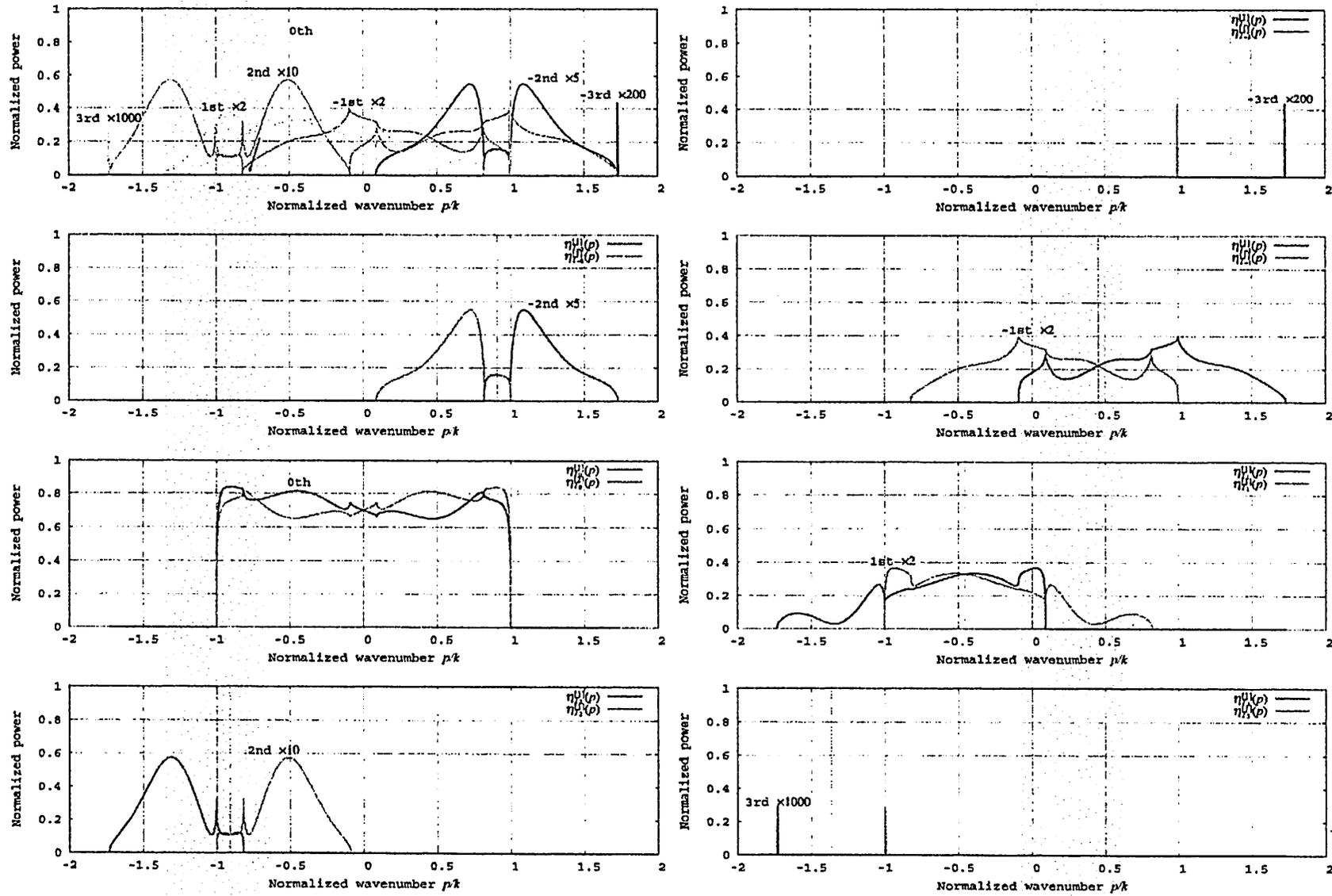


図 24 TM 透過回折効率の鏡映対称性  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

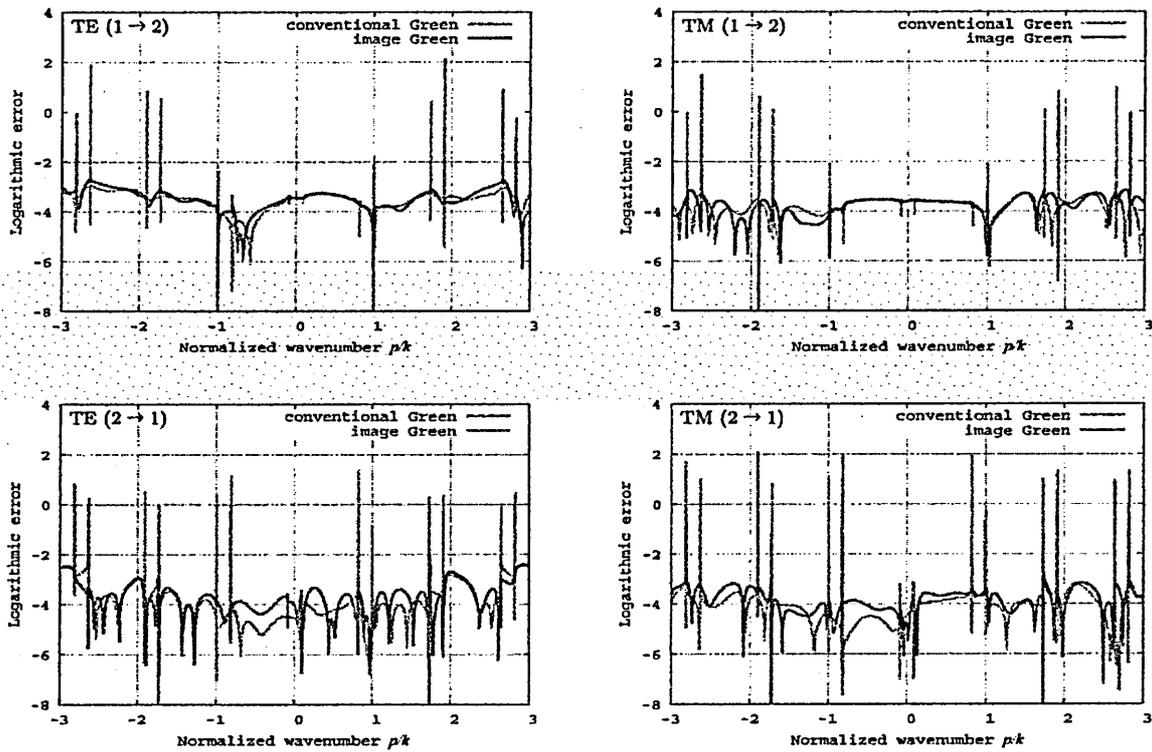


図 25 対数エネルギー誤差  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

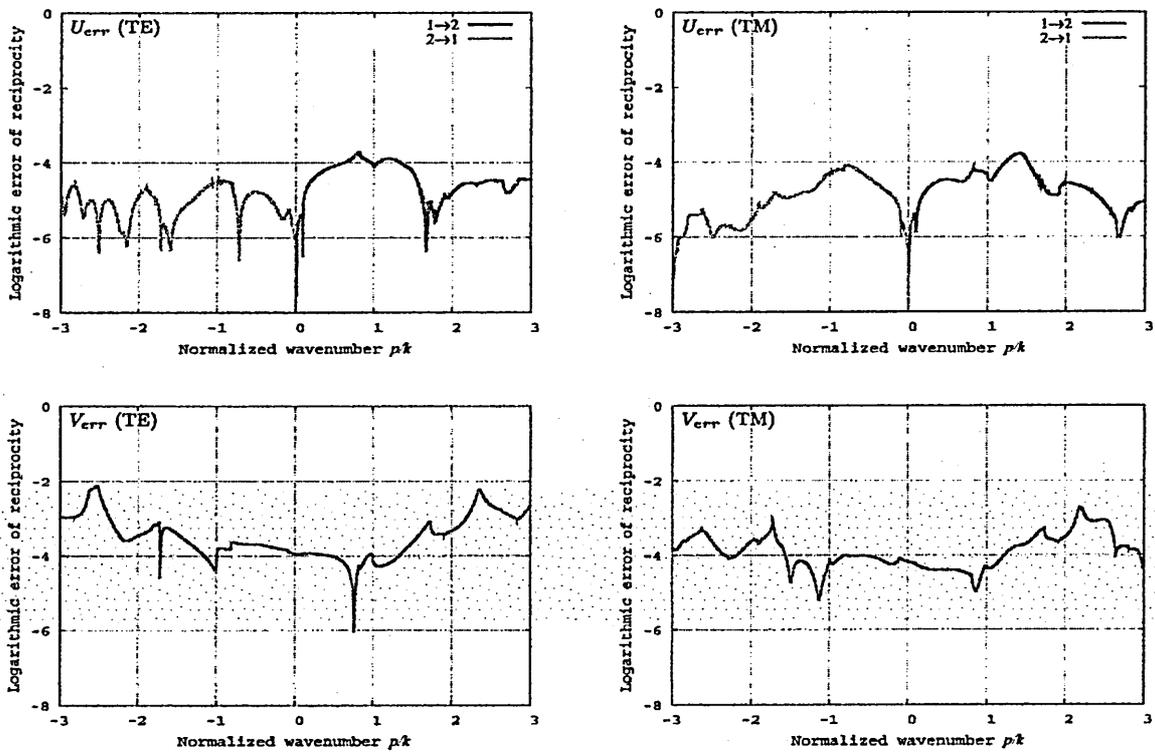


図 26 相反性の誤差  $L = 1.1\lambda, \epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 3, \mu_1 = \mu_2 = 1, N = 300$

表 1 CPU 時間比較 (TE, 媒質 1 側入射)

	ロウ処理有		ロウ処理無	
	対数誤差	CPU 時間	対数誤差	CPU 時間
$p = p_{2+}^{[1]}$ (M=65536)	-3.75	26.0sec	-3.92	26922.5sec
$p = p_{2+}^{[1]}$ (M=1024)	-3.75	12.7sec	-3.50	12960.6sec
$p = 0.5k$	-3.30	10.3sec	-3.28	106.9sec
$p = 2k$	-3.63	10.5sec	-3.50	124.6sec

せず合理的である。連立イメージ積分方程式より導かれる散乱因子の解析性についても新たに言及した。周期イメージグリーン関数を具体的に数値計算する算法と求積法を用いて厳密な連立イメージ積分方程式の数値解析法を示した。具体的な周期境界に対する相反定理、光学定理や散乱因子自体の数値例を示して散乱解折特性を議論し、周期イメージグリーン関数の方法の妥当性を示した。

平均処理 [10] による光学定理の精度向上等は今後の検討課題としたい。周期境界を持つ一様二層媒質に対する相反定理と光学定理は、その議論構成を踏まえると一般に周期境界を持つ一様多層媒質へと拡張でき、同じ形式をそなえると想定される。こちらも今後の検討事項としたい。

周期イメージグリーン関数のスペクトル表示 (52) から、実  $p$  から複素  $p$  へと解析接続して考えると伝搬因子の解析性より複素  $p$ -平面上で図 2(b) で示されるような分岐点と分岐線を備えることは明らかである。従って連立イメージ積分方程式 (65), (66) が成立すれば、得られる境界値  $\xi_1(x|p), \eta_1(x|p)$  は一般的な複素波数入射  $p$  に対する解としての意味を持ち、対応する散乱因子も複素  $p$ -平面上で図 2(b) で示されるような分岐線を備えることになる。将来的にはこのような一般的な複素波数入射  $p$  に対する拡張を理論及び数値解析の両面から議論していきたい。

## 参考文献

- [1] R.Petit, ed., *Electromagnetic theory of gratings*, Springer, Berlin, 1980.
- [2] D.Maystre, ed., *Diffraction Gratings*, SPIE Milestones series, 1992.
- [3] L.Tsang, J.A.Kong, K.H.Ding, and C.O.Ao, *Scattering of Electromagnetic Waves - Numerical simulation*, Wiley Interscience, New York, 2001.
- [4] J.DeSanto, G.Erdmann, W.Hereman and M.Misra, "Theoretical and computational aspects of scattering from rough surfaces: one-dimensional perfectly reflecting surfaces", *Waves in Random Media* 8 4 pp.528-535 (1998)
- [5] J.Nakayama, "Shadow Theory of Diffraction Grating", *IEICE Trans. Electron.* E92-C 1 pp.17-24, 2009.
- [6] J.Nakayama, Y.Tamura and K.Tsutsumi, "Shadow Theory of Diffraction Grating: A Numerical Example for TE Wave", *IEICE Trans. Electron.* E92-C 3 pp.370-373, 2009.
- [7] J.Nakayama, "Reflection, Diffraction and Scattering at Low Grazing Angle of Incidence: Regular and Random Systems", *IEICE Trans. Electron.* E94-C 1 pp.2-9(2011)
- [8] J.Nakayama and Y.Tamura, "Method of Image Green's Function in Grating Theory", *IEICE Trans. Electron.* E95-C 1 pp.93-96, 2012.
- [9] J.Nakayama and Y.Tamura, "Method of Image Green's Function in Grating Theory: TE Wave Case", *IEICE Trans. Electron.* E95-C 6 pp.1117-1120, 2012.
- [10] J.Nakayama and Y.Tamura, "Shadow Theory of Diffraction Grating: Reciprocity, Symmetry and Average Filter", *IEICE Trans. Electron.* E97-C 10 pp.1036-1040, 2014.
- [11] Y.Tamura, "TE plane wave scattering from periodic rough surfaces with perfect conductivity based on method of image Green's function - A comparison between image integral equations of the first and second types -", *Tech.Rep., IEE Japan*, EMT15-35, 2015.
- [12] Y.Tamura, "Method of image Green's function for waves scattering from two homogeneous media with a periodic rough boundary", *Tech.Rep., IEE Japan*, EMT15-36, 2015.

- [13] J.Nakayama, "Periodic Fourier Transform and Its Application to Wave Scattering from a Finite Periodic Surface", *IEICE Trans. Electro.* Vol. E83-C, No.3, pp.481-487, 2000.
- [14] T.Hosono, *The Foundation of Electromagnetic Wave Theory*, Shoko-do, Tokyo(1793) (in Japanese)
- [15] J.Nakayama, unpublished work(2013)
- [16] H.Ogura, T.Kawanishi, N.Takahashi and Z.L.Wang, "Scattering of electromagnetic waves from a slightly random surface -reciprocal theorem, cross-polarization and backscattering enhancement", *Waves in random media* 5 pp.461-495(1995)
- [17] Y.Tamura, unpublished work(2013)
- [18] J.Pavageau and M.J.Bousquet, "Diffraction par réseau conducteur nouvelle méthode de résolution", *Optica Acat.*, vol.17, no. 16, pp.469-478(1970)
- [19] Y.Tamura, "A Further Improved Technique on the Stochastic Functional Approach for Randomly Rough Surface Scattering - Analytical-Numerical Wiener Analysis -", *IEICE Trans. Electron.* E84-C 1 pp.39-46, 2011.

## 付録 A 周期フーリエ変換による周期イメージグリーン関数

### A.1 周期フーリエ変換

周期フーリエ変換 [13] は  $x$  についての (周期性の無い) 任意の関数  $h(x)$  を実 (波数) パラメータ  $p$  を持つ  $x$  についての  $p$ -周期関数へ変換する。  $x$ -軸上の長さ (周期)  $L$  に関する整数倍移動作用素  $D^m$ :

$$D^m h(x) = h(x + mL) \quad (\text{A.1})$$

を導入すると、明らかに加法群性:  $D^{m+n} = D^m D^n, D^0 \equiv I$  (恒等変換) ( $m, n = 0, \pm 1, \dots$ ) を持つ。周期フーリエ変換を次の無限和として二通り (変換軸の方向) で定義する。

$$H_{\pm}(x|p) = \mathcal{P}f_{\pm}[h(x); L] \equiv e^{\pm ipx} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pm ipmL} D^m h(x) = e^{\pm ipx} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pm ipmL} h(x + mL) \quad (\text{A.2})$$

論文 [13] での定義は  $\mathcal{P}f_{\pm}[\cdot; L]$  に相当する。  $H_{\pm}(x|p)$  は  $D^m$ -不変な  $x$  に関する周期  $L$  の  $p$ -周期関数

$$\begin{aligned} D^m H_{\pm}(x|p) = H_{\pm}(x + mL|p) &= e^{\pm ip(x+mL)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pm ipnL} h(x + mL + nL) \\ &= e^{\pm ipx} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{\pm iplL} h(x + lL) = H_{\pm}(x|p) \end{aligned}$$

となり、  $e^{\mp ipx} H_{\pm}(x|p)$  は

$$e^{\mp ipx} H_{\pm}(x|p) \Big|_{p \rightarrow p+k_L} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pm i(p+k_L)mL} D^m h(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pm ipmL} h(x + mL) = e^{\mp ipx} H_{\pm}(x|p)$$

より、  $p$  に関する周期  $k_L \equiv 2\pi/L$  の周期関数である。その定義域を  $|p| \leq k_L/2$  とすれば  $e^{imp}$  の直交性により周期フーリエ逆変換を導入出来る。

$$h(x) = \mathcal{I}P f_{\pm}[H_{\pm}(x|p)] = \frac{1}{k_L} \int_{-k_L/2}^{k_L/2} H_{\pm}(x|p) e^{\mp ipx} dp \quad (\text{A.3})$$

無限和が存在しない場合も  $H_{\pm}(x|p)$  が  $p$  について可積分であれば周期フーリエ変換は意味を持つ。  $h(x)$  の  $L^1$ -フーリエ変換  $H_{\pm}(p)$  (変換軸方向の相違)

$$H_{\pm}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{\pm ipx} dx \quad (\text{A.4})$$

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\pm}(p) e^{\mp ipx} dp \quad (\text{A.5})$$

に対し、次のポアソン和の公式

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{impL} = k_L \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(p + mk_L) \quad (\text{A.6})$$

を適用すれば  $H_{\pm}(x|p)$  はスペクトル  $H_{\pm}(p)$  の等間隔サンプリングの和として書ける。

$$H_{\pm}(x|p) = \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\mp imk_L} H_{\pm}(p + mk_L) \quad (\text{A.7})$$

## A.2 周期イメージグリーン関数

波源  $(x_s, z_s)$  におけるグリーン関数  $G_j(x, z; x_s, z_s)$  に対し  $x$  について周期フーリエ変換  $Pf_-[\cdot; L]$  をとる。

$$\begin{aligned} Pf_-[G_j(x, z; x_s, z_s); L] &= e^{-ipx} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-impL} G_j(x + mL, z; x_s, z_s) \\ &= e^{-ipx} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{impL} G_j(x, z; x_s + mL, z_s) \equiv e^{-ipx} G_{pj}(x, z; x_s, z_s|p) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

同様に (レベルシフト版) イメージグリーン関数  $G_j^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj})$  に対し  $x$  について周期フーリエ変換  $Pf_-[\cdot; L]$  をとる。

$$\begin{aligned} Pf_-[G_j^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}); L] &= e^{-ipx} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-impL} G_j^{(IM)}(x + mL, z; x_s, z_s; z_{vj}) \\ &= e^{-ipx} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{impL} G_j^{(IM)}(x, z; x_s + mL, z_s; z_{vj}) \equiv e^{-ipx} G_{pj}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}|p) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

本報告では、実の  $p$  を考えるため (A.8), (A.9) 自体は  $p$  に関して周期  $k_L$  の周期関数となる。上記の通り、周期フーリエ変換そのもの (指数因子  $e^{-ipx}$  と  $G_{pj}(x, z; x_s, z_s|p)$ ,  $G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}|p)$  の積) が  $D^m$ -不変な  $x$  に関する周期  $L$  の  $p$ -周期関数であることから (A.8), (A.9) を各々周期グリーン関数、周期イメージグリーン関数と呼ぶ。グリーン関数のフーリエ積分表示はハンケル関数  $H_0^{(1)}(k_j \sqrt{x^2 + z^2})$  のフーリエ積分表示 (平面波展開表現) を用いることで

$$G_j(x, z; x_s, z_s) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip(x-x_s) + i\beta_j(p)|z-z_s|}}{\beta_j(p)} dp \quad (\text{A.10})$$

$$= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip(x-x_s) + i\beta_j(p)|z-z_s|}}{\beta_j(p)} dp \quad (\text{A.11})$$

で与えられる。(A.11) は伝搬因子の対称性  $\beta_j(-p) = \beta_j(p)$  より得られる。よって、周期グリーン関数及び周期イメージグリーン関数のスペクトル表示は (A.11) を用いることで

$$G_{pj}(x, z; x_s, z_s|p) = \frac{i}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(p+mk_L)(x-x_s)} \frac{e^{i\beta_j(p+mk_L)|z-z_s|}}{\beta_j(p+mk_L)} \quad (\text{A.12})$$

$$G_{pj}^{(IM)}(x, z; x_s, z_s; z_{vj}|p) = \frac{i}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(p+mk_L)(x-x_s)} \frac{e^{i\beta_j(p+mk_L)|z-z_s|} - e^{i\beta_j(p+mk_L)|z+z_s-2z_{vj}|}}{\beta_j(p+mk_L)} \quad (\text{A.13})$$

となる。

フォノンニック結晶内を伝搬する弾性波の特性  
～導波路への応用を目指して～

岡本 啓汰 岸岡 清  
大阪電気通信大学工学部

2015年3月26日

於 大阪電気通信大学

## 概要

弾性波は、フォトニクス分野でも光波との相互作用と言う観点から重要な役割を担っているが、全反射現象を用いた導波構造では、光の導波路に似合った強い界の集中を実現するのは難しい。本報告では、光学分野で知られている周期構造に起因して現れる伝搬阻止域 (PBG) を利用したフォトニック結晶導波路と類似な周期構造 (フォノンニック結晶) を利用した導波路を考えて、そこを伝搬する弾性波 ( $S$ -波) の伝搬特性を明らかにしている。FDTD 法による伝搬特性のシミュレーションに先立って、光波と同様な伝搬阻止域があることも平面波展開法を用いて明らかにしている。

## 1 まえがき

光学の分野で、屈折率の異なる媒質が周期的に並んだ構造はフォトニック結晶と呼ばれ、光の伝搬に関して、フォトニックバンドギャップ (PBG) と呼ばれる特定の領域の波長の光が伝搬できない波長帯域が存在する事が知られている。さらに、周期構造に欠陥を与えると、PBG の光は欠陥の部分に閉じ込められて欠陥部に沿って伝搬し、欠陥部を導波路として利用できる事も知られている [1, 2, 3]。

フォトニック結晶導波路やそれを用いた光学素子の特性の解析や設計には、FDTD 法 (Finite Difference Time Domain method) が広く使われている。その理由は、フォトニック結晶は屈折率差が大きい媒質によって構成され、さらにその周期は波長オーダーと小さいと言う構造上の特長に由来する [4]。

一方、弾性波を含む音波は光波と相互作用を呈する事から、フォトニクス (Photonics) 分野でも重要な役割を果たしているが、光波の界の閉じ込めに似合う導波構造を媒質の境界面での全反射で実現するのは難しいとされている。音波の分野でのフォトニック結晶構造に相当するものは、音波に因んで、フォノンニック結晶と呼ばれ、2次元構造での解析結果、並びに導波実験結果も報告されている [5]。

本報告では、固体内を伝搬する弾性波について、フォトニック結晶構造と類似な周期構造内の伝搬特性を理論的に取り扱っている。2次元の周期構造を想定して、FDTD 法を用いてその伝搬特性を示している。まず、平面波展開法によって、弾性波にも PBG に対応する伝搬が遮断される波長帯域が存在する事を示し、次いで、伝搬阻止域の波長の弾性波は、周期構造の欠陥部に沿って強い界の集中度を持って伝搬する事を計算機シミュレーションによって示している。

一様な材料 (例えば; アルミニウム) 中に、円柱状の材料 (例えば; アクリル) が周期的に配列された2次元周期構造を想定して、アクリルの円柱と平行方向の変位を持つ  $S$ -波の2次元周期場内の伝搬を取り扱っている。

## 2 フォノニック結晶

図1には、 $z$ 方向には一様な構造を持つ2次元フォノニック結晶（フォノニック構造）が示されている。 $x-y$ 面内に周りとは違う伝搬速度をもつ円形断面を持った材料が周期的に配列されている。ここではS-波の伝搬を考えるので、S-波の伝搬速度 $c_{sa}$ と $c_{sb}$ により材料の違いが表されている。 $r$ と $a$ は、円柱の半径、円柱の配列周期をそれぞれ表している。

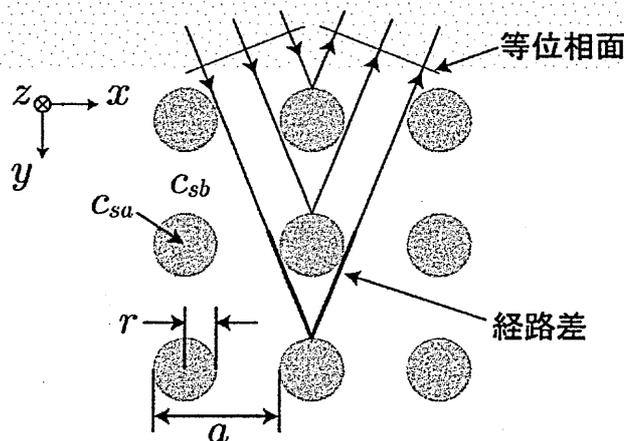


図 1: 2次元フォノニック結晶

図には、矢印で弾性波の周期状媒質による反射の様子が模式的に描かれている。反射波の位相が同相 ( $2\pi$  の整数倍) になる条件 (Bragg-反射条件) が満たされると、その方向に強い反射が起こり、波は周期媒質中を伝搬できない。どの方向についてもこの条件が満たされれば、周期構造内を波は伝搬できない。伝搬速度の違いが大きいと、伝搬できない波長に広がりが生じ、伝搬阻止域が形成される。以下では、伝搬できない波長帯域をフォノニック結晶の場合の伝搬阻止域になぞらえて、フォノニックバンドギャップ (PBG) と呼ぶ事にする。

## 3 フォノニックバンドギャップ (PBG) の計算

フォノニック結晶内の弾性波の伝搬特性をシミュレーションをする際、与えられた構造パラメータに対する伝搬阻止域 (PBG) を知る必要がある。FDTD法を用いた伝搬の解析を行う前に、ここでは、平面波展開法 [1, 2] による PBG の帯域を求める方法が述べられる。

### 3.1 平面波展開法 [1,2]

ここで考えている  $S$  波では、変位は  $z$  方向だけに存在し、 $z$  方向の一様性を考慮すると、 $z$  方向の変位  $w(x, y)$  は、

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

の運動方程式を満たす。ここで、時間因子を  $e^{j\omega t}$  と仮定すると、

$$\left( \frac{c_s}{c} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 w \quad (2)$$

となる。ここで、 $c$  は空気中の音速を表す。 $c_s$  は媒質によって決まる  $S$  波の伝搬速度で、媒質の密度  $\rho$  とラメ定数  $\mu$  によって、

$$c_s = \sqrt{\mu/\rho}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

と表される。ここで、 $E$ 、 $\nu$  はヤング率及びポアソン比をそれぞれ表している。

構造の周期性を考慮すると、 $(c_s/c)^2$  は逆格子ベクトル  $\mathbf{G}_{mn}$  を用いたフーリエ級数展開により、

$$\left( \frac{c_s}{c} \right)^2 = \sum_{m,n} K_{mn} e^{j\mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{u}} \quad (4)$$

$$\mathbf{G}_{mn} = m \frac{2\pi}{a} \mathbf{i}_x + n \frac{2\pi}{a} \mathbf{i}_y, \quad \mathbf{u} = x \mathbf{i}_x + y \mathbf{i}_y$$

と表される。式中の  $m$ 、 $n$  は整数である。 $\mathbf{u}$  は  $x$ - $y$  平面内の位置ベクトル、 $\mathbf{i}_x$ 、 $\mathbf{i}_y$  はそれぞれ、 $x$  および  $y$  方向の単位ベクトルである。 $K_{mn}$  はフーリエ級数の振幅を表している。

変位  $w$  も、同様に  $\mathbf{G}_{mn}$  を用いて

$$w(x, y) = \sum_{m,n} A_{mn} e^{j(\mathbf{k} + \mathbf{G}_{mn}) \cdot \mathbf{u}} \quad (5)$$

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{i}_x + k_y \mathbf{i}_y$$

と表される。 $\mathbf{k}$  は界の伝搬に対応した波数ベクトルである。

$K_{mn}$  は、2次元周期構造のフーリエ級数の展開係数として、

$$\begin{cases} K_{mn} = \left( \frac{c_{sa}}{c} \right)^2 f + \left( \frac{c_{sb}}{c} \right)^2 (1-f) & (\mathbf{G}_{mn} = 0) \\ K_{mn} = 2f \left[ \left( \frac{c_{sa}}{c} \right)^2 - \left( \frac{c_{sb}}{c} \right)^2 \right] \frac{J_1(|\mathbf{G}_{mn}| \cdot r)}{|\mathbf{G}_{mn}| \cdot r} & (\mathbf{G}_{mn} \neq 0) \end{cases} \quad (6)$$

で与えられる [6]。ここで、 $f = \pi r^2/a^2$  と置いた。また、 $J_1$  は1次の第1種ベッセル関数である。

式(4)、(5)を式(2)に代入し、 $x$ と $y$ による微分を実行し、整理すると

$$\left[ \sum_{\mu, \nu} K_{\mu\nu} e^{j\mathbf{G}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{u}} \right] \left[ \sum_{\xi, \eta} |\mathbf{G}_{\xi\eta} + \mathbf{k}|^2 A_{\xi\eta} e^{j\mathbf{G}_{\xi\eta} \cdot \mathbf{u}} \right] = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \sum_{m, n} A_{mn} e^{j\mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{u}} \quad (7)$$

となる。代入する際に、左辺の添字( $m, n$ )を、 $(\mu, \nu)$ と $(\xi, \eta)$ に置き換えた。また、両辺に共通する $e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}}$ の項は消去されている。この式において左辺の添字 $(\xi, \eta)$ を固定すると

$$[\text{左辺}]_{\xi\eta} = \sum_{\mu, \nu} [|\mathbf{G}_{\xi\eta} + \mathbf{k}|^2 K_{\mu\nu} A_{\xi\eta} e^{j(\mathbf{G}_{\mu\nu} + \mathbf{G}_{\xi\eta}) \cdot \mathbf{u}}] \quad (8)$$

の関係が得られる。直交関係

$$\int_0^a \int_0^a e^{j\mathbf{G}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{u}} e^{j\mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{u}} dx dy = a^2 \delta_{\mu m} \delta_{\nu n} \quad (9)$$

を考慮して式(7)の両辺に $e^{j\mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{u}}$ を掛けて、 $0 \leq x, y \leq a$ の範囲で積分すると、右辺は $a^2(\omega/c)^2 A_{mn}$ となる。左辺は $\mathbf{G}_{\mu\nu} + \mathbf{G}_{\xi\eta} = \mathbf{G}_{mn}$ を満たす項だけが残るので

$$[\text{左辺}]_{\xi\eta} = a^2 |\mathbf{G}_{\xi\eta} + \mathbf{k}|^2 K_{m-\xi, n-\eta} A_{\xi\eta} \quad (10)$$

となる。ここで、 $K_{m-\xi, n-\eta}$ の添字は $K$ が $\mathbf{G}_{\mu\nu} = \mathbf{G}_{mn} - \mathbf{G}_{\xi\eta}$ に対するものである事を示している。左辺は添字 $(\xi, \eta)$ を固定していた事に留意すると式(7)は

$$\sum_{\xi, \eta} [|\mathbf{G}_{\xi\eta} + \mathbf{k}|^2 K_{m-\xi, n-\eta} A_{\xi\eta}] = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 A_{mn} \quad (11)$$

となる。 $m, n$ の値を変えてこの操作を繰り返せば、振幅 $A_{mn}$ を要素とするベクトル $\mathbf{A}$ に関する連立方程式が得られる。この方程式を $(\omega/c)^2$ に対する固有値方程式と考えて、与えられた $\mathbf{k}$ に対して固有値として $(\omega/c)^2$ を、固有ベクトルとして $\mathbf{A}$ を求めると、それらによって式(5)で表される $w(x, y)$ は、式(2)を満たす事になる。即ち、考えている2次元周期構造に内を伝搬する解が得られる事になる。

固有値を得る計算を容易にする為に

$$A'_{mn} = |\mathbf{G}_{mn} + \mathbf{k}| A_{mn} \quad (12)$$

の置換を行うと、式(11)は

$$\sum_{\xi, \eta} [|\mathbf{G}_{mn} + \mathbf{k}| \cdot |\mathbf{G}_{\xi\eta} + \mathbf{k}| K_{m-\xi, n-\eta} A'_{\xi\eta}] = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 A'_{mn} \quad (13)$$

と変形され、対称行列の固有値問題に帰着される。

### 3.2 PBGの計算例

PBGは以下の様に得る事ができる。3.1節で導出された式(13)に波数ベクトル $k$ を与えて、固有値を求めると、与えた $k$ で伝搬可能な角周波数 $\omega$ が得られる。フォノンニック結晶では、構造が $a$ を周期として繰り返されるので、波数ベクトル $k$ の $x$ 、 $y$ 成分、 $k_x$ と $k_y$ の値は $-\pi/a \leq k_{x,y} \leq \pi/a$ の範囲に限定される。このような波数の領域はブリュアンゾーンと呼ばれており、図2(a)に示されている。即ち、式(13)の固有値方程式に与える波数ベクトル $k$ は、ブリュアンゾーンの内部に限られる。構造の対称性を考慮すると、結局、図に示された影を付けた三角形(既約ゾーン)の辺に沿って波数成分( $k_x, k_y$ )を変化させるだけで十分である事になる。

図2(b)は、式(13)を解いて求めた固有値 $\omega$ を $\omega a/2\pi c$ と規格化してプロットしたものである(実線)。横軸は波数の大きさ $|k|$ を表しており、波数ベクトルを既約ゾーンの三角形の辺に沿って $M \rightarrow \Gamma \rightarrow X \rightarrow M$ と変化させて、各 $k$ の値についてプロットされている。図で影を付けた領域には、波数の値に依らず固有値が存在せず、伝搬可能な周波数がない事を表している。即ち、影が付けられた周波数領域が伝搬阻止領域PBGとなる。

この例では、各領域のS波の伝搬速度を $c_{sa}=966.3\text{m/s}$ (アクリル)、 $c_{sb}=3049\text{m/s}$ (アルミニウム)、 $c=340\text{m/s}$ と与えている。また、 $r/a=0.25$ と設定されている。計算で得られたPBGの範囲は $2.56 < \omega a/2\pi c < 3.60$ 、 $4.91 < \omega a/2\pi c < 5.10$ となった。

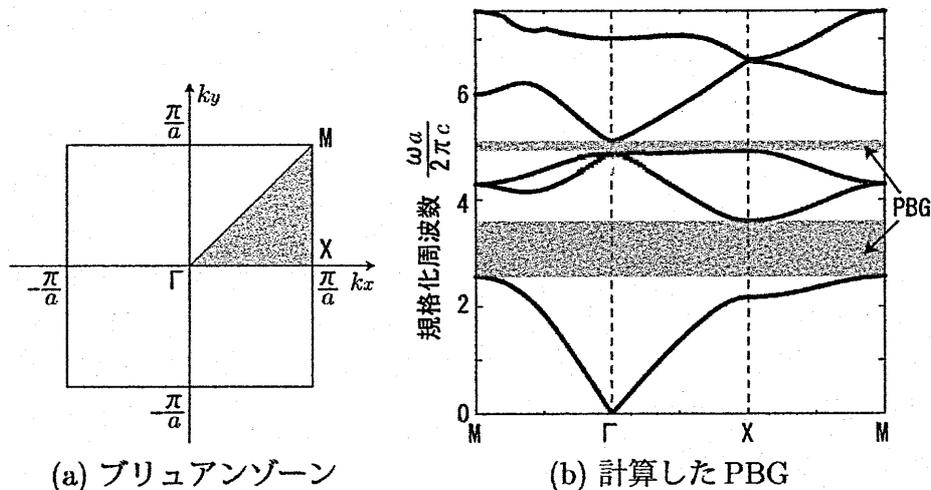


図 2: PBGの計算例

## 4 弾性波へのFDTD法による解析

FDTD法では、図3に示すように解析する空間領域を微小なセルに区切り、各微小セルの値を時間的差分法を用いて過去の値から求められる。従って、FDTD法のアルゴリズムを実行するには、空間と共に時間の微分に対する差分の表現式を求める必要がある。

まず、変位  $w(x, y, t)$  の時間についての差分は

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w\left(x, y, t + \frac{\Delta t}{2}\right) - w\left(x, y, t - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} \quad (14)$$

で与えられる。これを用いて、式(1)の左辺の時間に関する2階微分を差分表現に改めると

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{w(x, y, t + \Delta t) - 2w(x, y, t) + w(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t^2} \quad (15)$$

となる。

離散化された空間座標と時間は、各グリッド間隔  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta t$  を用いて、それぞれ、 $(x, y, t) = (i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$  と表されるが、差分式の表現を簡略化する目的で、以下では、 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta t$  を省略して、

$$w(x, y, t) = w^n(i, j) \quad (16)$$

のように表記される。この表現を用いると式(15)は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{w^{n+1}(i, j) - 2w^n(i, j) + w^{n-1}(i, j)}{\Delta t^2} \quad (17)$$

と表せる。

空間座標による微分に対する同様の表記を用いると、式(1)は

$$\begin{aligned} w^{n+1}(i, j) = & 2w^n(i, j) - w^{n-1}(i, j) \\ & + \Delta t^2 c_s^2(i, j) \left[ \frac{1}{\Delta x^2} \{w^n(i+1, j) - 2w^n(i, j) + w^n(i-1, j)\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Delta y^2} \{w^n(i, j+1) - 2w^n(i, j) + w^n(i, j-1)\} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

のように差分表示される。この差分式から解るように、注目している時間  $t = (n+2)\Delta t$  に於ける各点の変位  $w^{n+2}(i, j)$  の値は、2-step前  $t = n\Delta t$  の値  $w^n(i, j)$  と、1-step前  $t = (n+1)\Delta t$  での値  $w^{n+1}(i, j)$  及び、その近傍の値  $w^{n+1}(i \pm 1, j \pm 1)$  の合計6個の点の値によって順次得られる。この計算のアルゴリズムは模式的に図3(b)に示されている。空間的な計算、即ち、 $(i, j)$  を変えて計算を繰り返す事で、空間の全グリッドの点の時間的な変化を逐次得る事ができる。

計算を実行する際のグリッド間隔  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta t$  は、文献[4]のCourantの安定条件

$$c_s \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2}} \quad (19)$$

を満たすように設定される。以下に示されるシミュレーションでは、 $\Delta x = \Delta y = 0.05\text{m}$  として、 $\Delta t$  は  $1.15 \times 10^{-5}\text{s}$  以下となるように設定されている。

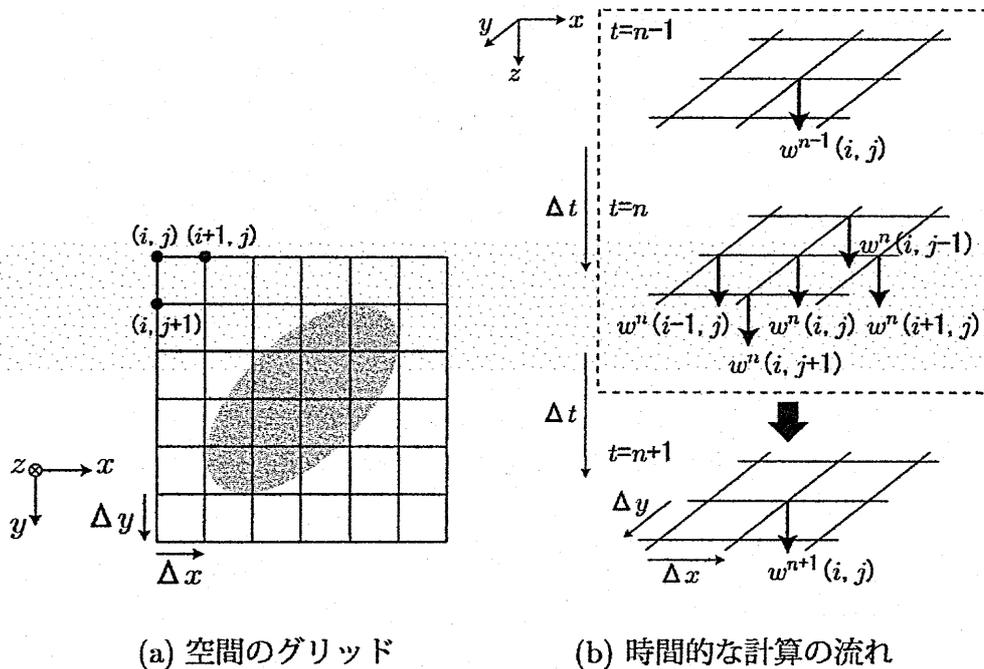


図 3: FDTD 法の計算手順

## 5 シミュレーション結果

この節では2次元フォノンニック結晶導波路を伝搬する弾性波の計算例が示される。表1に計算に使用した各パラメータがまとめられている。表中の  $d$  は導波路幅である。

表 1: 計算に使用したパラメータ

$r/a$	$c$ [m/s]	$c_{sa}$ [m/s]	$c_{sb}$ [m/s]	$\lambda$ [m]	$\Delta x$ [m]	$\Delta y$ [m]	$\Delta t$ [s]	$d/a$
0.25	340	966.3	3049	3.049	0.05	0.05	$10^{-5}$	2

### 5.1 直線導波路

図4にフォノンニック結晶による直線導波路を伝搬する  $S$ -波の FDTD 法による計算例が示されている。図4では帯域が  $2.56 < \omega a/2\pi c < 3.60$  の PBG の中央付近 ( $\omega a/2\pi c=2.94$ ) での計算例が示されている。

図4(a)には時間と共に導波路に沿って伝搬する  $S$ -波の変位の絶対値  $|w|$  が濃淡によって表示されている。図4(b)は計算した構造である。図4(a)から界は導波路壁面から4周期程度離れると十分減衰しており、強い界の集中が確認できる。音波の管内波長  $\lambda_g=6.24\text{m}$  であり、バルク波との比は  $\lambda_g/\lambda=2.05$  である。

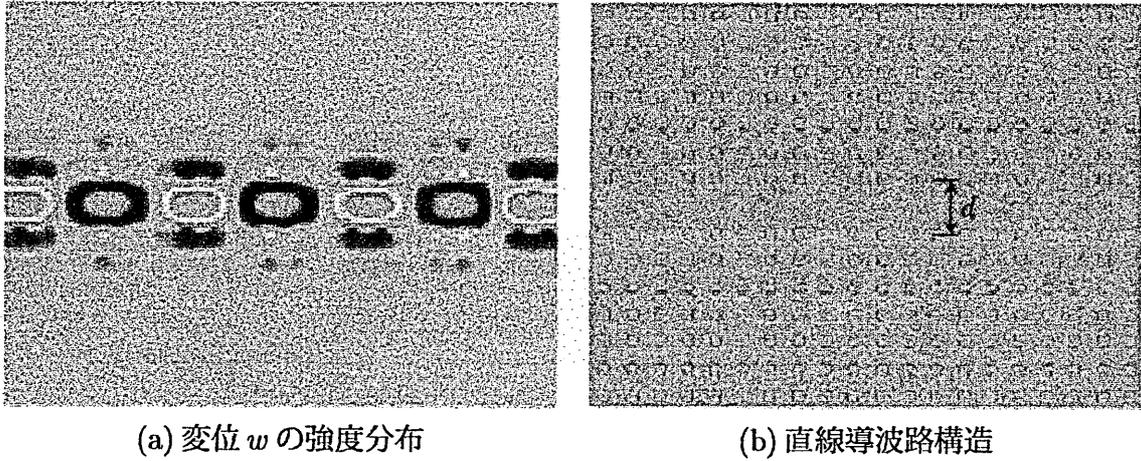


図 4: 直線導波路

## 5.2 L字導波路

図5に構造の欠陥をL字状にしたフォノンニック結晶導波路での計算例が示されている。強い界の集中により、直角に曲がる導波路の実現が期待される。

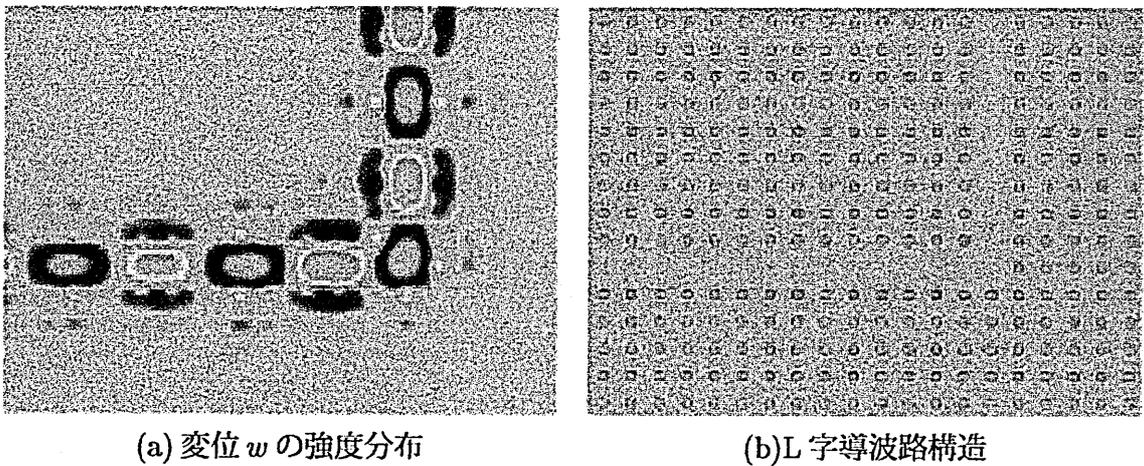


図 5: L字導波路

## 5.3 周波数による界分布の広がりの違い

上では阻止域 (PBG) の中央付近に位置する周波数についての伝搬特性を示したが、ここでは PBG の端の近傍の周波数における伝搬特性を界の広がりによって焦点を当てて検討する。PBG の幅を  $\delta (=1.04)$  として、図6に PBG の中央値  $(3.08) \pm 0.4\delta$  での計算結果が示されて

いる。界の広がりの影響が顕著に現れるL字導波路についてのシミュレーション結果が示されている。図6(a)は、PBGの中央より高い周波数 ( $\omega a/2\pi c=3.50$ ) の場合の結果である。また、図6(b)は、低い周波数 ( $\omega a/2\pi c=2.67$ ) の場合の結果である。

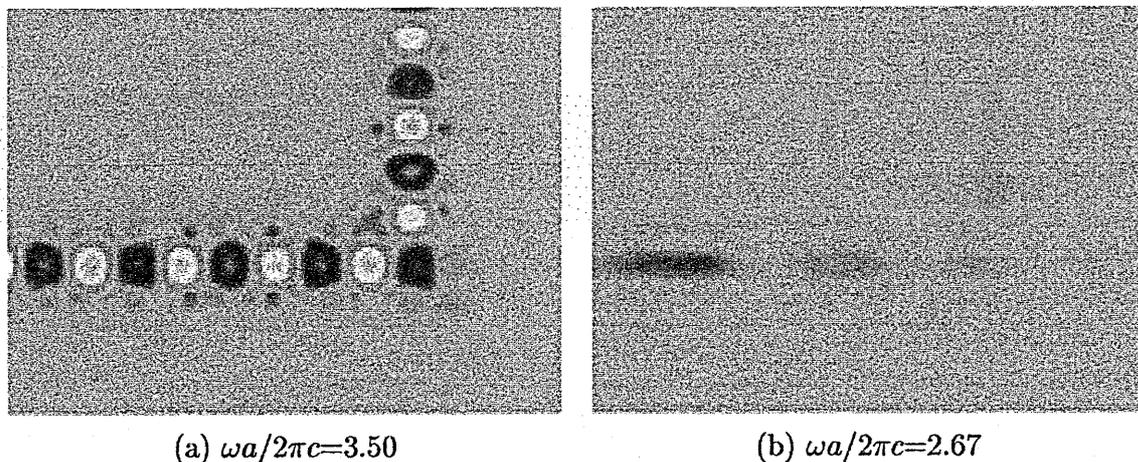


図 6: PBG の端近傍での計算例

図6では(a)、(b)共に導波路壁面からの染み出しが多く、界の集中が弱いことがわかる。このことから直角に曲がる導波路を設計する時は、より界の集中の強いPBGの中央付近の周波数を用いるのが望ましい事が判る。

## 6 まとめ

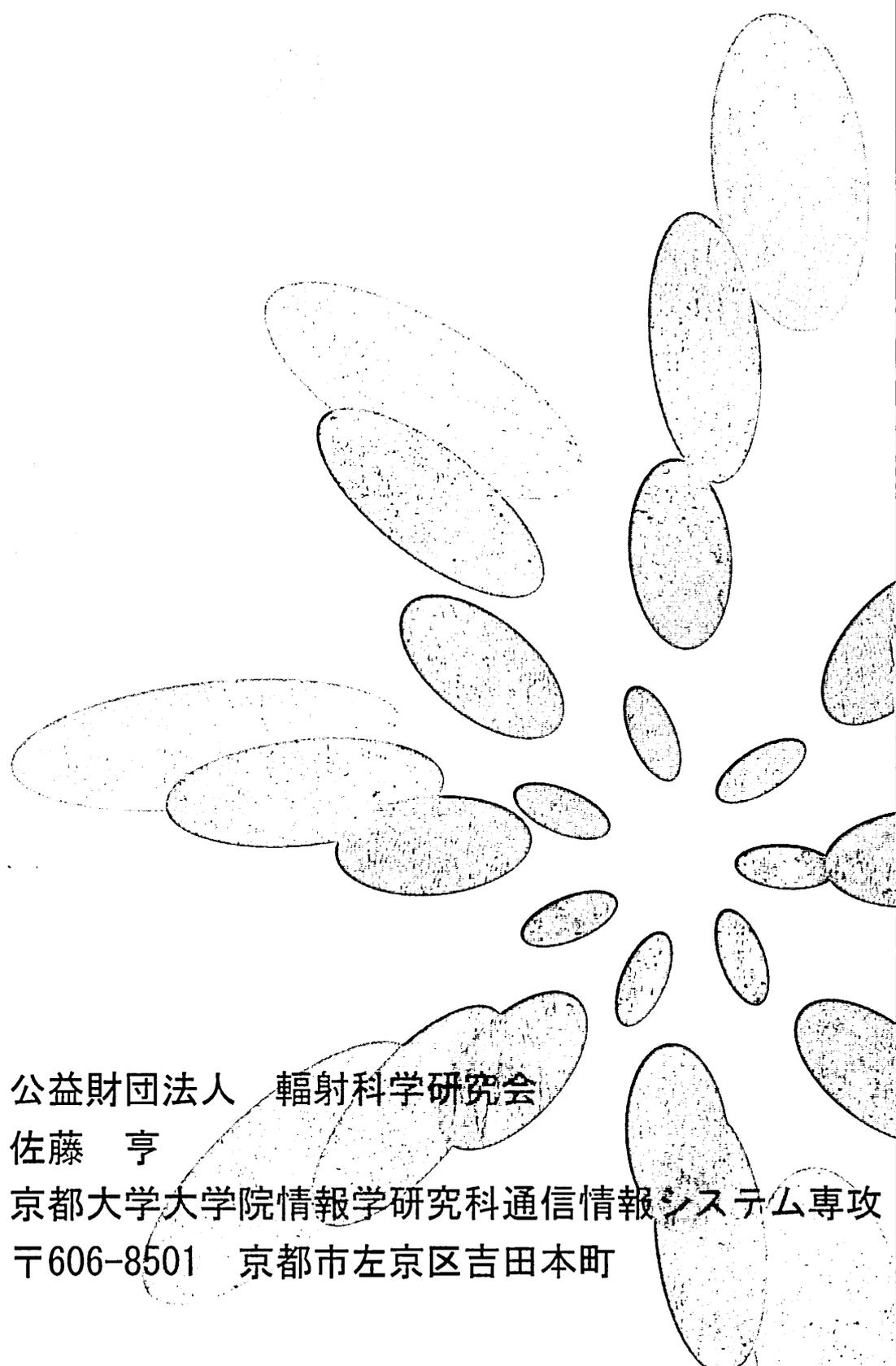
本報告では、平面波展開法を用いる事によって周期構造に於いて弾性波にも伝搬が遮断される波長帯域(PBG)が存在することを示し、この波長帯に於いては、周期構造の欠陥部に沿って伝搬する界が存在する事をFDTD法による計算機シミュレーションによって示した。これにより、光学分野でのフォトニック結晶と同様な結晶の欠陥を用いた導波路が弾性波についても実現できる事を明らかにした。

## 謝辞

本研究で、FDTD法についてご議論・助言を頂いた本学通信工学科の何一偉先生に感謝いたします。また、FDTD法のプログラム作成について貴重なご助言を頂きました大阪電気通信大学高等学校の岸本有生先生に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] John D. Joannopoulos, Robert D. Meade and Joshua N. Winn; "フォトニック結晶—光の流れを型にはめ込む—", コロナ社, pp.1-64 (2000).
- [2] 迫田 和彰; "フォトニック結晶入門", 森北出版株式会社, pp.1-60 (2004).
- [3] 岸本 有生, 岸岡 清; "FDTD 法によるフォトニック結晶光導波路の解析", 大阪電気通信大学 研究論集 (自然科学編) 第 39 号, pp.19-22 (2004).
- [4] 宇野 亨; "FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析", コロナ社, pp.1-57 (2009).
- [5] 宮下 豊勝; "音の世界の結晶と音波の薄型回路の開発", 一般財団法人カワイサウンド技術・音響振興財団 機関誌「サウンド」第 20 号, pp.7-11 (2005).
- [6] K. Sakoda; "Optical Properties of Photonic Crystals", Springer, pp.23-26 (2001).



発行 公益財団法人 輻射科学研究会  
連絡先 佐藤 亨  
事務局 京都大学大学院情報学研究科通信情報システム専攻  
〒606-8501 京都市左京区吉田本町