

時変スペクトル信号処理

佐藤 亨
通信情報システム専攻

2 予備知識: Fourier 変換とパワースペクトル

信号 $s(t)$ の Fourier 変換および逆変換

$$S(\omega) = \int s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int S(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

パワースペクトル

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(\omega)|^2}{T} \quad (3)$$

$$S_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4)$$

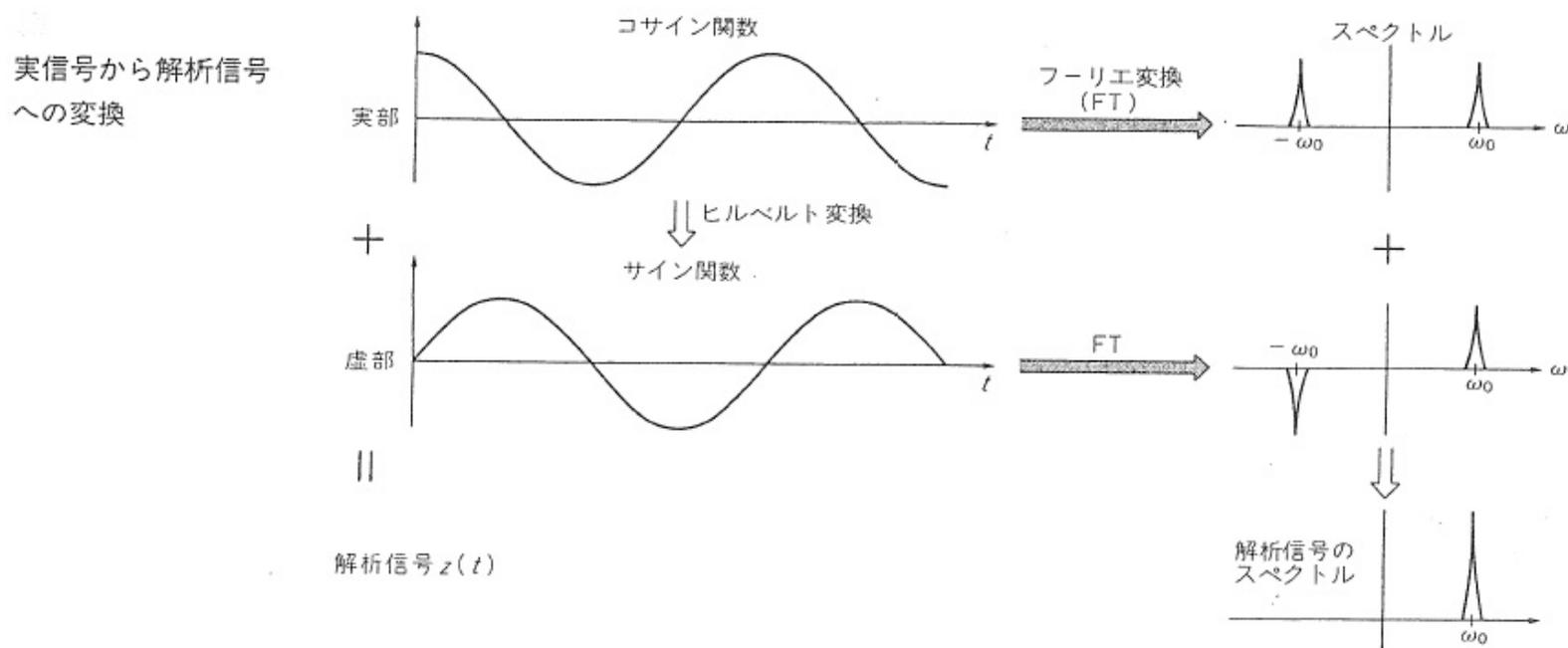
自己相関関数

$$R(\tau) \equiv \mathcal{F}^{-1}[P(\omega)] = \int s(t)^* s(t + \tau) dt \quad (7)$$

3 瞬時周波数と解析信号

解析信号

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \frac{2}{2\pi} \int_0^\infty S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= s(t) + \frac{j}{\pi} \int \frac{s(t')}{t-t'} dt'
 \end{aligned}
 \tag{10}$$



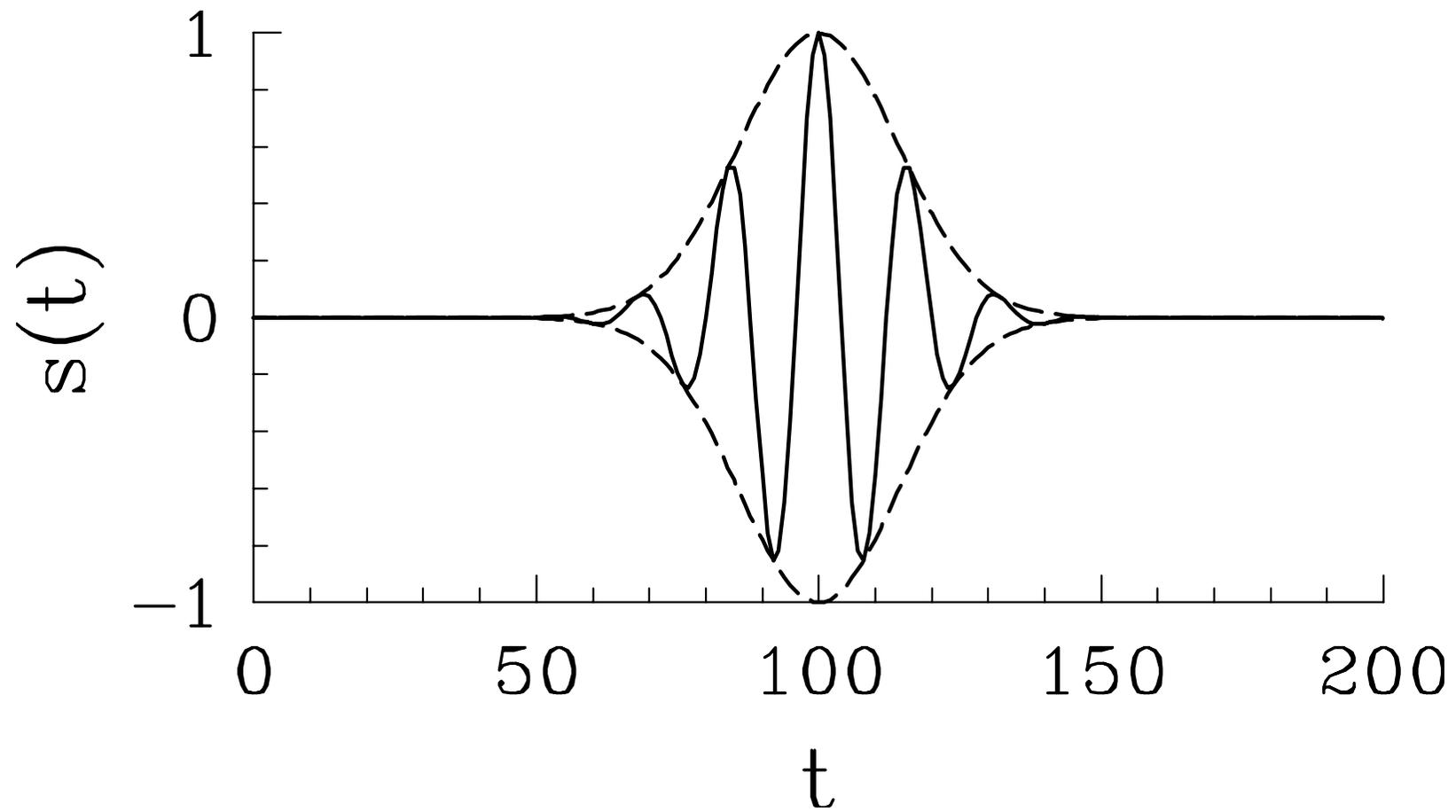


図 1. 解析信号を用いて求めた瞬時包絡線の例 (破線)。

4 短時間 Fourier 変換 (STFT)

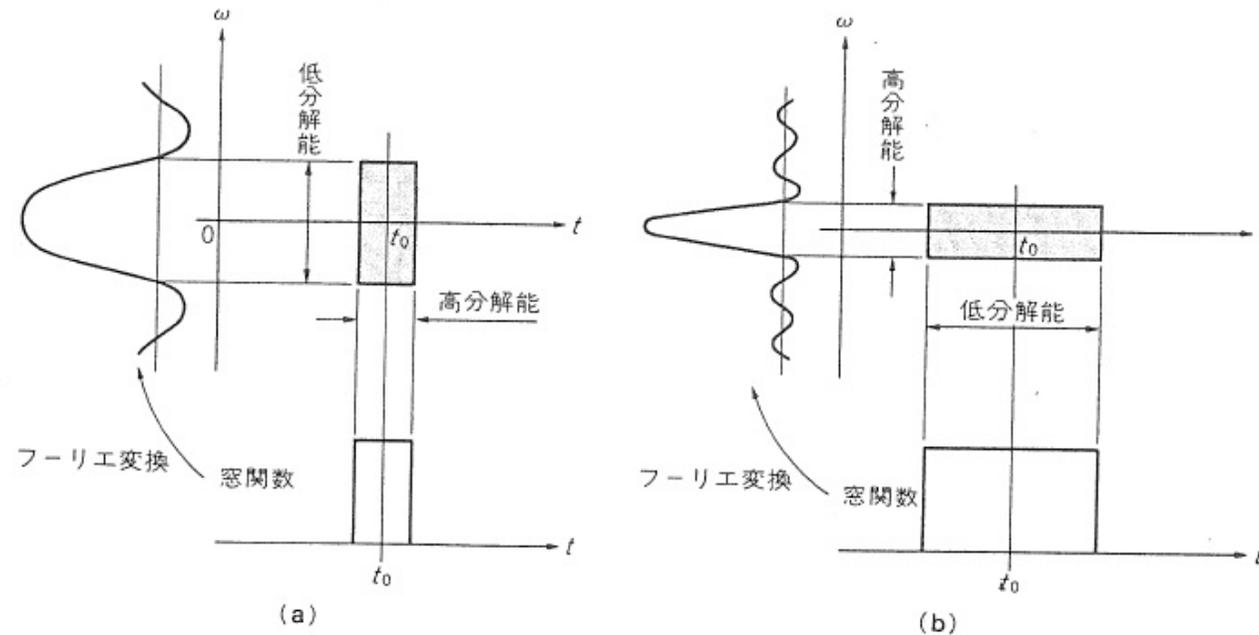
短時間 Fourier 変換 (Short-Time Fourier Transform; STFT)

$$S(t, \omega) = \int s(t') g^*(t' - t) e^{-j\omega t'} dt' \quad (11)$$

spectrogram

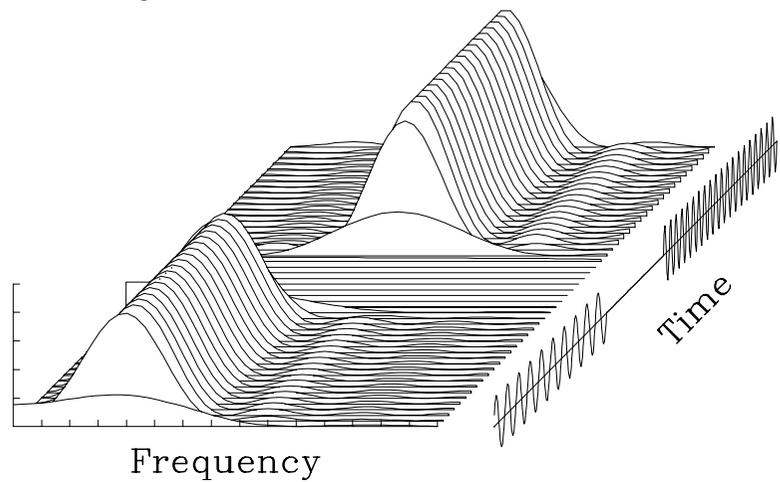
$$P(t, \omega) = |S(t, \omega)|^2 \quad (12)$$

STFT の時間分解能
とスペクトル分解能



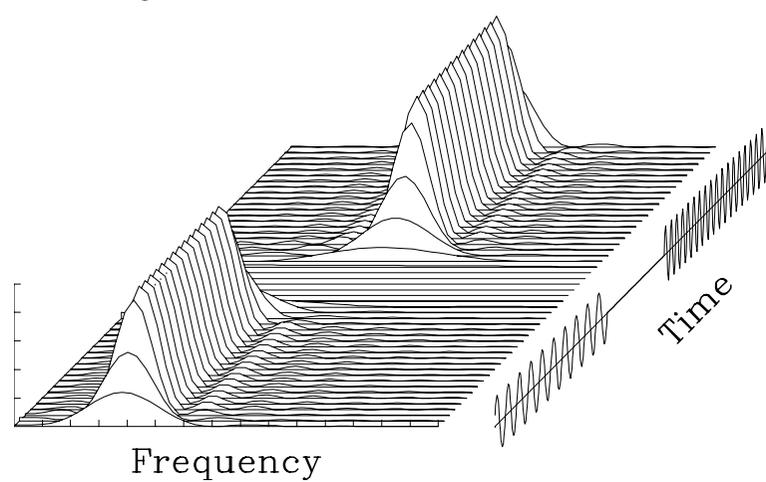
Spectrogram with STFT

$T=0.1T_0$



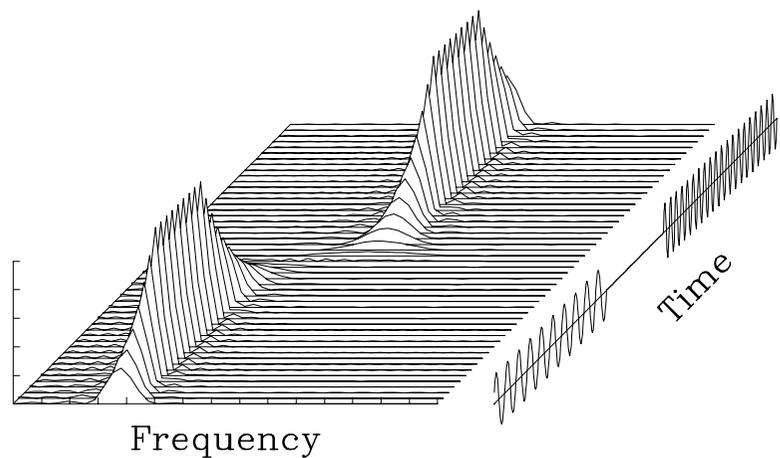
Spectrogram with STFT

$T=0.2T_0$



Spectrogram with STFT

$T=0.5T_0$



Spectrogram with STFT

$T=1.0T_0$

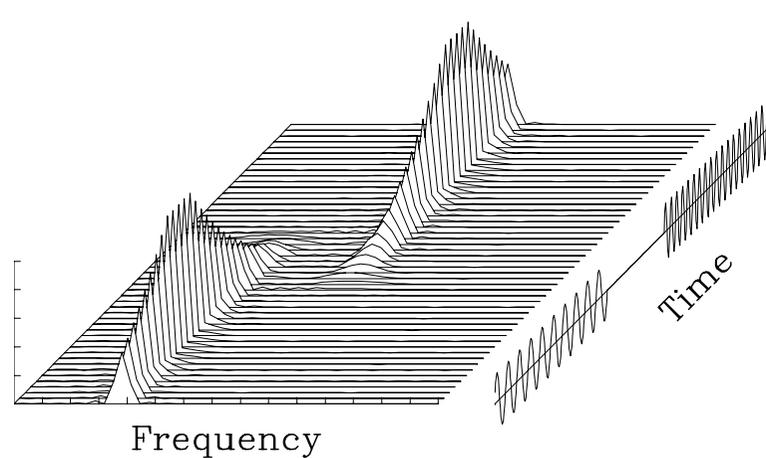
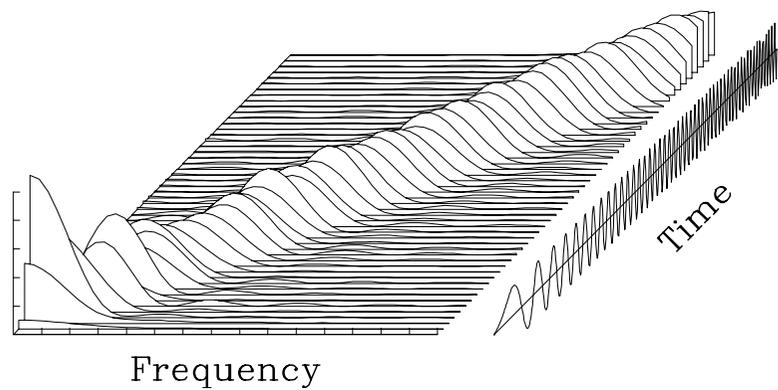


図 2. two-tone 信号から STFT 法により求めた spectrogram。

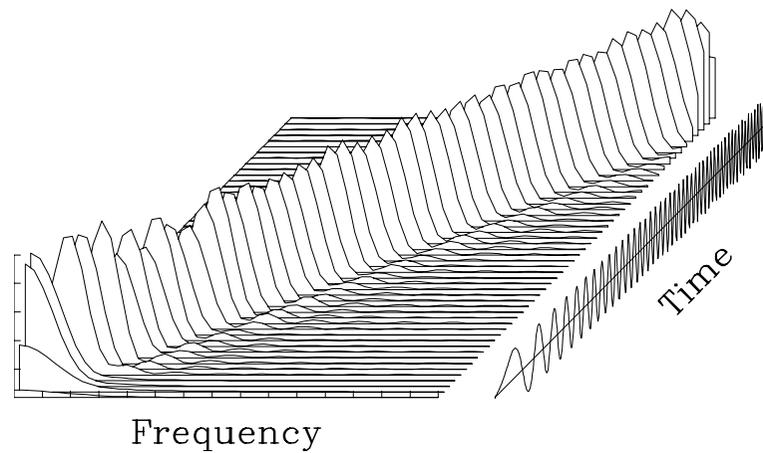
Spectrogram with STFT

$T=0.1T_0$



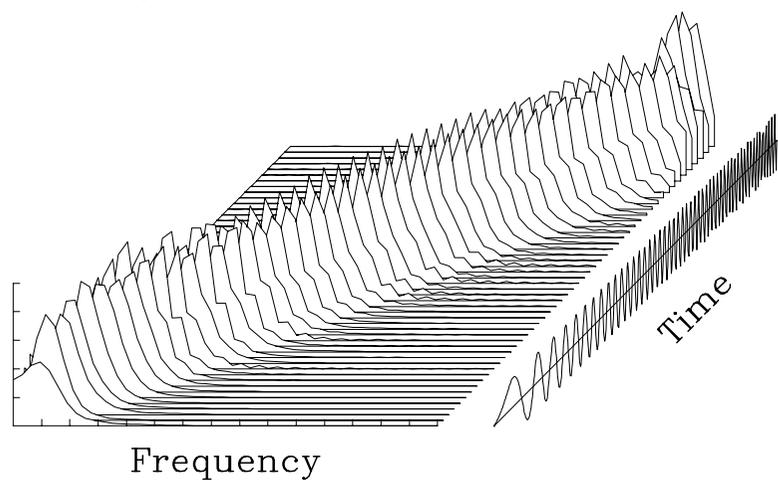
Spectrogram with STFT

$T=0.2T_0$



Spectrogram with STFT

$T=0.5T_0$



Spectrogram with STFT

$T=1.0T_0$

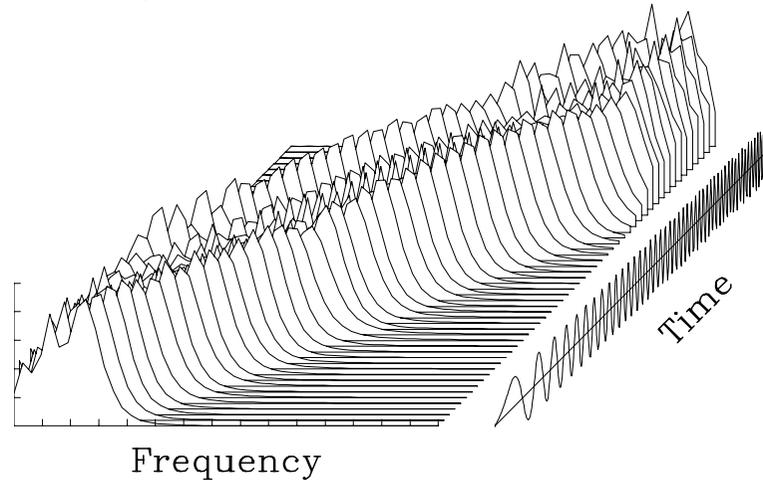


図 3. chirp 信号から STFT 法により求めた spectrogram。

5 Wigner 分布

Wigner 分布

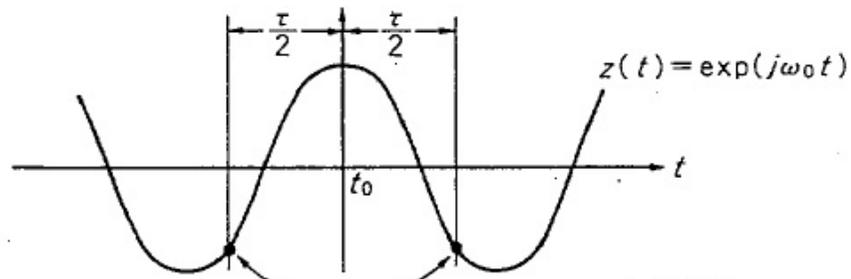
$$P(t, \omega) = \int s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (14)$$

$$= 2 \int s(t + \tau) s^*(t - \tau) e^{-j2\omega\tau} d\tau \quad (15)$$

周辺分布の保存

$$\int P(t, \omega) d\omega = |s(t)|^2 \quad (16)$$

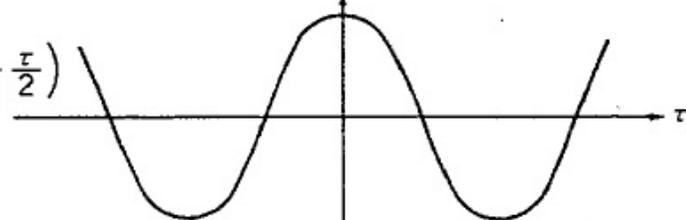
$$\int P(t, \omega) dt = |S(\omega)|^2 \quad (17)$$



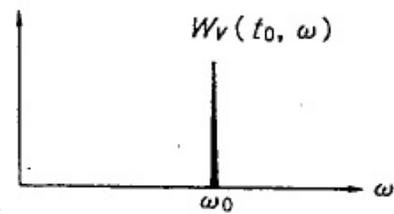
※expは自然対数

相関

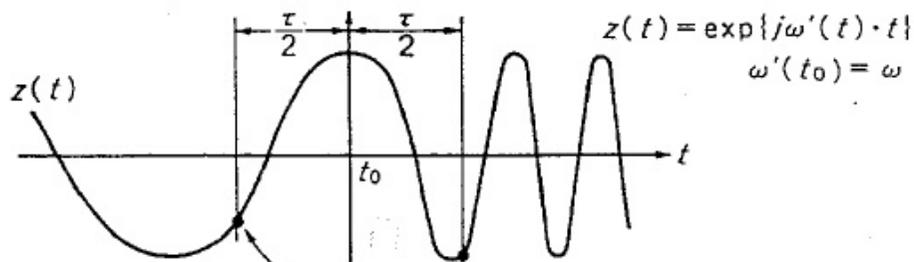
$z(t_0 + \frac{\tau}{2})z^*(t_0 - \frac{\tau}{2})$



FT

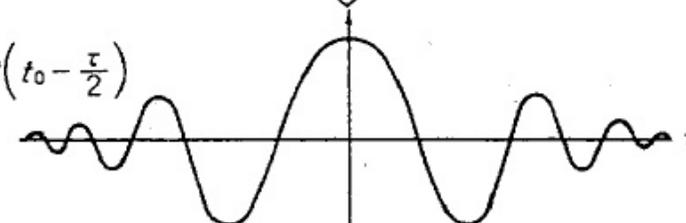


(a) $\omega'(t)$ が一定の場合

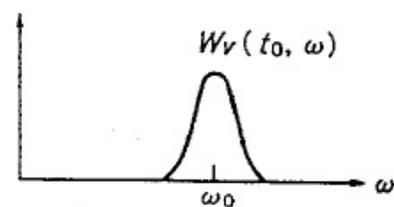


相関

$z(t_0 + \frac{\tau}{2})z^*(t_0 - \frac{\tau}{2})$



FT



(b) $\omega'(t)$ が変化する場合

Wigner distribution

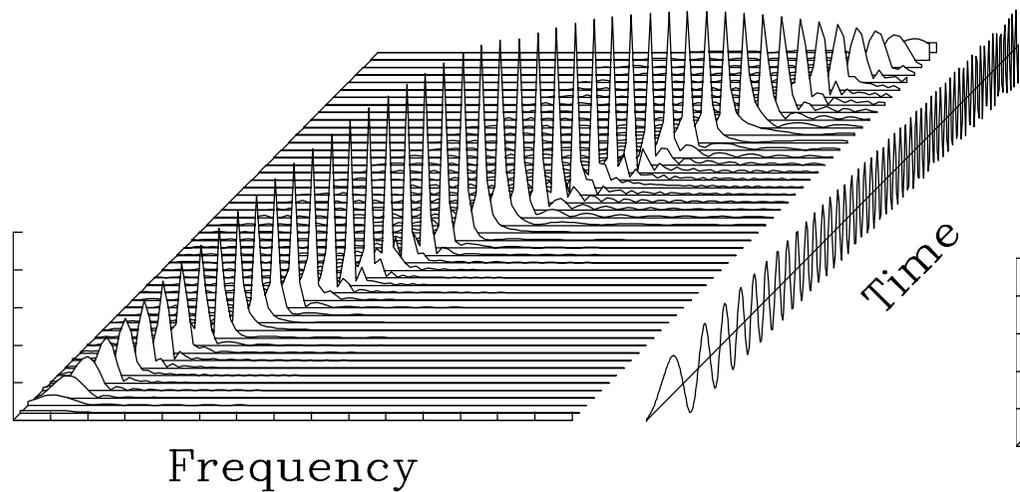


図 4. chirp 信号に Wigner 分布を適用した例。

Wigner distribution
(without analytic function)

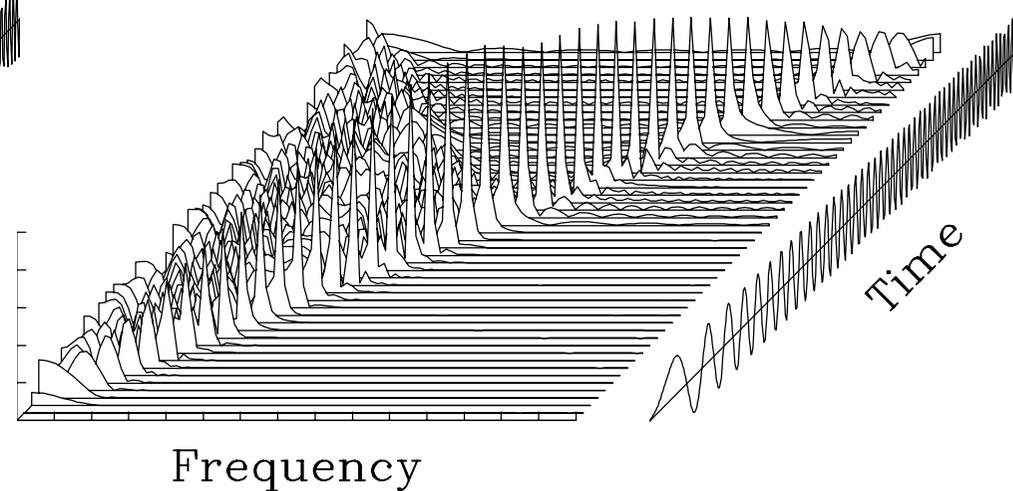


図 5. 解析信号を用いずに Wigner 分布を適用した場合。

Wigner distribution

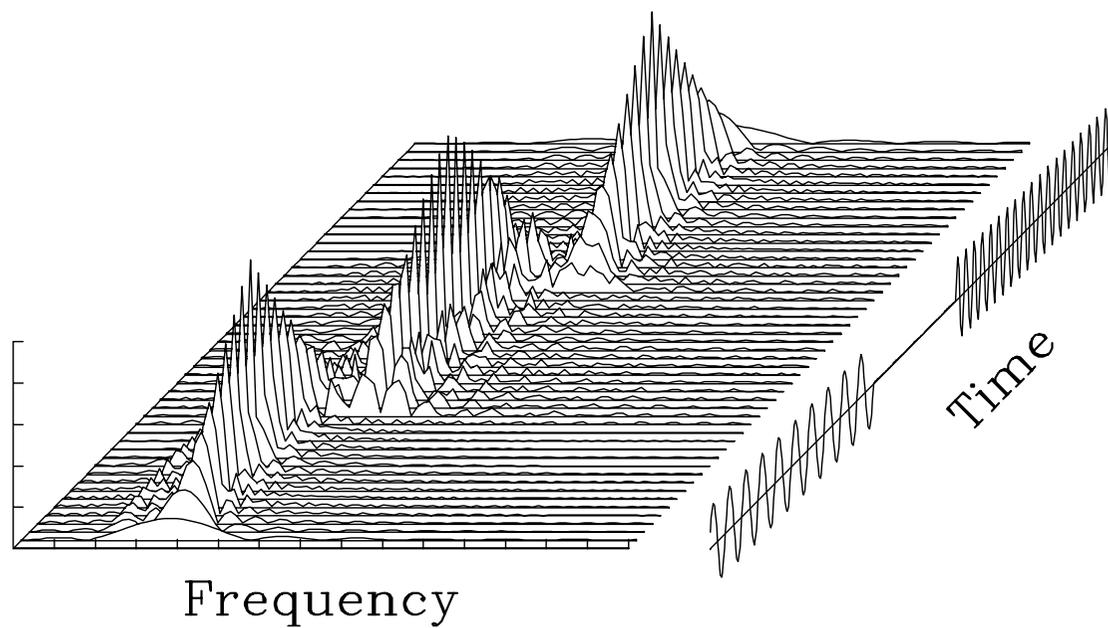


図 6. Wigner 分布による偽像の出現例。

6 ambiguity 関数

ambiguity 関数

$$A(\theta, \tau) = \int s(t + \frac{\tau}{2})s^*(t - \frac{\tau}{2})e^{-j\theta t} dt \quad (18)$$

$\theta = 0$ とすると、自己相関関数

$$\begin{aligned} A(0, \tau) &= \int s(t + \frac{\tau}{2})s^*(t - \frac{\tau}{2})dt \\ &= \int s^*(t)s(t + \tau)dt \\ &= R(\tau) \end{aligned} \quad (19)$$

$\tau = 0$ とすると、周波数領域における自己相関関数

$$\begin{aligned} A(\theta, 0) &= \int |s(t)|^2 e^{-j\theta t} dt \\ &= \int S^*(\omega)S(\omega + \theta)d\omega \end{aligned} \quad (20)$$

$A(\theta, \tau)$ は、 $s(t)$ の時間・周波数領域における 2次元の自己相関関数

Wigner 分布と ambiguity 関数の関係

$$A(\theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \int P(t, \omega) e^{-j(\theta t - \tau \omega)} dt d\omega \quad (21)$$

7 Wigner 分布の平滑化

平滑化関数 $\Phi(t, \omega)$ を用いた時間と周波数に関する畳み込み

$$\bar{P}(t, \omega) = \int \int \Phi(t - t', \omega - \omega') P(t', \omega') dt' d\omega' \quad (22)$$

一般化 ambiguity 関数

$$\bar{A}(\theta, \tau) = \phi(\theta, \tau) A(\theta, \tau) \quad (23)$$

核 (kernel) 関数

$$\phi(\theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \int \Phi(t, \omega) e^{-j(\theta t - \tau \omega)} dt d\omega \quad (24)$$

(Wigner 分布は $\phi(\theta, \tau) = 1$ の場合に相当)

$$\bar{P}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \int \int e^{-j\theta(t-t') - j\omega\tau} \phi(\theta, \tau) s(t' + \frac{\tau}{2}) s^*(t' - \frac{\tau}{2}) dt' d\tau d\theta \quad (25)$$

時変自己相関関数

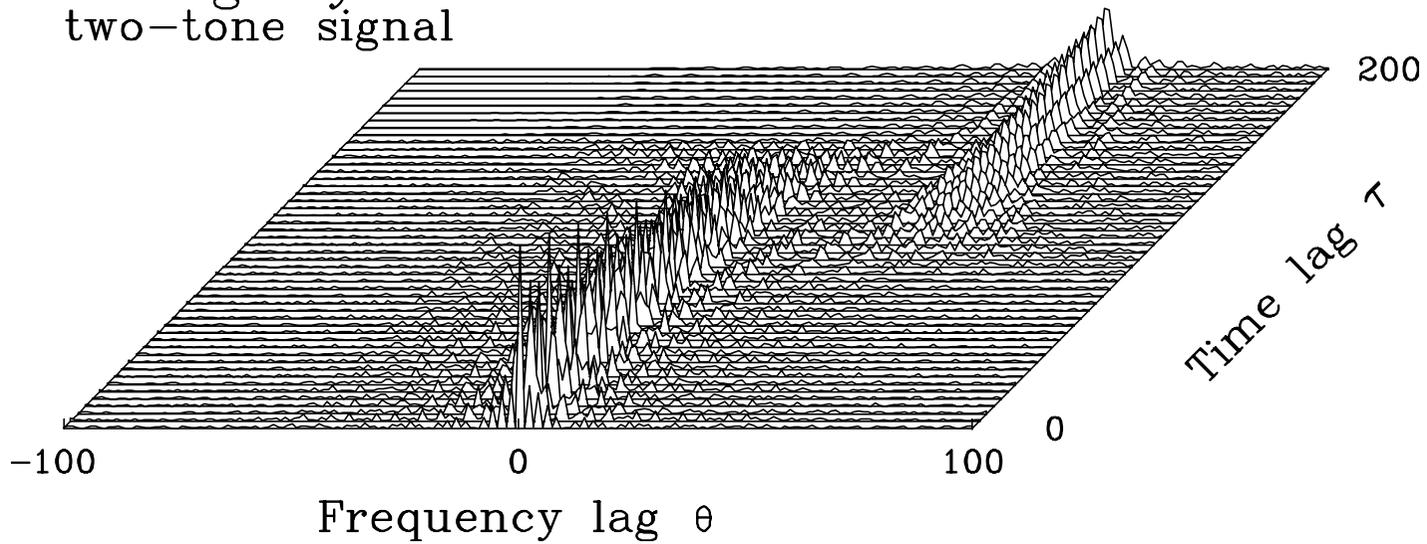
$$R(t, \tau) \equiv \frac{1}{2\pi} \int \bar{P}(t, \omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (26)$$

を用いると、

$$\bar{P}(t, \omega) = \int R(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (27)$$

$$R(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \int e^{-j\theta(t-t')} \phi(\theta, \tau) s(t' + \frac{\tau}{2}) s^*(t' - \frac{\tau}{2}) dt' d\theta \quad (28)$$

Ambiguity function
two-tone signal



Ambiguity function
chirp signal

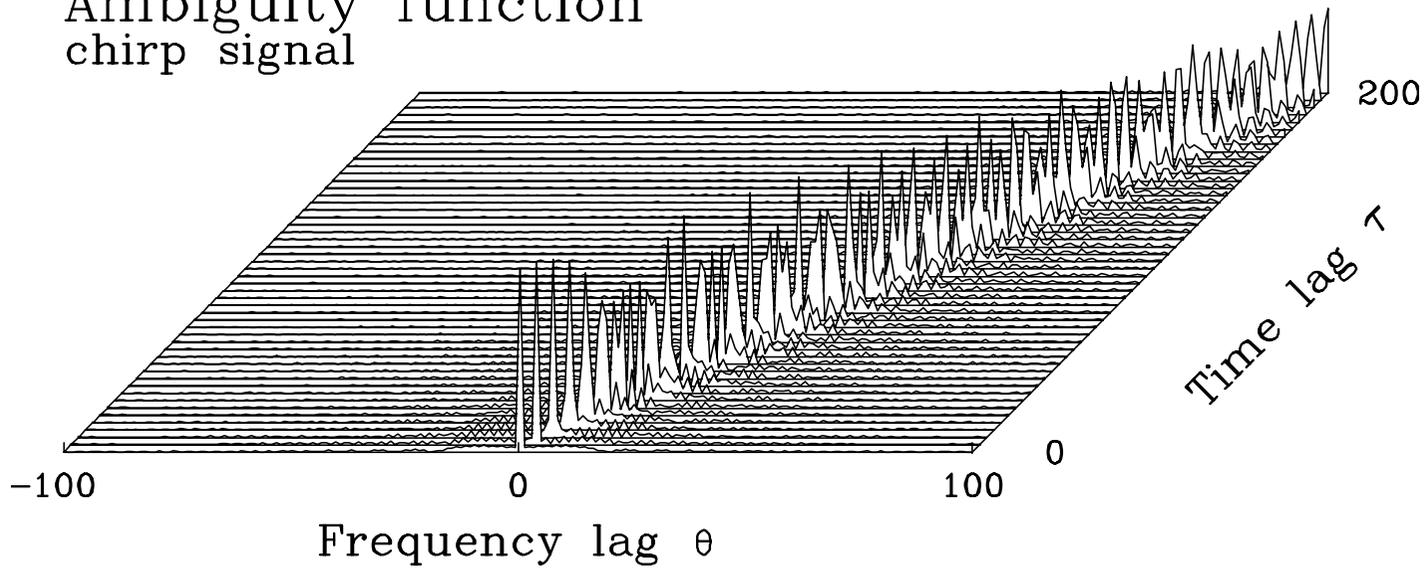


図 7. two-tone 信号および chirp 信号の ambiguity 関数。

7.1 平均化擬似 Wigner 分布 (SPWD)

平均化擬似 Wigner 分布 (Smoothed Pseudo Wigner Distribution、SPWD):
平滑化関数として、時間と周波数が分離した形を用いたもの

$$\Phi(t, \omega) = \Phi_1(t)\Phi_2(\omega) \quad (29)$$

Gauss 型関数の場合

$$\Phi(t, \omega) = \exp\left(-\frac{t^2}{\alpha^2} - \frac{\omega^2}{\beta^2}\right) \quad (30)$$

$$\phi(\theta, \tau) = \pi\alpha\beta \exp\left(-\frac{\alpha^2\theta^2}{4} - \frac{\beta^2\tau^2}{4}\right) \quad (31)$$

$$R(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{\pi}\beta \exp\left(-\frac{(t-t')^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2\tau^2}{4}\right) s\left(t' + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t' - \frac{\tau}{2}\right) dt' \quad (32)$$

Smoothed-Wigner: $\alpha = 4.0, \beta = 1.0$ Smoothed-Wigner: $\alpha = 8.0, \beta = 2.0$

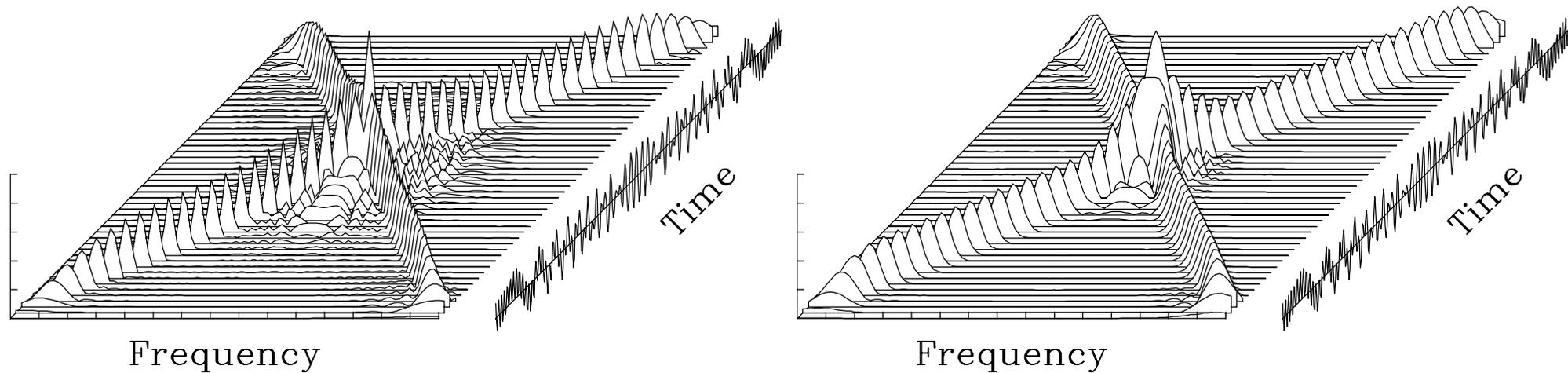


図 8. cross-chirp 信号に SPWD 法を適用した例。

7.2 Choi-Williams 分布

$$\phi(\theta, \tau) = \exp\left(\frac{\theta^2 \tau^2}{\sigma}\right) \quad (33)$$

$$R(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau^2/\sigma}} \exp\left(-\frac{(t-t')^2}{4\tau^2/\sigma}\right) s\left(t' + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t' - \frac{\tau}{2}\right) dt' \quad (34)$$

Choi-Williams: $\sigma = 2.0$

Choi-Williams: $\sigma = 10.0$

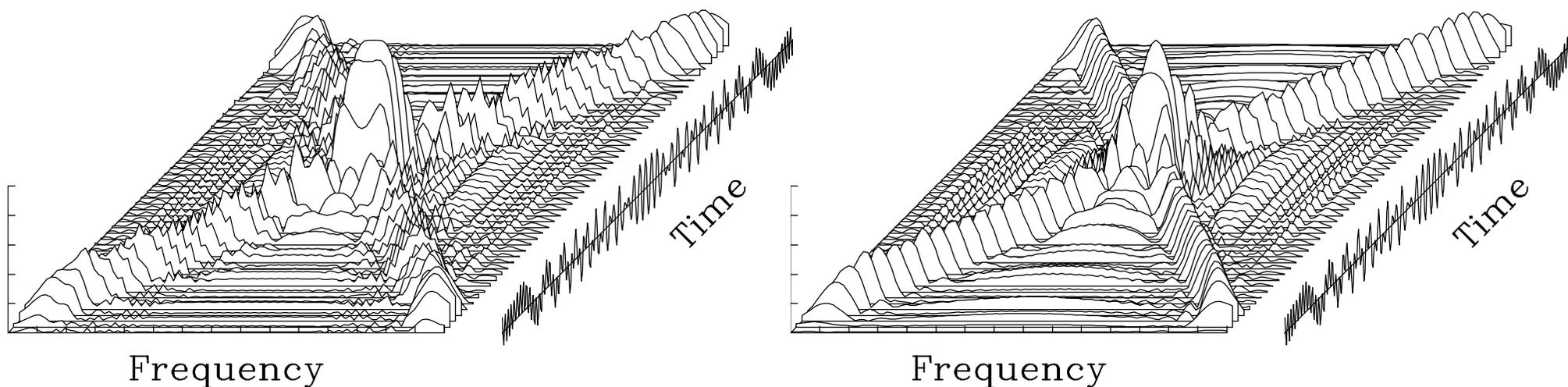


図 9. cross-chirp 信号に Choi-Williams 分布を適用した例。

Choi–Williams: $\sigma = 0.5$

Smoothed–Wigner: $\alpha = 5.0, \beta = 3.0$

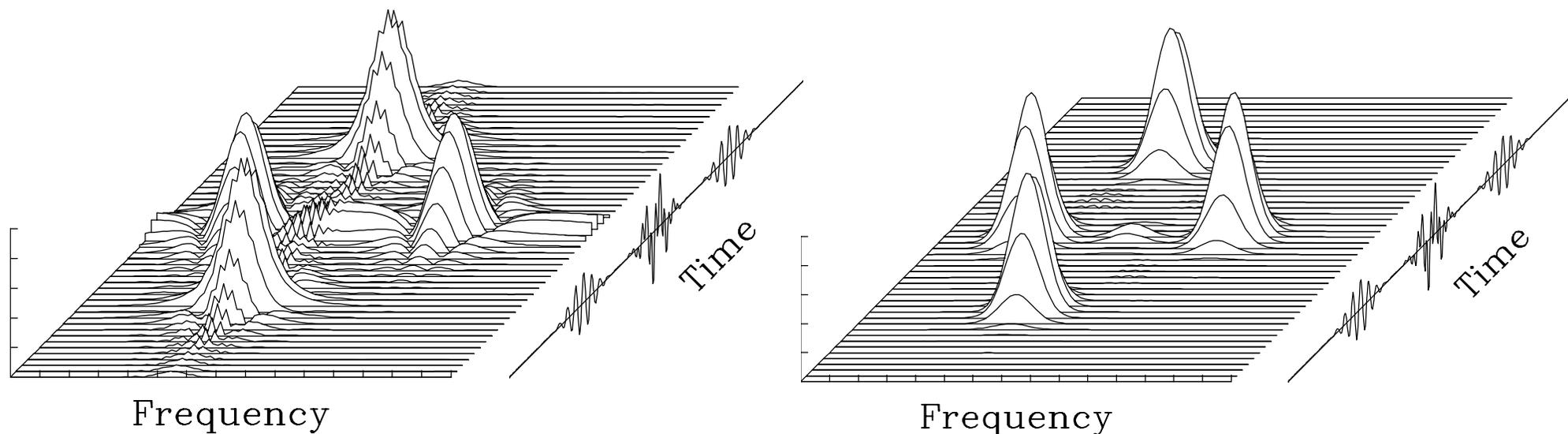


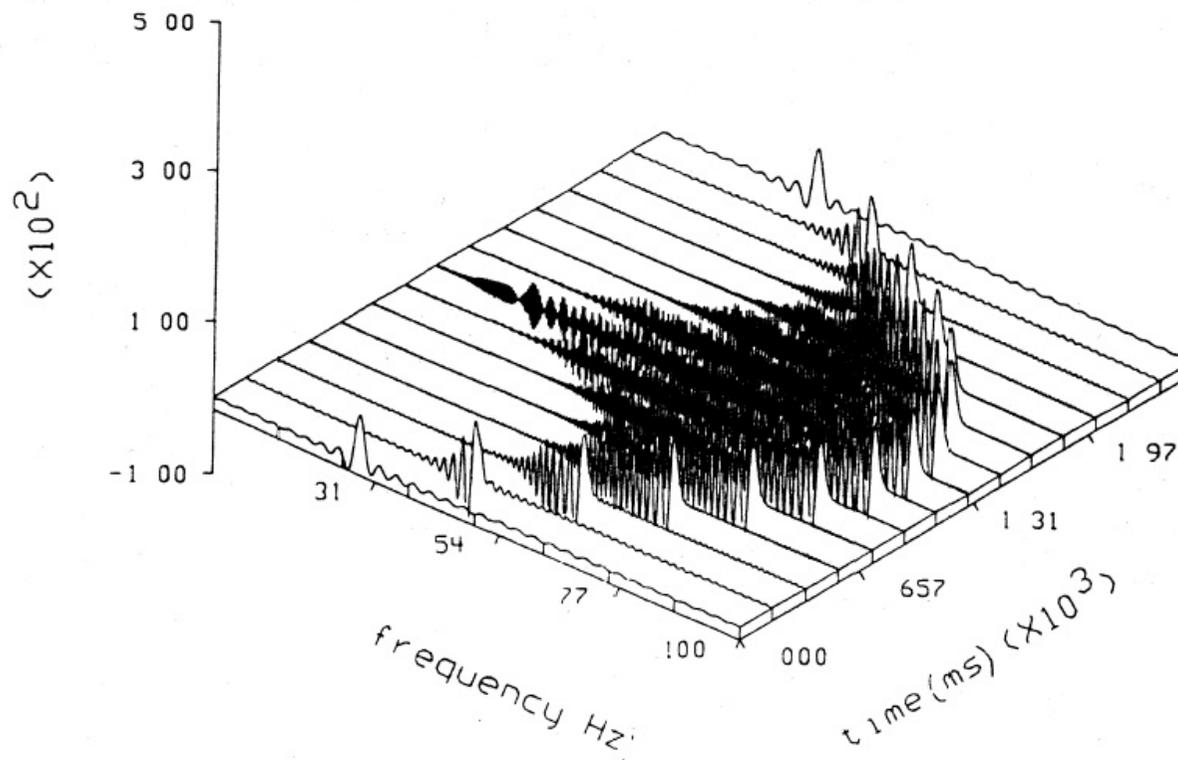
図 10. Choi-Williams 分布と SPWD の比較。

7.3 Polynomial Wigner-Ville 分布

Wigner 分布 (Wigner-Ville Distribution; WVD) の問題点 :

- 複数の周波数成分を含む信号に弱い
- 周波数の非直線的变化に弱い

後者の改善法 : PWVD(Polynomial WVD)



解析信号 $z(t) = e^{j\phi(t)}$ の WVD

$$W_z(t, f) = \mathcal{F}\left[z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] = \mathcal{F}\left[e^{j\{\phi(t+\tau/2) - \phi(t-\tau/2)\}}\right] \quad (35)$$

この時の瞬時周波数 $f_i(t, \tau)$ は

$$f_i(t, \tau) = \{\phi(t + \tau/2) - \phi(t - \tau/2)\} / 2\pi\tau \quad (36)$$

これは単純差分フィルタに相当するため、線形 FM 以外ではスプリアス応答を生じる。

位相が多項式

$$\phi(t) = \sum_{i=0}^p a_i t^i \quad (37)$$

で与えられる時、瞬時周波数は次のフィルタにより推定される。

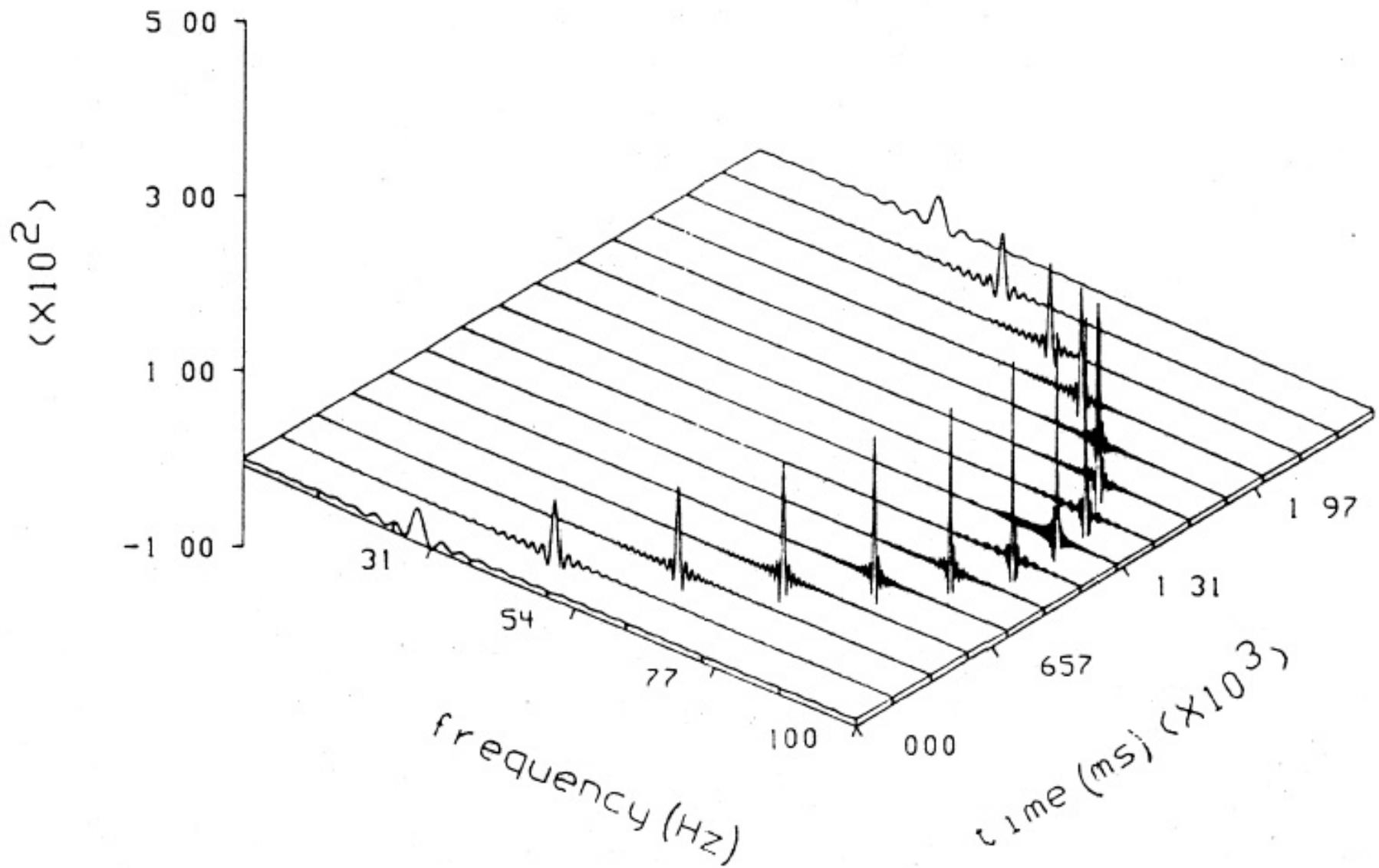
$$f_i(t, \tau) = \frac{1}{2\pi\tau} \sum_{k=-q/2}^{q/2} b_k \phi(t + c_k \tau) \quad (38)$$

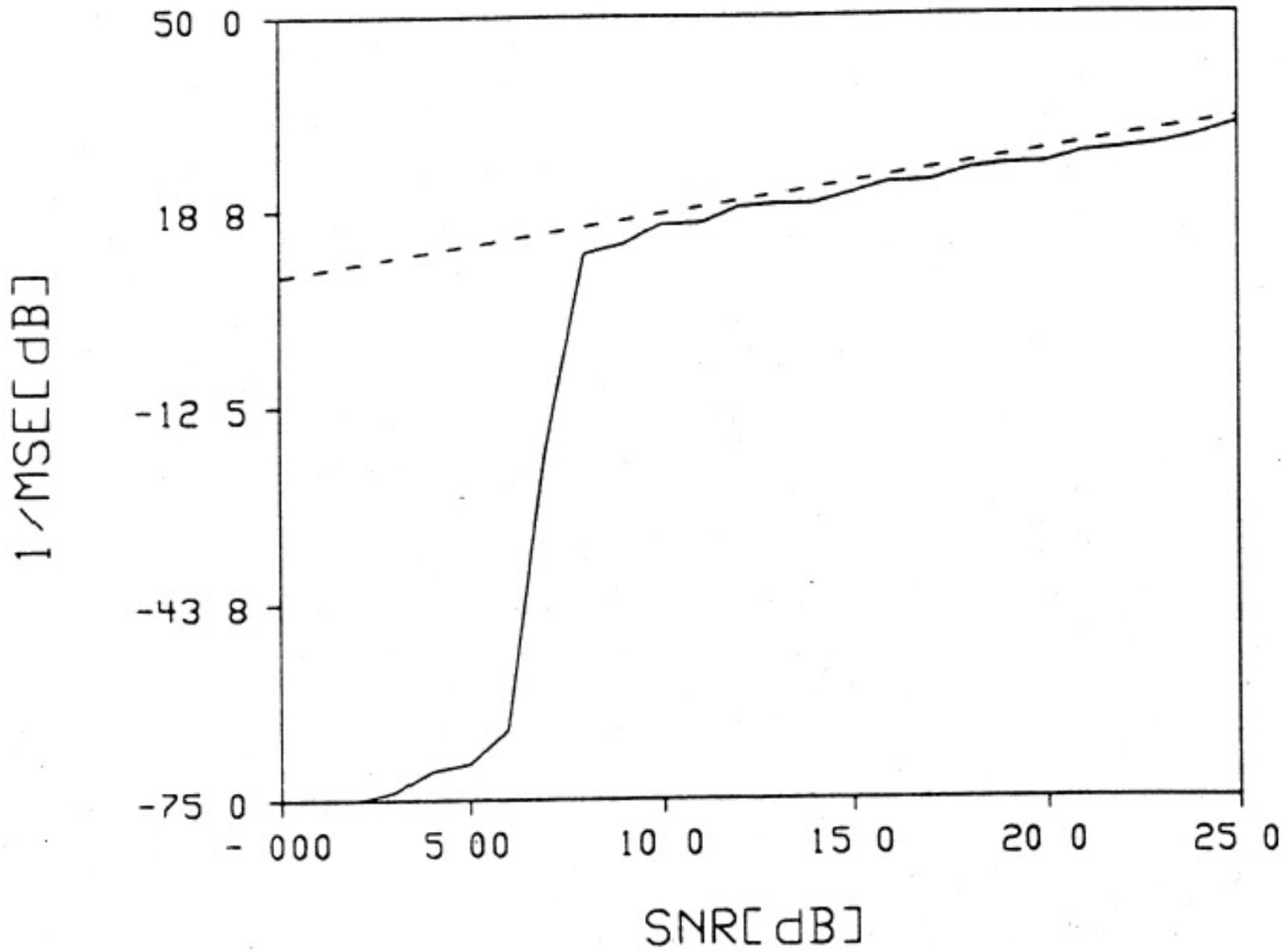
これに対応する Polynomial WVD は

$$W_z^g(t, f) = \mathcal{F}[K_z^g(t, \tau)] \quad (39)$$

$$K_z^g(t, \tau) = \prod_{k=-q/2}^{q/2} [z(t + c_k \tau)]^{b_k} \quad (40)$$

の形となり、非線形に瞬時周波数が変化する信号に対してもよく追従することが知られている。





7.4 Time-Frequency Peak Filtering

信号が 1 価関数であることに着目し、与えられた信号を瞬時周波数とする時系列を生成すれば、これは常に単一周波数信号となることに注目し、これに WVD を適用して雑音除去する、という方法。

所望信号を確定信号 $x(t)$ とランダム雑音 $n(t)$ の和とする。

$$s(t) = x(t) + n(t) \quad (41)$$

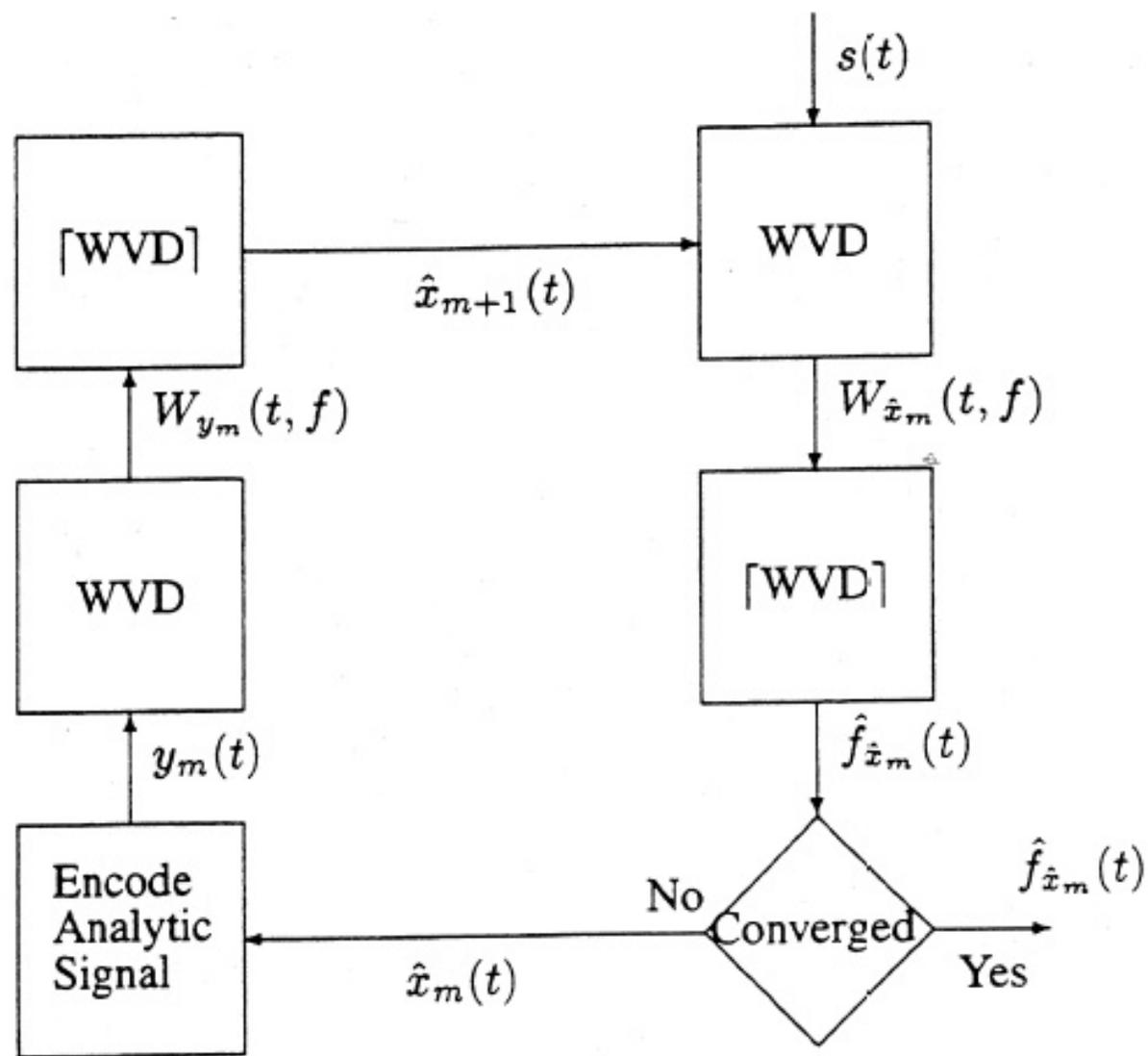
これを瞬時周波数とする解析信号は、

$$y_s(t) = e^{j2\pi \int_{-\infty}^t s(\lambda) d\lambda} = y_x(t) y_n(t) \quad (42)$$

$$y_x(t) = e^{j2\pi \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda} \quad (43)$$

$$y_n(t) = e^{j2\pi \int_{-\infty}^t n(\lambda) d\lambda} \quad (44)$$

となる。 $y_s(t)$ の WVD を求めれば、それが最大となる周波数は、ほぼ $x(t)$ に対応する。

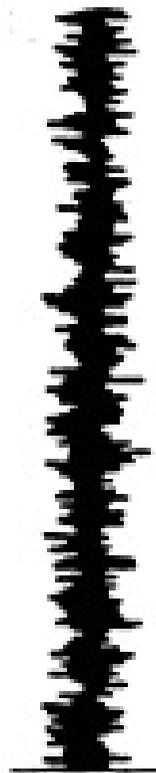


Page 1,000

HALF 1984-4

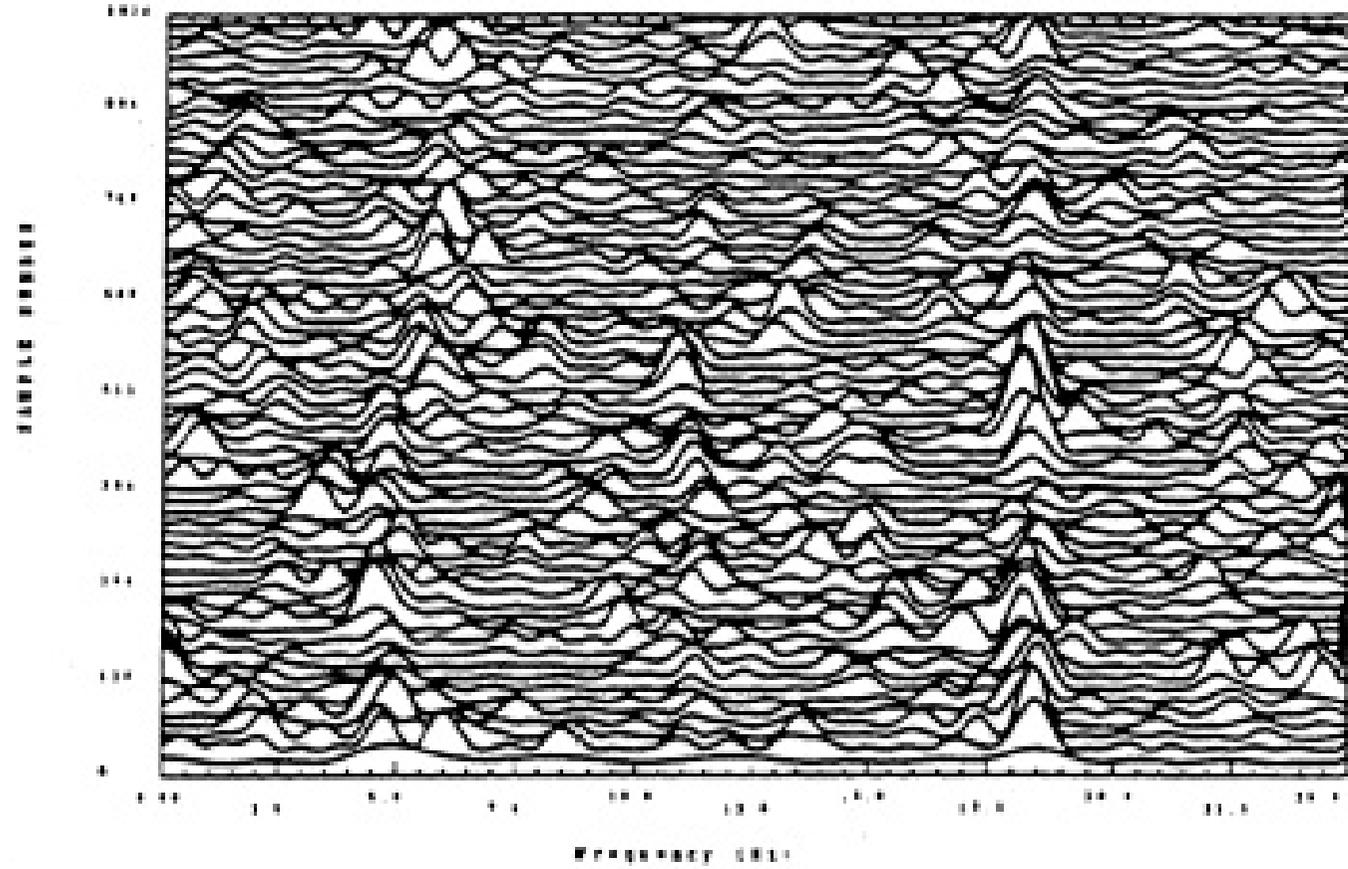
2000 000

Rectangular - Length=14



Signal

Spectrum



Frequency (Hz)



Page 10.000

Signal 10000.0

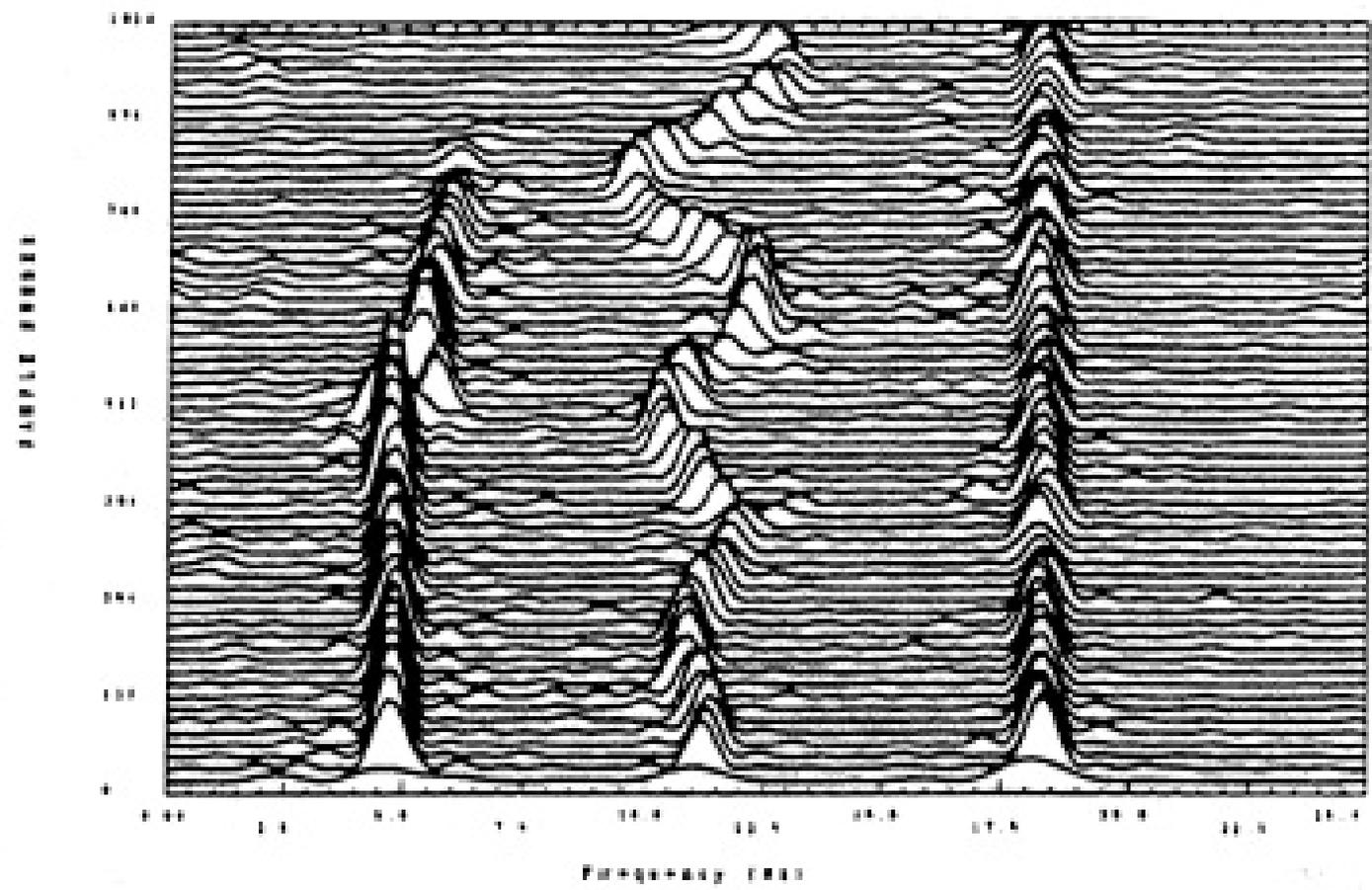
plotd.out

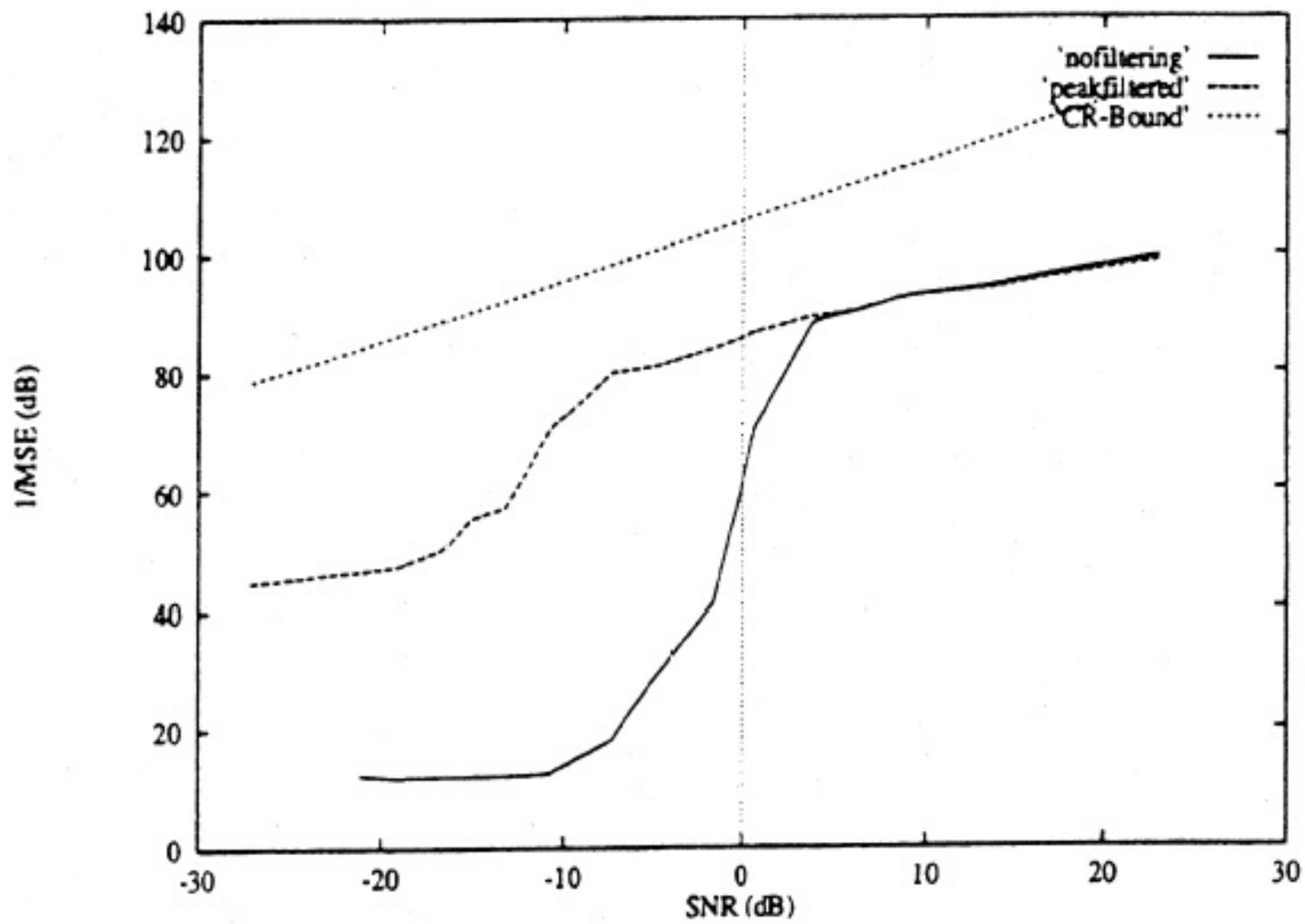
Rectangular, Length=64



Signal

Spectrum





7.5 平滑化 Wigner 分布としての spectrogram

$$|S(t, \omega)|^2 = \iint P_g(t' - t, \omega' - \omega) P(t', \omega') dt' d\omega' \quad (45)$$

($P_g(t, \omega)$ は、窓関数 $g(t)$ 自身の Wigner 分布)

平滑化関数は

$$\Phi(t, \omega) = P_g(-t, -\omega) = \int g\left(-t + \frac{\tau}{2}\right) g^*\left(-t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\omega\tau} d\tau \quad (46)$$

窓関数として Gauss 型関数 $g(t) = \exp(-t^2/\gamma^2)$ を選ぶと、

$$\Phi(t, \omega) = \sqrt{2\pi}\gamma \exp\left(-\frac{2t^2}{\gamma^2} - \frac{\gamma^2\omega^2}{2}\right) \quad (47)$$

SPWD において $\alpha = \gamma/\sqrt{2}$ 、 $\beta = \sqrt{2}/\gamma$ とおいた場合に相当

$$\implies \alpha\beta = 1$$

8 wavelet 変換

8.1 連続 wavelet 変換

$$W(t, a) = \int s(t') \frac{1}{\sqrt{a}} h^* \left(\frac{t' - t}{a} \right) dt' \quad (49)$$

$h(t)$: analysis wavelet

$a = \omega_0 / \omega$: スケール

t : シフト

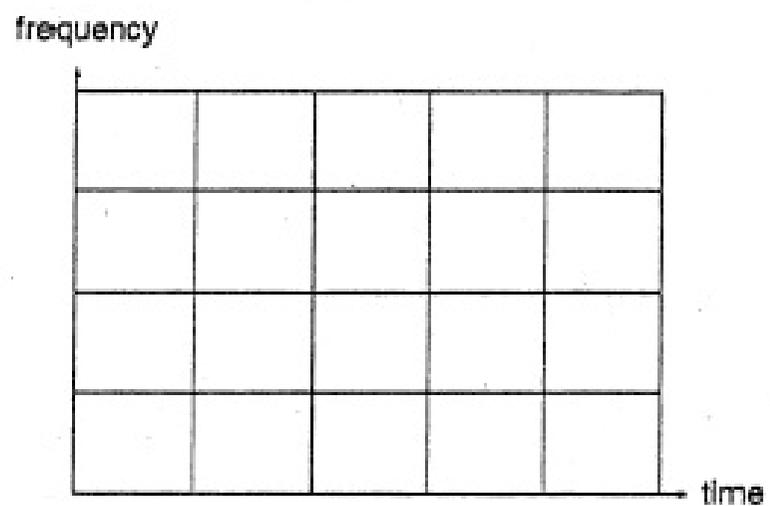
$$h(t) = g(t) e^{-j\omega_0 t} \quad (50)$$

とおくと、

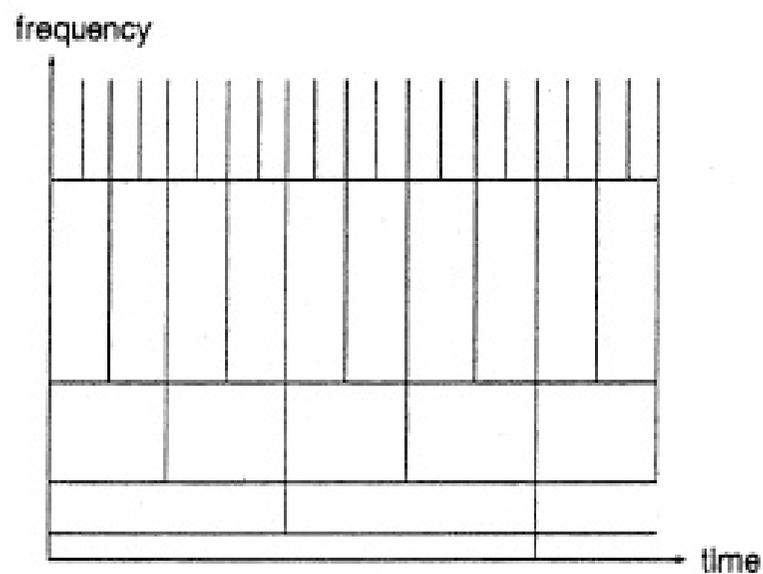
$$W(t, \omega) = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} e^{j\omega t} \int s(t') g^* \left(\frac{\omega}{\omega_0} (t' - t) \right) e^{-j\omega t'} dt' \quad (51)$$

STFT において窓関数 $g(t)$ を周波数に比例して伸縮させたことに相当

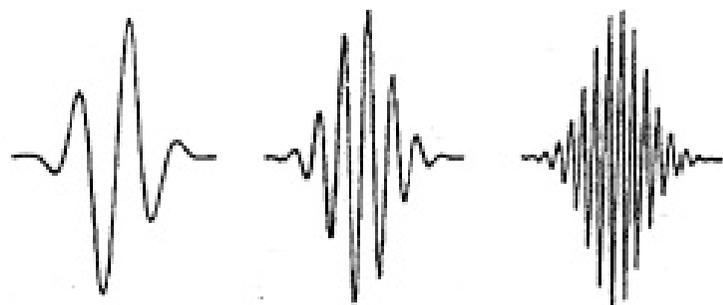
a)



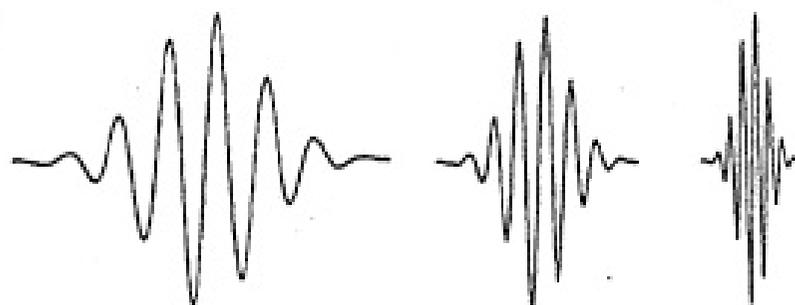
b)



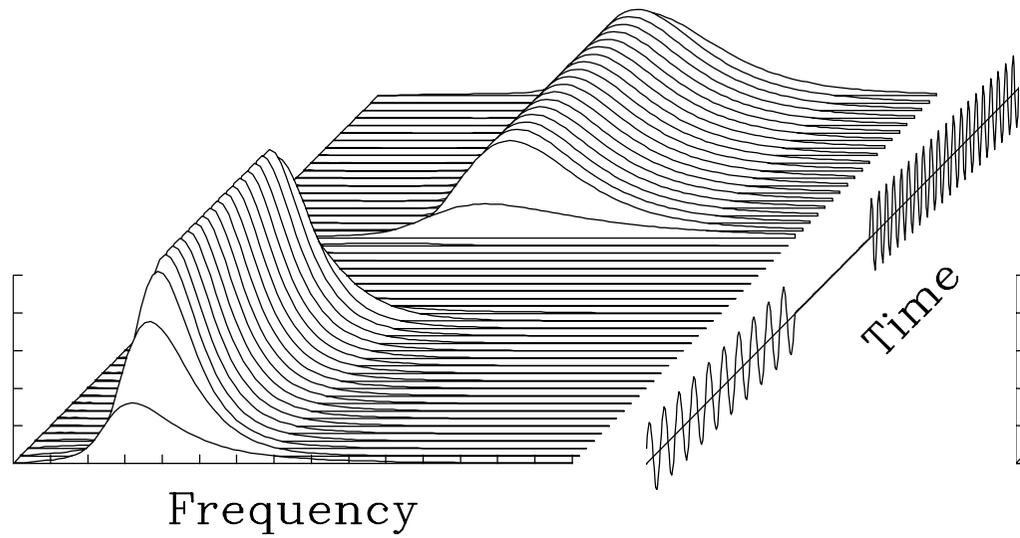
c)



d)



Scalogram: $\gamma = 5.0$



Scalogram: $\gamma = 20.0$

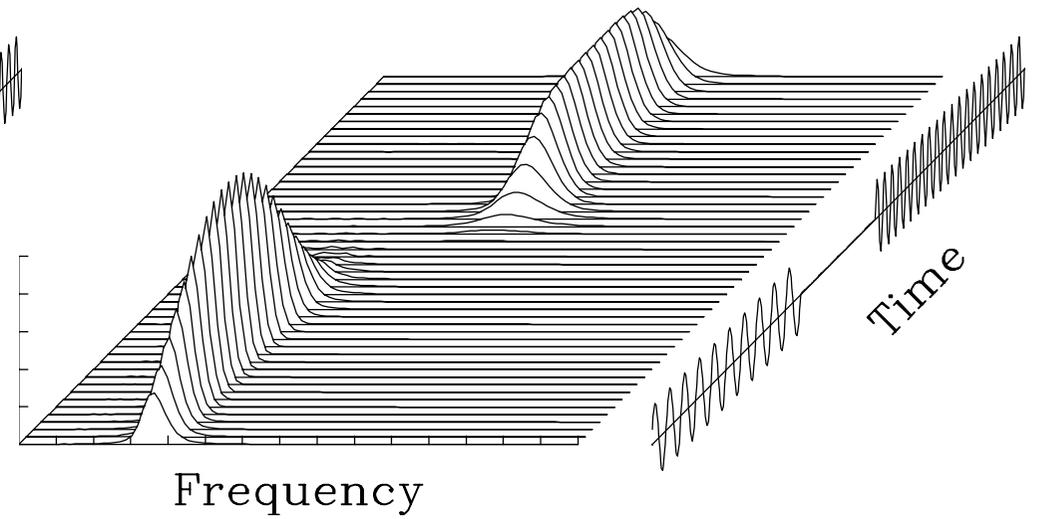


図 11. two-tone 信号の scalogram の例。ただし横軸はスケール a を周波数 ω に換算したものである。

8.2 平滑化 Wigner 分布としての scalogram

$$|W(t, a)|^2 = \iint P_h \left(\frac{t' - t}{a}, a\omega' \right) P(t', \omega') dt' d\omega' \quad (52)$$

$P_h(t, \omega)$ は analysis wavelet $h(t)$ 自身の Wigner 分布

a を ω に置き換えると、

$$|W(t, \omega)|^2 = \iint P_h \left(\frac{\omega}{\omega_0}(t' - t), \omega_0 \frac{\omega'}{\omega} \right) P(t', \omega') dt' d\omega' \quad (53)$$

affine 平滑化 Wigner 分布の一般形

$$\tilde{P}_a(t, \omega) = \iint \Psi \left(\omega(t - t'), \frac{\omega'}{\omega} \right) P(t', \omega') dt' d\omega' \quad (54)$$

wavelet 変換は、

$$\Psi_a(\alpha, \beta) = P_h \left(-\frac{\alpha}{\omega_0}, \omega_0 \beta \right) \quad (55)$$

$$= \int h \left(-\frac{\alpha}{\omega_0} + \frac{\tau}{2} \right) h^* \left(-\frac{\alpha}{\omega_0} - \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\omega_0 \beta \tau} d\tau \quad (56)$$

と置いた場合。

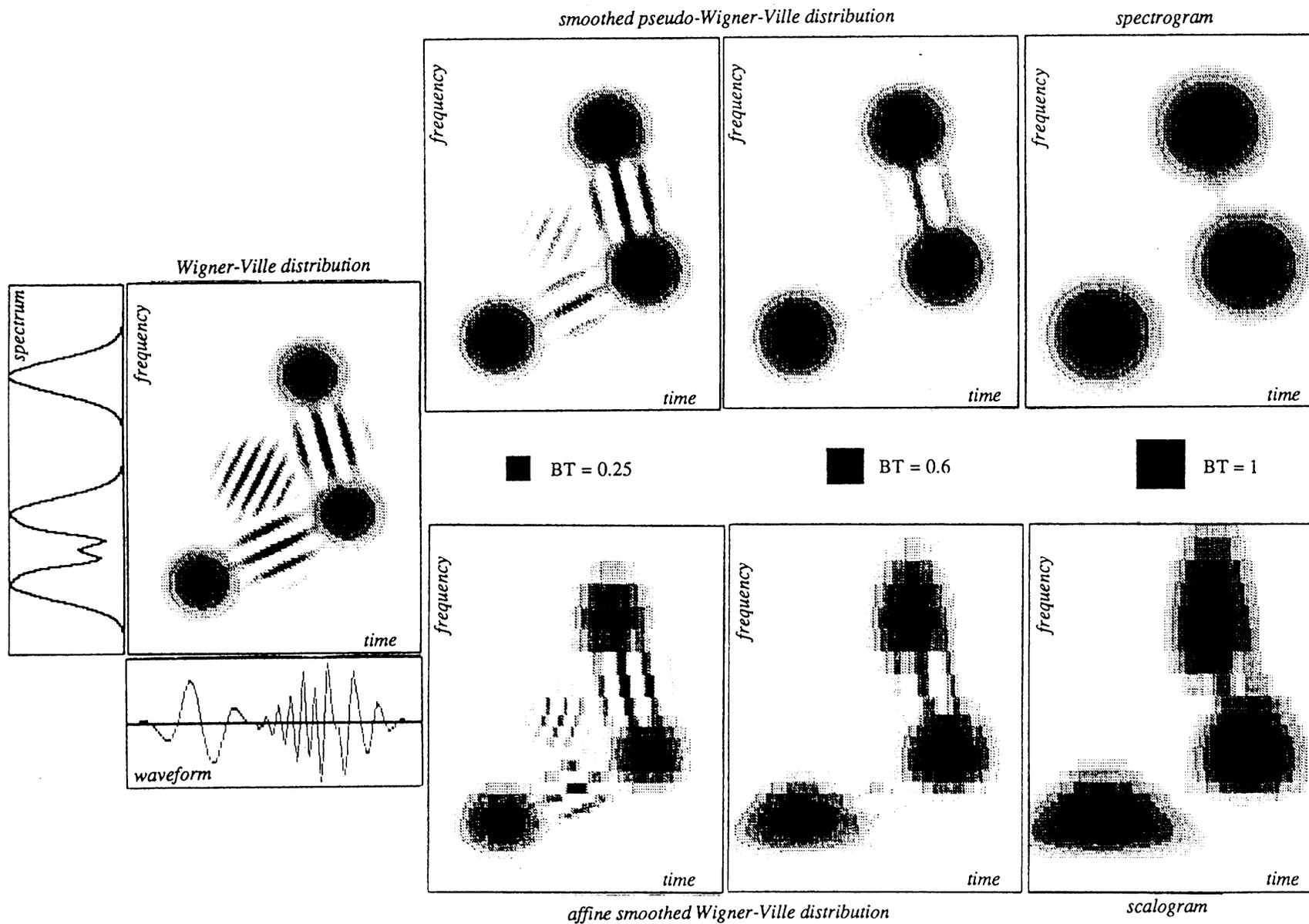


図 12. 平滑化された Wigner 分布としての spectrogram と scalogram。

8.3 離散 wavelet 変換

周波数領域で有限のサポートを持つ Meyer の方法

$$W(t, a) = \int s(t') h_{a,t}^*(t') dt' \quad (57)$$

$$h_{a,t}(t') = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t' - t}{a}\right) \quad (58)$$

離散化すると

$$w_{i,k} = \int s(t) h_{i,k}^*(t) dt \quad (59)$$

$$h_{i,k} = 2^{i/2} h(2^i t - k) \quad (60)$$

ここで $h_{i,k}$ が正規直交系を構成すれば、逆に

$$s(t) = \sum_i \sum_k w_{i,k} h_{i,k}(t) \quad (61)$$

Meyer の analysis wavelet

$$H(\omega) = e^{-j\omega/2} \sqrt{J(\omega/2)^2 - J(\omega)^2} \quad (62)$$

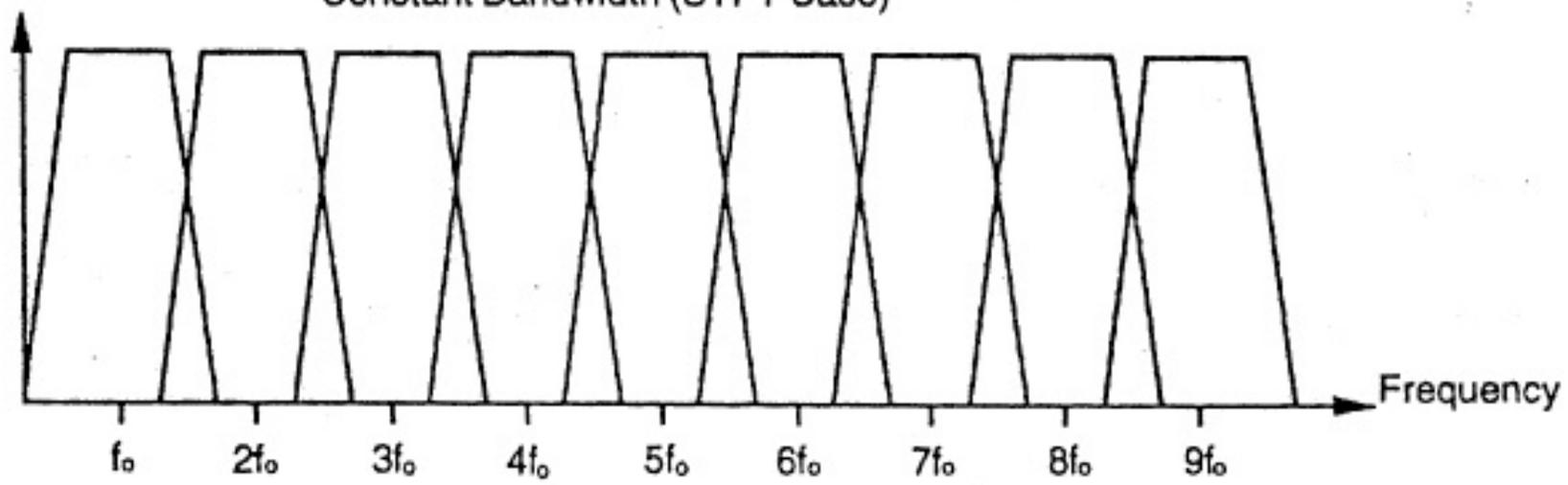
$$J(\omega) = \sqrt{K(\omega)K(-\omega)}$$

$$K(\omega) = \frac{L(4\pi/3 - \omega)}{L(\omega - 2\pi/3) + L(4\pi/3 - \omega)}$$

$$L(\omega) = \begin{cases} \exp(-1/\omega^2) & (\omega > 0) \\ 0 & (\omega \leq 0) \end{cases}$$

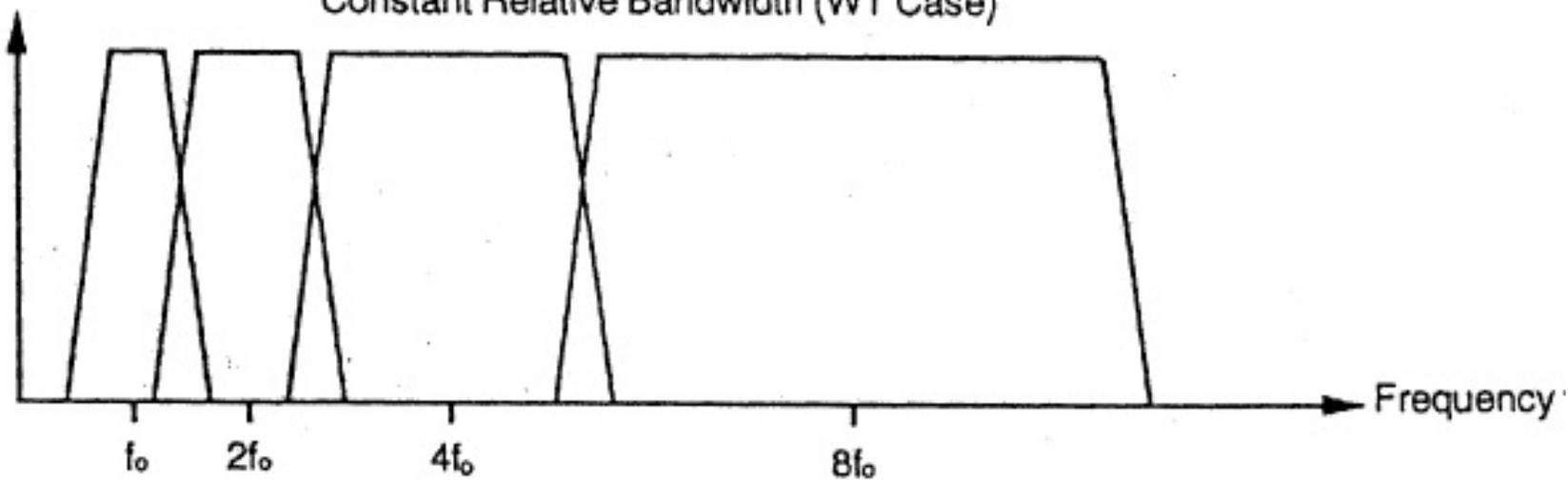
a)

Constant Bandwidth (STFT Case)



b)

Constant Relative Bandwidth (WT Case)



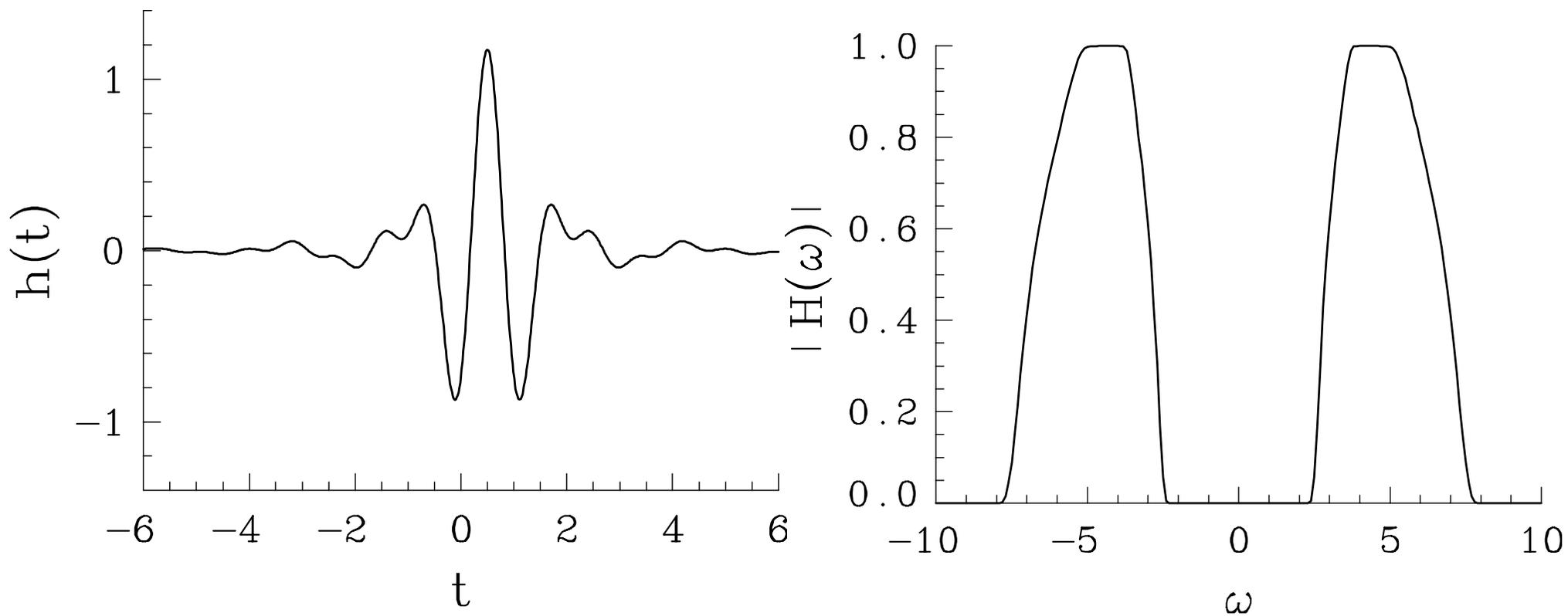


図 13. 正規直交基底を構成する analysis wavelet の例とその Fourier 変換。

まとめ

- 時間分解能と周波数分解能に対する要求が相反しない場合は、古典的な STFT 法による spectrogram で十分
- Wigner 分布は最も高い分解能を有するが、偽像が問題となることが多く非実用的。Wigner 分布が問題なく適用できる場合には解析信号を用いて瞬時周波数を決定する方法が有効
- 偽像の除去には時間・周波数領域における平滑化が必要。信号成分の分離には SPWD 法が比較的良好な特性を示すことが多い。最適な平滑化法は信号の性質に依存し、一般的な方法は未開発
- 与えられた信号の性質を調べるには ambiguity 関数が有効
- 周波数分解能を信号周波数に比例させる解析法としての wavelet 変換。scalogram は affine 平滑化を行なった Wigner 分布
- 正規直交基底を用いた離散化法の例 (Meyer の方法)